This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

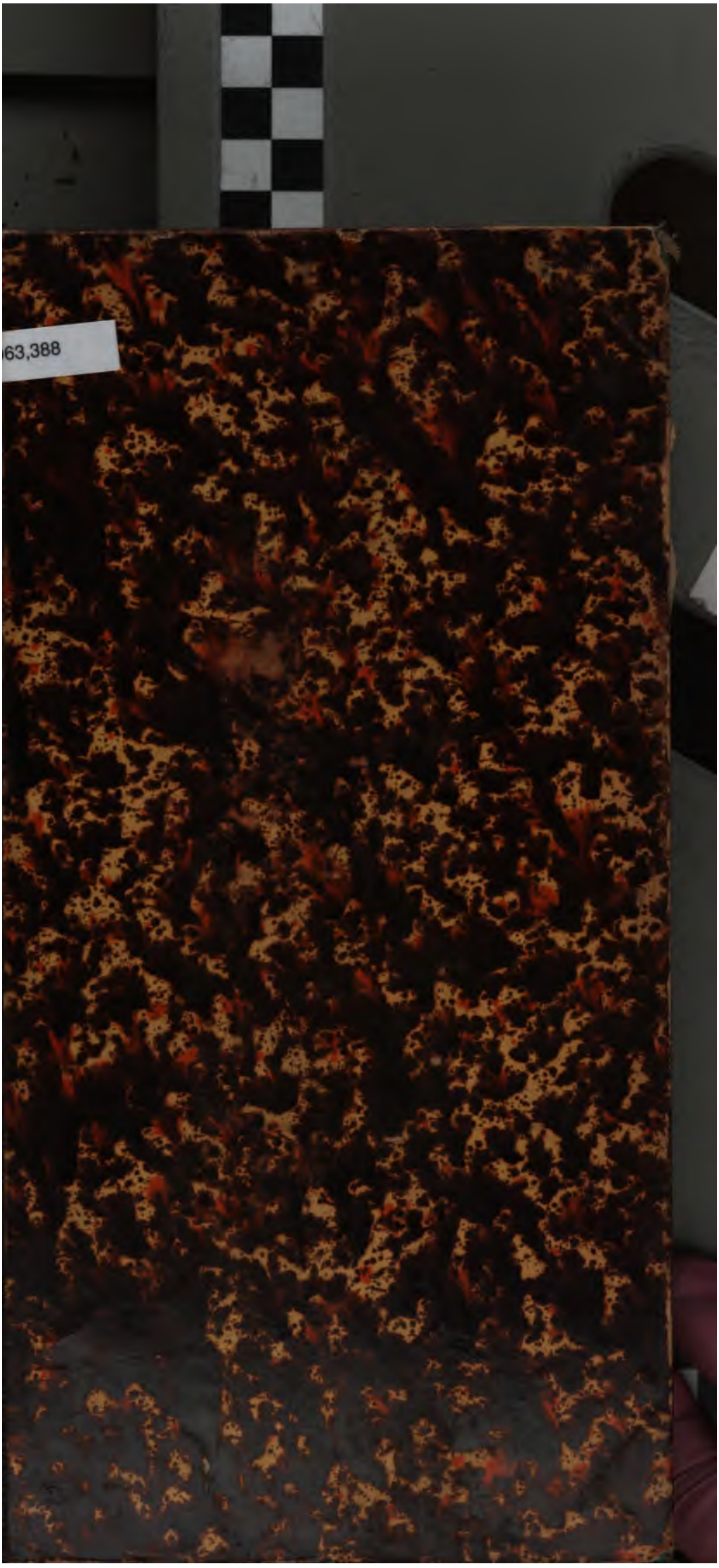
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

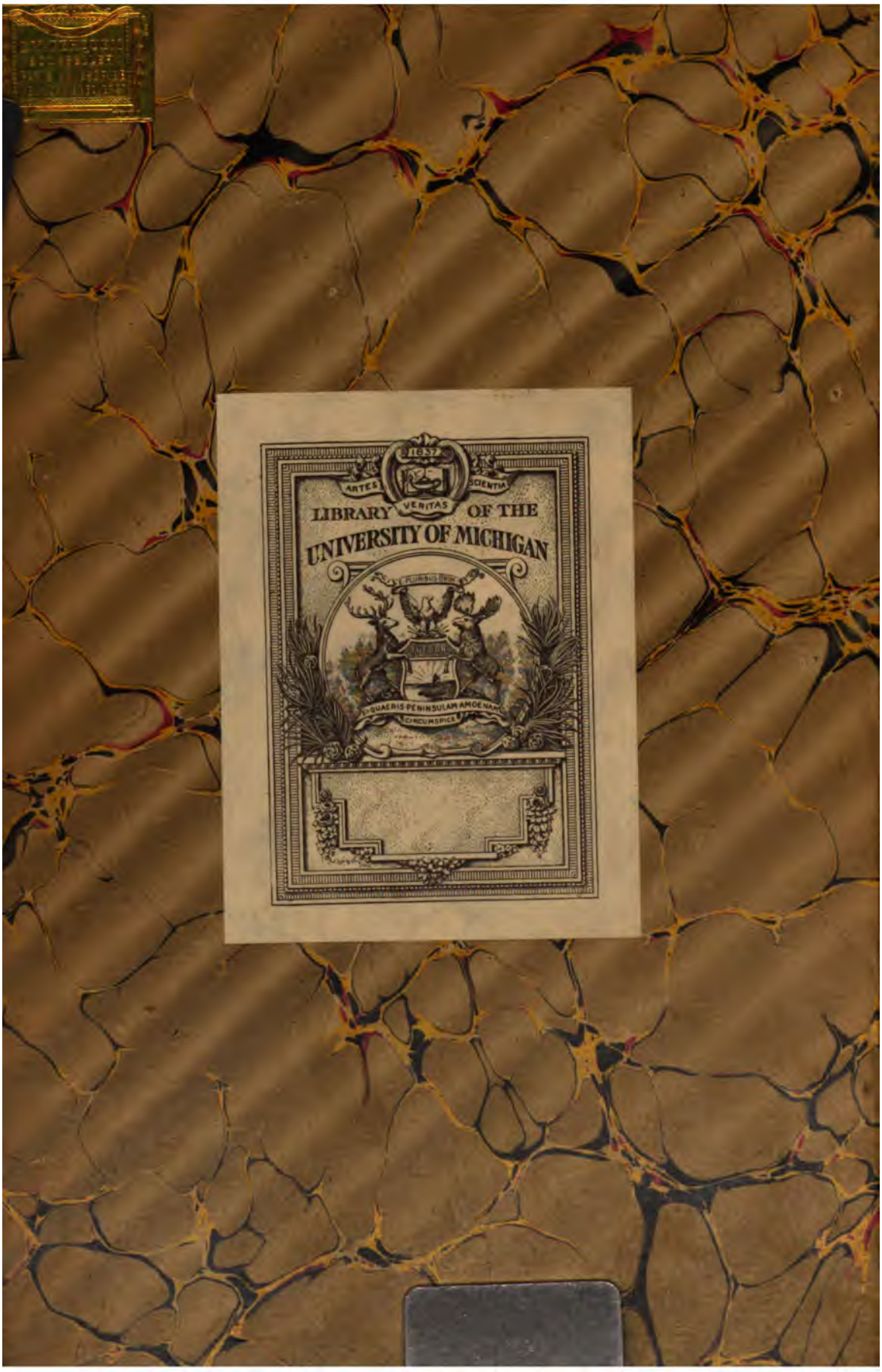
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

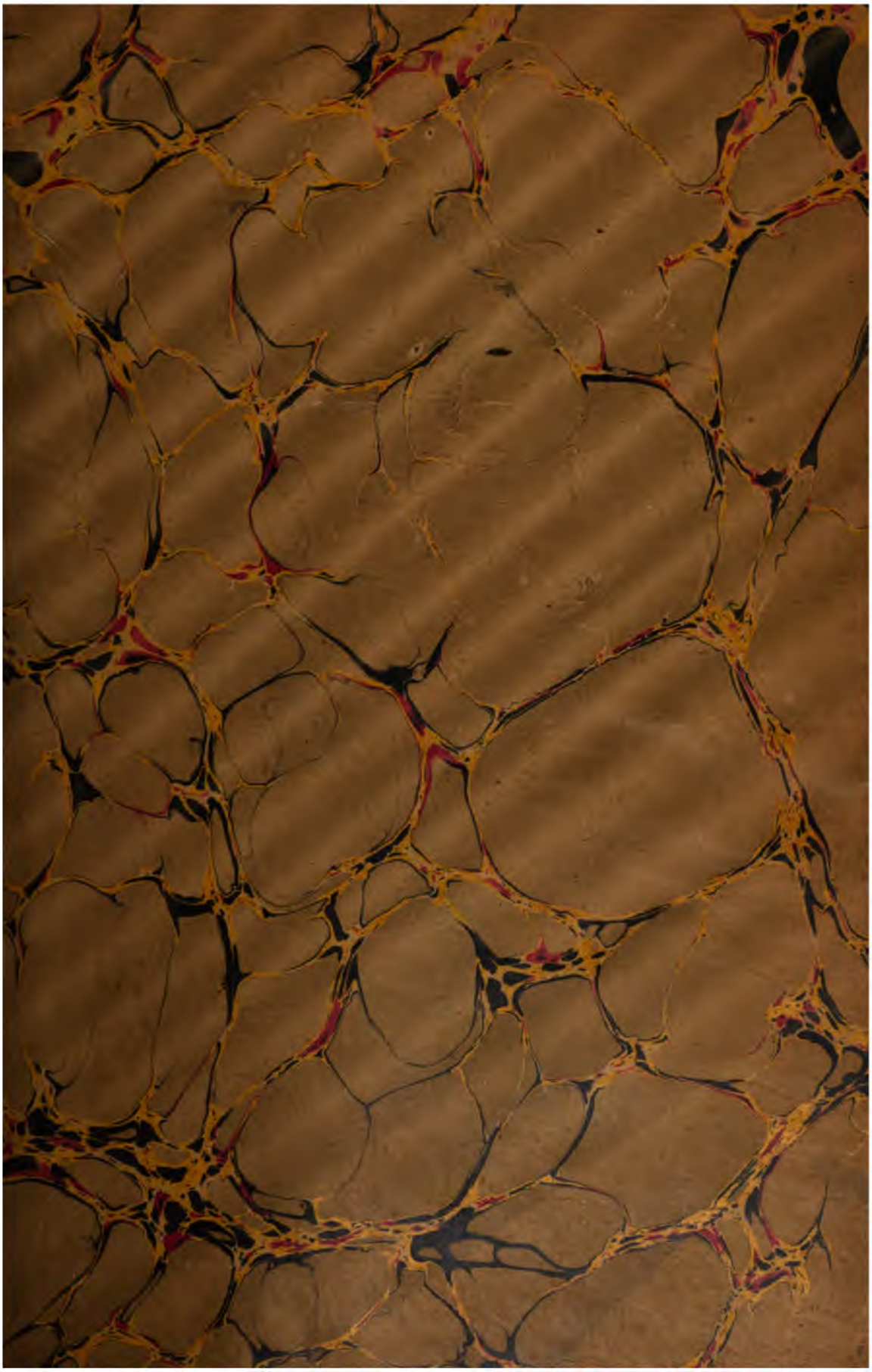
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


63,388


ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Q
46.
.B73

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

TOME IX

A PARIS

CHEZ J.-B. BAILLIÈRE

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE NATIONALE DE MÉDECINE

rue Hautefeuille, 19.

A Londres, chez H. Baillière, 219, Regent Street. — A New-York, chez H. Baillière, 290, Broadway

A Madrid, chez Bailly-Baillière, calle del Principe, 11

A BORDEAUX

CHEZ CHAUMAS-GAYET, LIBRAIRE

Cours du Chapeau-Rouge, 34

1873

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Composition du Bureau pour l'année 1872-1873.

MM. ABRIA, O. ✻, *Président.*
RATHEAU, O. ✻, *Vice-Président.*
SERRÉ-GUINO, *Secrétaire général.*
LOQUIN, PEREZ, *Secrétaires.*
HOÜEL, *Archiviste.*
POTOCKI, *Trésorier.*
BAUDRIMONT, ✻, DELFORTRIE, DUPUY, O. DE LACOLONGE, ✻, LESPIAULT, ✻, LINDER, O. ✻, *Membres du Conseil.*

Membres titulaires.

MM. ABRIA, O. ✻, doyen de la Faculté des Sciences.
ALEXANDRE, pharmacien, membre de la Société Chimique de Paris.
AZAM, ✻, professeur à l'École de Médecine.
BARCKHAUSEN, professeur à la Faculté de Droit.
BATZ DE TRENQUELLÉON (DE), professeur au Lycée.
BAUDRIMONT (A.), ✻, agrégé libre de la Faculté de Médecine de Paris, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
BAUDRIMONT (Édouard), docteur en médecine, chef des travaux de Physique et de Chimie à la Faculté des Sciences.
BAYSSELANCE, O. ✻, ingénieur des constructions navales.
BÉRO, ingén. civil, anc. élève de l'École Centrale des Arts et Manufactures.
BERT (P), professeur de Physiologie à la Faculté des Sciences de Paris.
BILLON, ✻, conseiller à la Cour d'Appel.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour d'Appel.
CHATARD, docteur en médecine.
COLOT, licencié ès sciences, professeur de Mathématiques.
DALMEYDA, licencié ès sciences.
DANNECY, pharmacien en chef de l'Hôpital Saint-André.
DELFORTRIE, juge de paix à Bordeaux.

240696

Q
46
.B73

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

Q
46.
.B73

Q
46
.B73

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

cinq valeurs égales entre elles. M. Abria met sous les yeux des membres un goniomètre de précision sortant des ateliers de MM. Brunner et donnant les 10 secondes; il indique l'usage de cet appareil, soit pour la mesure des angles, soit pour celle des indices, et donne les nombres obtenus pour l'indice des rayons ordinaires avec un prisme de quartz : ces nombres ne diffèrent que de quelques cent-millièmes, c'est-à-dire de quantités comprises entre les limites des incertitudes des expériences, et s'accordent parfaitement avec ceux de Rudberg.

L'étude de la marche du rayon extraordinaire fera le sujet d'une seconde communication.

— Publications reçues :

Monatsbericht.... Compte rendu mensuel de l'Académie des Sciences de BERLIN. Août 1872. — In-8°.

Jahrbuch.... Annuaire des progrès des Mathématiques, publié par *C. Ohrtmann, F. Müller* et *A. Wangerin*. T. II, fasc. 2. Années 1869-70. BERLIN, 1872. — In-8°.

Actes de l'Académie Nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de BORDEAUX. 3e Série, 33e année, 1871-1872. — In-8°.

Le Bordeaux médical. Nos 41-42, décembre 1872. BORDEAUX. — In-4°.

Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de LILLE. 3e Série, t. VIII, 1870. — In-8°.

Proceedings of the LONDON *Mathematical Society*. T. IV, nos 48-49; 1872. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXV, nos 22-23, nov.-déc. 1872. PARIS. — In-4°.

Il Nuovo Cimento. 2e Série, t. VII-VIII, septembre-octobre 1872. PISE. — In-8°.

Bulletin de la Société des Sciences naturelles et historiques de l'Ardèche. N° 6; 1872. PRIVAS. — In-8°.

Atti dell' Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. 25e année, 7e séance. ROME, 1872. — In-4°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. 24e année, t. XXVIII, n° 10, octobre 1872. VALENCIENNES. — In-8°.

Séance du 9 janvier 1873. — M. le Dr REIMONENCQ envoie, pour des motifs de santé, sa démission de membre de la Société.

— M. BAUDRIMONT commence la lecture d'un travail intitulé : *Relations entre la structure des corps et les phénomènes qu'ils présentent.*

— M. ABRIA soumet à M. Baudrimont plusieurs difficultés à

éclaircir : il lui semble presque impossible de ne pas admettre l'existence des mouvements de rotation des molécules des corps.

M. Baudrimont annonce que la suite de son Mémoire contiendra la réponse à ces objections.

— M. LESPIAULT donne communication des observations qu'il a faites sur la pluie d'étoiles filantes du 27 novembre 1872, observations dont le résultat a été envoyé dès le lendemain à l'Institut.

L'apparition avait commencé avant la nuit. — Entre six et sept heures, elle était dans tout son éclat. Un ciel très pur laissait apercevoir les plus faibles météores. On pouvait en évaluer le nombre à 100 environ par minute, et c'est en moyenne l'évaluation que l'on a faite aussi dans les très nombreuses stations où le phénomène a été observé.

Jusqu'à neuf heures trente minutes, l'intensité du phénomène est restée à peu près la même. Des vapeurs se sont alors élevées de l'horizon et ont obscurci une partie du ciel. Jusqu'à minuit, il n'y a plus eu que des éclaircies plus ou moins étendues; mais, à travers ces éclaircies, on apercevait toujours un nombre d'étoiles assez considérable pour laisser croire que la pluie continuait à peu près aussi abondante. A une heure après minuit, le ciel était absolument couvert; à trois heures, on voyait encore quelques constellations; mais il ne paraissait que peu ou point de météores. A cinq heures, il pleuvait.

La presque totalité des étoiles étaient blanches, brillantes et lentes. Nombre d'entre elles laissaient des traînées persistantes; quelques-unes de ces traînées ne disparaissaient qu'au bout de dix ou quinze minutes, après s'être déformées et légèrement déplacées sur le ciel.

Le point radiant était très nettement accusé; dès sept heures du soir, M. Lespiault adressait à M. Le Verrier un télégramme annonçant une pluie d'étoiles venant de γ d'Andromède; mais ce n'était là qu'une approximation, et il était essentiel de déterminer ce point avec toute l'exactitude possible. Or, beaucoup d'étoiles étaient simultanées, et les origines de leurs trajectoires formaient un polygone dont le point central était constamment compris entre γ et 51 d'Andromède. Les météores les plus voisins de cette région, météores dont la course était lente et courte, conformément aux lois de la perspective, étaient évidemment les plus propres à donner avec précision le point radiant. — Ils ont fait adopter, pour la position du point cherché, les coordonnées suivantes :

Ascension droite = 28°. Déclinaison = 46° B.

Notre collègue M. Glotin, qui observait indépendamment, a trouvé de son côté :

Ascension droite = 29°. Déclinaison = 47° B.

Depuis, beaucoup d'observateurs ont fait connaître leur détermination. Voici le tableau de celles qui sont inscrites soit dans les *Comptes rendus*, soit dans le recueil des *Astronomische Nachrichten*, soit dans le journal *les Mondes :*

	Ascension droite.	Déclinaison B.
MM. DE GASPARIS	23°	43°
MOHN	27	45
RUBENSEN	25	47
FEARNLEY	27	43
GLOTIN	29	47
LESPIAULT	28	46
HEIS	24	50
GALLE	22	42
KONKOLI	30	50
KARLINSKI	22	43
BRUHNS	24	44
J. BIRMINGHAM	23	46
SCHMIDT	23	43
BARBER	26	44
PERRY	27	44
TACCHINI	40	46
Moyennne	26°	45°

La moyenne des ascensions droites est de 25° seulement, en laissant de côté l'observation de M. Tacchini.

On voit que les différences sont fort peu considérables. Elles le sont assez cependant pour ne pouvoir être attribuées à de simples erreurs d'observation. En fait, on peut s'assurer, en traçant avec grand soin quatre ou cinq trajectoires parfaitement exactes, qu'elles ne se coupent pas rigoureusement au même point. C'est qu'en effet les trajectoires réelles des corpuscules qui produisent les étoiles filantes ne sont pas rigoureusement parallèles, et cela peut tenir soit aux effets de l'attraction terrestre, soit aux mouvements intérieurs de la comète qui donne naissance aux météores.

On a pu, dès le principe, songer à rattacher ce phénomène à l'apparition annuelle des 13, 14 et 15 novembre. Mais comme, le 27 novembre, la Terre se trouvait justement dans l'orbite de la comète de Biéla, il était plus probable que c'était cette comète qui avait donné lieu à la pluie météorique. — Il y avait un moyen simple de s'en assurer : si l'hypothèse est fondée, en effet, en

composant la vitesse de la comète de Biéla à son nœud descendant avec une vitesse égale et contraire à celle de la Terre au même point, la résultante, prolongée en arrière, doit percer la sphère céleste au point radiant; MM. Lespiault et Stephan ont entrepris ce calcul, et ont trouvé pour coordonnées du point d'intersection :

Ascension droite = 24°, Déclinaison = 43° B.

D'ailleurs, M. Weiss avait déjà donné à l'avance un calcul analogue dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* pour 1868, et il avait trouvé : Ascension droite, 23°4; déclinaison, 43°. La quasi-identité de ces coordonnées avec la moyenne des déterminations du point radiant ne permet pas de douter que les météores du 27 novembre ne soient dus à la comète de Biéla.

P.-S. — Depuis cette communication, un fait est venu confirmer d'une manière éclatante l'hypothèse qui vient d'être émise. En admettant que la Terre ait passé, le 27 novembre, dans la tête ou près de la tête de la comète de Biéla, M. Klinkerfues, directeur de l'Observatoire de Gœttingue, en conclut que, pendant quelques jours après la rencontre, cette comète devait rester à peu près stationnaire près de l'étoile θ du Centaure. Il télégraphia immédiatement à M. Pogson, directeur de l'Observatoire de Madras, qui, dès la première éclaircie, retrouva la comète au point indiqué, et en fit deux observations le 2 et le 3 décembre. Ces deux observations montrent que la comète découverte par M. Pogson est exactement sur l'orbite de Biéla.

Ajoutons toutefois que M. Peters n'admet pas que les perturbations aient pu exercer assez d'influence pour reporter le passage du périhélie de la comète du 14 octobre au 25 décembre 1872. Il croit, en conséquence, que M. Pogson a simplement aperçu l'essaim météorique, et que cet essaim, tout en suivant l'orbite de Biéla, est distinct de cette comète, comme l'essaim du 13 novembre est distinct de la comète de 1866. Dans cette hypothèse, les comètes se disperseraient en essaims météoriques qui pourraient se montrer à leur tour comme de nouvelles comètes. C'est ainsi qu'on doit attribuer une origine commune aux deux comètes de Biéla, à la nouvelle comète de Pogson et à la comète 127 *b* du Catalogue de Galle, dont les éléments sont presque identiques avec ceux de la comète de Biéla.

M. Holetschek, astronome à l'Observatoire d'O Gyalla, et M. Oppolzer se sont aussi occupés de cette question. Le premier a cherché à combiner les deux observations de M. Pogson avec

Académie Nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de BORDEAUX. *Compte-Rendu des séances.* Années 1870-1872. — In-8°.

Le Bordeaux médical. N^os 35-39. Octobre-novembre 1872. BORDEAUX. — In-4°.

Bulletin de la Société de Pharmacie de BORDEAUX. 12^e Année, mai-juillet 1872. — In-8°.

Abhandlungen.... Mémoires publiés par la Société d'Histoire naturelle de BRÊME. T. III, fasc. 2; 1872. — In-8°.

Annual Report.... Rapport annuel des délégués du Muséum de Zoologie comparée de Harvard College, à CAMBRIDGE (Ét.-U.), pour 1870. Boston, 1871. — In-8°.

Mémoires de la Société Nationale des Sciences naturelles de CHERBOURG. T. XVI (2^e Série, t. VI), 1871-1872. — 1 vol. gr. in-8°.

Oversigt.... Bulletin des Actes de la Société Royale des Sciences de Danemark. Année 1872, n° 1. COPENHAGUE. — In-8°.

Rivista scientifico-industriale, compilata da G. Vimercati. Août-octobre 1872. FLORENCE. — 3 fasc. in-8°.

Abhandlungen.... Mémoires publiés par la Société des Naturalistes de Senckenberg. T. VII, fasc. 3-4. FRANCFORT-S.-M. 1870. — In-4°.

Bericht.... Compte rendu de la Société des Naturalistes de Senckenberg. Année 1869-1870. FRANCFORT-S.-M. — In-8°.

Proceedings of the Philosophical Society of GLASGOW. 1871-1872. Vol. VIII, n° 1. — In-8°.

Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland. Vol. XV. GLASGOW, 1872. — In-8°.

Zeitschrift.... Journal général des Sciences naturelles, rédigé par le D^r G.-G. Giebel, à HALLE. Nouvelle série, t. I-IV (35-38 de la Collection); 1870-1871. Berlin. — 4 vol. in-8°.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. T. VII, n^os 1-3. HARLEM, 1872. — In-8°.

Vierteljahrschrift.... Bulletin trimestriel de la Société Astronomique. VII^e Année, 3^e fasc.; 1872. LEIPZIG. — In-8°.

Abhandlungen... Mémoires de la Classe mathématique et physique de la Société Royale des Sciences de Saxe. T. IX, 1870; t. X, fasc. 1-2, 1871. LEIPZIG. — In-4°.

Berichte.... Comptes rendus des Actes de la Société Royale de Saxe. Classe mathématique et physique. Années 1868-1870, et 1871 (fasc. 1-3). LEIPZIG. — In-8°.

Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de LILLE. Année 1871 (III^e Série, t. IX). — In-8°.

Proceedings of the LONDON *Mathematical Society.* N° 47. — In-8°.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de LYON. — Classe des Sciences, t. XVIII; 1870-1871. — Classe des Lettres, t. XIV; 1868-1869. — 2 vol. gr. in-8°.

Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de MOSCOU. Année 1871, n^os^ 3-4. — In-8°.

Matematitchesky.... Journal des Mathématiques, publié par la Société Mathématique de Moscou. T. V, fasc. 1; 1872. — Gr. in-8°.

Abhandlungen.... Mémoires de la Classe mathématique et physique de l'Académie Royale des Sciences de Bavière. T. XI, 1^re^ partie. MUNICH, 1871. — In-8°.

Atti del Reale Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di NAPOLI. 2^e^ Série, t. VI; 1869. — Gr. in-4°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXV, n^os^ 4-18, juillet-octobre 1872. PARIS. — In-4°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. III, septembre-novembre 1872. PARIS. — 3 fasc. gr. in-8°.

Journal de Physique théorique et appliquée. N^os^ 8-10, PARIS, 1872. — Gr. in-8°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XVIII, n^os^ 2-8, juillet-octobre 1872. — In-8°.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of PHILADELPHIA. Année 1870. — In-8°.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at PHILADELPHIA. Vol. XII, n° 86, janvier-juillet 1871. — In-8°.

Il Nuovo Cimento. 2^e^ Série, t. VII-VIII, juillet-août 1872. PISE. — In-8°.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Séances VI-VII, 1872. ROME. — In-4°.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. T. V, janvier-avril 1872. — ROME. — 4 fasc. in-4°.

Recueil des travaux de la Société Médicale du département d'Indre-et-Loire. 1872, 1^er^ semestre. TOURS. — In-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXVII, n^os^ 6-9. VALENCIENNES, 1872. — In-8°.

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, IV^e^ Série. T. I, fasc. 6-9. VENISE. 1872. — In-8°.

Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. XVI (2^e^ part.), t. XVII. VENISE, 1872. — Gr. in-4°.

Verhandlungen.... Actes de la Société Physico-Médicale de WURZBOURG. Nouvelle Série, t. II (fasc. 4), t. III (fasc. I). 1872. — In-8°.

Ch. DES MOULINS : *Fragments zoologiques.* — III. *Un Crinoïde*

ment impossible, attendu qu'il a été reconnu par M. Leymerie que les roches à phosphate ont un fond, et qu'on n'y retrouve aucune fissure communiquant avec les couches inférieures.

— M. Édouard BAUDRIMONT rapporte, à ce sujet, les deux faits suivants :

I. — Il existe près de Bagnères, dans le mont Beda, une vaste caverne habitée par des chauves-souris. Ces animaux sont pendus à la voûte, accrochés les uns aux autres et formant une immense grappe. Au-dessous d'eux et dans d'autres endroits des grottes où ils ont habité précédemment, on trouve des amas considérables de guano de ces mammifères. Ce guano s'y trouve en telle quantité que M. Édouard Baudrimont a pu enfoncer dans ces tas un bâton ayant plus de 2 mètres de long; de plus, la ville de Bagnères exploite ce dépôt, et vend le guano, autant que l'honorable membre puisse se le rappeler, de 11 à 12 francs les 100 kilog.

Ce guano se présente sous la forme d'une terre noirâtre, molle, humide, dans laquelle on reconnaît des débris d'insectes. On y retrouve, de plus, les ossements de chauves-souris qui sont mortes sur place.

II. — M. le Dr Rousset, enlevé à la science l'année dernière, possédait une idole en bois grossièrement sculpté, plusieurs colliers de petits fruits encore retenus par leur fil et quelques débris d'une étoffe grossière qui paraissait être faite avec de la laine. Ces différents objets avaient été trouvés, avec un vase en or d'une valeur intrinsèque de 1,500 francs, dans une cabane située dans les couches inférieures du guano dans une des îles voisines du Chili. Ces objets, donnés au docteur Rousset par le capitaine qui avait assisté à la fouille, ont un caractère d'authenticité certaine. M. Édouard Baudrimont a vainement cherché ces curieuses pièces parmi les objets qui ont figuré dans la vente de la collection Rousset.

— Publications reçues :

Comptes rendus des séances de l'Académie Nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de BORDEAUX. Année 1872-73; juillet-novembre 1872. — In-8°.

Le Bordeaux médical. 2e Année, nos 1-2; janvier 1873. BORDEAUX. — In-4°.

Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de BORDEAUX. 12e Année; août-octobre 1872. — In-8°.

Beilage.... Supplément n° 2 aux Mémoires de la Société d'Histoire naturelle de BRÊME. Tableaux concernant la superficie de l'État de Brême, etc., pour 1871. 1872. — In-4°.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de COLMAR. 12e et 13e Année; 1871 et 1872. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXV, nos 26, 27; t. LXXVI, n° 1; 1872-1873. PARIS. — In-4°.

Bulletins de la Société d'Anthropologie de PARIS. IIe Série, t. VI, fasc. IV; t. VII, fasc. 1, 2, 3. 1872. — In-8°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 2; janvier 1873. — In-8°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. 25e Année, 6e séance. ROME, 1872. — In-4°.

Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de ROTTERDAM. 1872. — In-8°.

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. 4e Série, t. I, fasc. 10; t. II, fasc. 1. 1872. VENISE. — In-8°.

Envois de M. le prince Boncompagni : — A. CLEBSCH, traduit par P. MANSION : *Notice sur les travaux de* JULES PLÜCKER. ROME, 1872. In-4°. — L.-F. MENABREA : *Intorno ad uno scritto del Sig. Prof.* A. GENOCCHI. ROME, 1872. — In-4°.

A. GENOCCHI : *Intorno ad una lettera del Sig. Conte* L.-F. MENABREA. ROME, 1873. — In-8°.

O. LINDER : *Sur l'origine des aurores polaires.* BORDEAUX, 1872. In-8°. — *Des granules magnétiques qu'on observe dans quelques dépôts du bassin de la Gironde.* BORDEAUX, 1872. — Gr. in-8°.

G. VIMERCATI : *Intorno alla primo idea delle caldaie tubolari.* FLORENCE, 1873. — In-8°.

Séance du 6 février. — M. Ernest REDON, secrétaire général de la Société de Sainte-Cécile de Bordeaux et membre de l'Association Scientifique de France, est élu membre de la Société.

— M. RAULIN communique les résultats des observations qu'il a faites en septembre dernier sur le gisement des phosphates de chaux du Quercy, à Raynal près de Saint-Antonin, et à Pendaré près de Caylus.

Le pays est formé par les marnes noires du lias, qui reposent sur les trias de Vaour et de la forêt de Grésigne, et qui supportent de puissantes assises de dolomie grenue et de calcaire compact jaunâtre de l'étage oolithique inférieur et même moyen, à la surface duquel sont excavées des fosses et des crevasses parfois d'une trentaine de mètres de profondeur, à parois corrodées, incrustées de phosphates résinoïdes, et dans lesquelles sont les phosphates exploités en parties le plus souvent volumineuses et

concrétionnées, mêlées à une matière argileuse jaunâtre plus ou moins abondante qui renferme des ossements jusque dans les parties inférieures. Les parties superficielles, dont l'épaisseur, très variable, peut atteindre plusieurs mètres, sont formées par des argiles fines, brunes ou rouges, plus ou moins ferrugineuses, renfermant des morceaux brisés du phosphate sous-jacent.

M. Raulin cite pour beaucoup de détails le Mémoire de M. Daubrée du 30 octobre 1871, dont il admet la parfaite exactitude. Il croit, avec cet auteur, qu' « il suffit de voir, même avec de petits » échantillons, la fréquence de formes évidemment concrétionnées » pour reconnaître des dépôts formés par les eaux. On y trouve, » en effet, tous les accidents de structure qui se produisent journellement encore, dans des incrustations de carbonate de chaux. » y compris les pésolithes et dragées. C'est donc à des sources » minérales que l'on doit attribuer cette abondante précipitation » de phosphorite. La présence très probable de l'acide carbonique » dans ces sources contribuait à en augmenter le pouvoir dissolvant. Les circonstances générales dans lesquelles se présentent » ces gîtes jettent de la lumière sur la manière dont ont pu se » produire des accumulations remarquables de phosphore à certains » niveaux déterminés dans les terrains stratifiés, et en dehors de » toute intervention de l'organisme animal. »

Cette opinion est aussi celle de MM. Trutat, Leymerie et Combes; mais elle n'est pas partagée par M. Malinowsky, qui, le 11 décembre 1871, a adressé de Cahors à l'Académie des Sciences « une » nouvelle note relative à l'origine organique qu'il croit devoir » attribuer aux phosphates de chaux naturels exploités dans le » Quercy. »

Quant à l'âge de ces dépôts, il ne peut être précisé que par les fossiles qu'on y trouve à différentes hauteurs. M. Raulin adopte l'opinion émise en ces termes par M. Gervais, qui a étudié des ossements se rapportant à une douzaine de genres perdus de mammifères : « Ces dépôts présentent dans leur mode de conservation, » aussi bien que dans la manière dont ils sont déposés, une incontestable analogie avec ceux des dépôts sidérolithiques, et il est » probable qu'ils se rattachent, comme ces derniers, à plusieurs » formations. La plus ancienne que nous y connaissions encore, » s'y trouve représentée par un certain nombre des espèces qui » composent la faune des gypses (de Paris), tandis que d'autres » espèces, enfouies dans les mêmes dépôts, appartiendraient au » miocène ou à des dépôts plus récents. Jusqu'à présent ces dernières sont les moins nombreuses. »

—M. DELFORTRIE combat l'opinion émise d'abord par M. Daubrée, partagée ensuite par M. Gervais, et à laquelle M. Raulin se rallie, qui consiste à faire remonter à l'époque tertiaire la formation des phosphates du Lot.

D'après M. Delfortrie, ces phosphates ne seraient que quaternaires. A l'appui de son dire, il développe les considérations suivantes :

« La couche supérieure des phosphates du Lot renferme, il est » vrai, des restes d'animaux de l'époque éocène et miocène, mais » ce n'est point là une raison pour en tirer cette conséquence que » ces phosphates sont tertiaires; il suffit d'examiner la composition » de cette couche supérieure, notamment l'échantillon placé par » M. Raulin lui-même sous les yeux de la Société, pour être » convaincu qu'elle constitue un terrain remanié par les cou- » rants diluviens, et dans lequel les ossements de Palæotheriums, » Tapirs, etc., mêlés à des quartz roulés, forment un tout empâté » dans la limonite. Or, incontestablement, cette couche et les phos- » phates qu'elle renferme ne remontent qu'à l'époque quaternaire.

» Quant aux phosphates composant la couche immédiatement » inférieure au dépôt chargé de fer limoneux, il est matériellement » impossible qu'ils ne soient pas, eux aussi, de formation quater- » naire; car s'ils étaient éocènes ou miocènes, comme l'avancent » MM. Daubrée, Gervais et Raulin, il aurait fallu que l'espace » occupé aujourd'hui dans les crevasses par cette couche supérieure » fût restée *vide* pendant les milliers de siècles qui séparent ces » époques de l'époque quaternaire, ce qui n'est pas admissible. »

— M. MORISOT pense qu'on pourrait expliquer de la manière suivante la formation et la structure des phosphates de chaux du Quercy : des fissures ou crevasses se seraient produites dans le plateau jurassique des environs de Caylus. Ces crevasses auraient été remplies par les eaux pluviales du plateau ou par des cours d'eau se perdant dans la terre, comme il en existe encore sur d'autres points du Lot. Ces eaux, quelle que fût leur provenance, auraient entraîné et accumulé dans ces poches, comme dans des fosses naturelles, les débris épars sur le plateau : ossements, excréments d'animaux et pierres plus ou moins mêlées d'argile et de sable.

D'autre part, il se serait produit là des émanations d'acide carbonique comme nous en voyons encore en tant d'endroits. Cet acide, dissous dans l'eau des poches, lui aurait permis de dissoudre à son tour la matière pierreuse, phosphate et carbonate, des os. Le carbonate, plus soluble, se serait, à mesure, échappé avec les

Notre collègue M. Glotin, qui observait indépendamment, a trouvé de son côté :

Ascension droite = 29°. Déclinaison = 47° B.

Depuis, beaucoup d'observateurs ont fait connaître leur détermination. Voici le tableau de celles qui sont inscrites soit dans les *Comptes rendus*, soit dans le recueil des *Astronomische Nachrichten*, soit dans le journal *les Mondes* :

	Ascension droite.	Déclinaison B.
MM. DE GASPARIS	23°	43°
MOHN	27	45
RUBENSEN	25	47
FEARNLEY	27	43
GLOTIN	29	47
LESPIAULT	28	46
HEIS	24	50
GALLE	22	42
KONKOLI	30	50
KARLINSKI	22	43
BRUHNS	24	44
J. BIRMINGHAM	23	46
SCHMIDT	23	43
BARBER	26	44
PERRY	27	44
TACCHINI	40	46
Moyennne	26°	45°

La moyenne des ascensions droites est de 25° seulement, en laissant de côté l'observation de M. Tacchini.

On voit que les différences sont fort peu considérables. Elles le sont assez cependant pour ne pouvoir être attribuées à de simples erreurs d'observation. En fait, on peut s'assurer, en traçant avec grand soin quatre ou cinq trajectoires parfaitement exactes, qu'elles ne se coupent pas rigoureusement au même point. C'est qu'en effet les trajectoires réelles des corpuscules qui produisent les étoiles filantes ne sont pas rigoureusement parallèles, et cela peut tenir soit aux effets de l'attraction terrestre, soit aux mouvements intérieurs de la comète qui donne naissance aux météores.

On a pu, dès le principe, songer à rattacher ce phénomène à l'apparition annuelle des 13, 14 et 15 novembre. Mais comme, le 27 novembre, la Terre se trouvait justement dans l'orbite de la comète de Biéla, il était plus probable que c'était cette comète qui avait donné lieu à la pluie météorique. — Il y avait un moyen simple de s'en assurer : si l'hypothèse est fondée, en effet, en

composant la vitesse de la comète de Biéla à son nœud descendant avec une vitesse égale et contraire à celle de la Terre au même point, la résultante, prolongée en arrière, doit percer la sphère céleste au point radiant; MM. Lespiault et Stephan ont entrepris ce calcul, et ont trouvé pour coordonnées du point d'intersection :

Ascension droite = 24°, Déclinaison = 43° B.

D'ailleurs, M. Weiss avait déjà donné à l'avance un calcul analogue dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* pour 1868, et il avait trouvé : Ascension droite, 23°4; déclinaison, 43°. La quasi-identité de ces coordonnées avec la moyenne des déterminations du point radiant ne permet pas de douter que les météores du 27 novembre ne soient dus à la comète de Biéla.

P.-S. — Depuis cette communication, un fait est venu confirmer d'une manière éclatante l'hypothèse qui vient d'être émise. En admettant que la Terre ait passé, le 27 novembre, dans la tête ou près de la tête de la comète de Biéla, M. Klinkerfues, directeur de l'Observatoire de Gœttingue, en conclut que, pendant quelques jours après la rencontre, cette comète devait rester à peu près stationnaire près de l'étoile θ du Centaure. Il télégraphia immédiatement à M. Pogson, directeur de l'Observatoire de Madras, qui, dès la première éclaircie, retrouva la comète au point indiqué, et en fit deux observations le 2 et le 3 décembre. Ces deux observations montrent que la comète découverte par M. Pogson est exactement sur l'orbite de Biéla.

Ajoutons toutefois que M. Peters n'admet pas que les perturbations aient pu exercer assez d'influence pour reporter le passage du périhélie de la comète du 14 octobre au 25 décembre 1872. Il croit, en conséquence, que M. Pogson a simplement aperçu l'essaim météorique, et que cet essaim, tout en suivant l'orbite de Biéla, est distinct de cette comète, comme l'essaim du 13 novembre est distinct de la comète de 1866. Dans cette hypothèse, les comètes se disperseraient en essaims météoriques qui pourraient se montrer à leur tour comme de nouvelles comètes. C'est ainsi qu'on doit attribuer une origine commune aux deux comètes de Biéla, à la nouvelle comète de Pogson et à la comète 127 *b* du Catalogue de Galle, dont les éléments sont presque identiques avec ceux de la comète de Biéla.

M. Holetschek, astronome à l'Observatoire d'O Gyalla, et M. Oppolzer se sont aussi occupés de cette question. Le premier a cherché à combiner les deux observations de M. Pogson avec

des traces; phosphates qui, d'ailleurs, sont souvent remplis de fossiles qui démontrent encore leur origine.

Les cavernes ont pu recevoir directement le produit qui s'est finalement transformé en guano, puis en phosphate; mais les masses d'apatites trouvées dans les fouilles ne sont pas en place; elles y ont été apportées par des accidents géogéniques. Cette dernière opinion est plus que démontrée par leur mélange avec d'autres produits, et notamment avec des sables ferrifères.

Ces derniers contiennent aussi des phosphates, mais plus ou moins divisés; ce qui démontre une espèce de trituration et de mélange, probablement opérée par des eaux en mouvement.

— Publications reçues :

Mathematische.... Mémoires mathématiques et physiques de l'Académie Royale des Sciences de BERLIN. Année 1871. — 2 fasc. in-4°.

Monatsbericht.... Compte rendu mensuel de l'Académie Royale des Sciences de Prusse, à BERLIN. Septembre-octobre 1872. — In-8°.

Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs. BESANÇON. 4e Série, t. VI, 1870-1871. — In-8°.

Indici generali dei dieci tomi della seconda Serie delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di BOLOGNA, *pubblicati dal 1862 al 1870.* — 1871. — In-4°.

Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di BOLOGNA. IIIe Série, t. I et t. II (1er fasc.). 1871-1872. — In-4°.

Rendiconte delle sessioni dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di BOLOGNA. Années 1871-1872. — In-8°.

Le Bordeaux médical. 2e année, 1873; nos 3, 4, 5. BORDEAUX. — In-4°.

Abhandlungen.... Mémoire de la Société des Sciences de Silésie. Sciences naturelles et médicales; 1861-1872 (11 fascicules). — Sciences philosophiques et historiques; 1862-1871 (11 fascicules). BRESLAU. — Gr. in-8°.

Jahres-Berichte.... Comptes rendus annuels de la Société des Sciences de Silésie. Années 39-49; 1862-1872. — 11 fasc. gr. in-8°.

Denkschrift.... Cinquantième Anniversaire de la fondation de la Société des Sciences de Silésie. BRESLAU, 1853. — In-4°.

Die fossile Fauna... Faune fossile de la couche du diluvium silurien de Sadewitz, près Oels, Basse-Silésie. Monographie paléontologique, par le Dr *Ferd. Roemer*. BRESLAU, 1861. — Gr. in-4°.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de COLMAR. 11e Année, 1870. — Gr. in-8°.

Rivista scientifico-industriale, compilata da G. Vimercati. Juillet 1872. FLORENCE. — In-8°.

Verhandlungen... Actes de la Société d'Histoire naturelle et de médecine de HEIDELBERG. T. VI; décembre 1871 à novembre 1872. — In-8°.

Matematitchesky.... Recueil mathématique, publié par la Société Mathématique de Moscou. T. VI, fasc. 2; 1872. — Gr. in-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, nos 2, 3; janvier 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. IV, n° 1; janvier 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Journal de Physique théorique et appliquée. N° 13; janvier 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. 26e Année, séance 1, 15 décembre 1872. ROME. — In-4°.

Atti della R. Accademia delle Scienze di TORINO. T. VII, 1871-1872. — Gr. in-8°.

Bullettino meteorologico ed astronomico del Regio Osservatorio dell' Università di TORINO. 6e Année, 1872. — In-4° oblong.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de TOULOUSE. 5e Année, 1870-1871. — In-8°.

ÉM. BLANCHARD : *L'instruction générale en France. L'observation et l'expérience.* TOULOUSE, 1872. — In-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXVIII, n° 11; 1872. VALENCIENNES. — In-8°.

Séance du 20 Février. — M. DELFORTRIE dépose, sur le bureau, un exemplaire de son Mémoire sur les phosphates du Lot, dont il fait hommage à la Société.

— M. BAUDRIMONT termine la lecture de son Mémoire intitulé : *Observations sur l'origine des guanos,* etc. (Voir les *Mémoires* de la Société, t. IX.)

M. DUPUY communique à la Société une *Exposition de la méthode de Hansen pour le calcul des perturbations des petites planètes* dont il est l'auteur, et donne lecture de l'introduction qui suit :

« Les méthodes qui servent à calculer les perturbations des planètes principales font usage de séries ordonnées suivant les puissances des excentricités et de l'inclinaison mutuelle, les arguments des différents termes étant des fonctions des deux anomalies moyennes. On obtient, à l'aide de ces développements, soit par la méthode de Laplace les variations des coordonnées, soit par celle de Lagrange les variations des éléments en fonction desquelles on exprime celles des coordonnées. Il faut remarquer que la méthode

concrétionnées, mêlées à une matière argileuse jaunâtre plus ou moins abondante qui renferme des ossements jusque dans les parties inférieures. Les parties superficielles, dont l'épaisseur, très variable, peut atteindre plusieurs mètres, sont formées par des argiles fines, brunes ou rouges, plus ou moins ferrugineuses, renfermant des morceaux brisés du phosphate sous-jacent.

M. Raulin cite pour beaucoup de détails le Mémoire de M. Daubrée du 30 octobre 1871, dont il admet la parfaite exactitude. Il croit, avec cet auteur, qu' « il suffit de voir, même avec de petits » échantillons, la fréquence de formes évidemment concrétionnées » pour reconnaître des dépôts formés par les eaux. On y trouve, » en effet, tous les accidents de structure qui se produisent journellement encore, dans des incrustations de carbonate de chaux, » y compris les pésolithes et dragées. C'est donc à des sources » minérales que l'on doit attribuer cette abondante précipitation » de phosphorite. La présence très probable de l'acide carbonique » dans ces sources contribuait à en augmenter le pouvoir dissolvant. Les circonstances générales dans lesquelles se présentent » ces gîtes jettent de la lumière sur la manière dont ont pu se » produire des accumulations remarquables de phosphore à certains » niveaux déterminés dans les terrains stratifiés, et en dehors de » toute intervention de l'organisme animal. »

Cette opinion est aussi celle de MM. Trutat, Leymerie et Combes; mais elle n'est pas partagée par M. Malinowsky, qui, le 11 décembre 1871, a adressé de Cahors à l'Académie des Sciences « une » nouvelle note relative à l'origine organique qu'il croit devoir » attribuer aux phosphates de chaux naturels exploités dans le » Quercy. »

Quant à l'âge de ces dépôts, il ne peut être précisé que par les fossiles qu'on y trouve à différentes hauteurs. M. Raulin adopte l'opinion émise en ces termes par M. Gervais, qui a étudié des ossements se rapportant à une douzaine de genres perdus de mammifères : « Ces dépôts présentent dans leur mode de conservation, » aussi bien que dans la manière dont ils sont déposés, une inconstestable analogie avec ceux des dépôts sidérolithiques, et il est » probable qu'ils se rattachent, comme ces derniers, à plusieurs » formations. La plus ancienne que nous y connaissions encore, » s'y trouve représentée par un certain nombre des espèces qui » composent la faune des gypses (de Paris), tandis que d'autres » espèces, enfouies dans les mêmes dépôts, appartiendraient au » miocène ou à des dépôts plus récents. Jusqu'à présent ces dernières sont les moins nombreuses. »

—M. DELFORTRIE combat l'opinion émise d'abord par M. Daubrée, partagée ensuite par M. Gervais, et à laquelle M. Raulin se rallie, qui consiste à faire remonter à l'époque tertiaire la formation des phosphates du Lot.

D'après M. Delfortrie, ces phosphates ne seraient que quaternaires. A l'appui de son dire, il développe les considérations suivantes :

« La couche supérieure des phosphates du Lot renferme, il est » vrai, des restes d'animaux de l'époque éocène et miocène, mais » ce n'est point là une raison pour en tirer cette conséquence que » ces phosphates sont tertiaires; il suffit d'examiner la composition » de cette couche supérieure, notamment l'échantillon placé par » M. Raulin lui-même sous les yeux de la Société, pour être » convaincu qu'elle constitue un terrain remanié par les cou- » rants diluviens, et dans lequel les ossements de Palæotheriums, » Tapirs, etc., mêlés à des quartz roulés, forment un tout empâté » dans la limonite. Or, incontestablement, cette couche et les phos- » phates qu'elle renferme ne remontent qu'à l'époque quaternaire.

» Quant aux phosphates composant la couche immédiatement » inférieure au dépôt chargé de fer limoneux, il est matériellement » impossible qu'ils ne soient pas, eux aussi, de formation quater- » naire; car s'ils étaient éocènes ou miocènes, comme l'avancent » MM. Daubrée, Gervais et Raulin, il aurait fallu que l'espace » occupé aujourd'hui dans les crevasses par cette couche supérieure » fût restée *vide* pendant les milliers de siècles qui séparent ces » époques de l'époque quaternaire, ce qui n'est pas admissible. »

— M. MORISOT pense qu'on pourrait expliquer de la manière suivante la formation et la structure des phosphates de chaux du Quercy : des fissures ou crevasses se seraient produites dans le plateau jurassique des environs de Caylus. Ces crevasses auraient été remplies par les eaux pluviales du plateau ou par des cours d'eau se perdant dans la terre, comme il en existe encore sur d'autres points du Lot. Ces eaux, quelle que fût leur provenance, auraient entraîné et accumulé dans ces poches, comme dans des fosses naturelles, les débris épars sur le plateau : ossements, excréments d'animaux et pierres plus ou moins mêlées d'argile et de sable.

D'autre part, il se serait produit là des émanations d'acide carbonique comme nous en voyons encore en tant d'endroits. Cet acide, dissous dans l'eau des poches, lui aurait permis de dissoudre à son tour la matière pierreuse, phosphate et carbonate, des os. Le carbonate, plus soluble, se serait, à mesure, échappé avec les

constantes ont été déterminées par la condition que les intégrales représentent, à un instant donné, le lieu et la vitesse de la planète, le problème est donc complètement résolu. Mais il ne peut avoir deux solutions; donc tout autre système d'éléments osculateurs arrivera au même résultat; seulement, dans la première approximation, les constantes et la perturbation diffèreront de celles qu'on a obtenues dans l'autre système de quantités du second ordre; finalement, l'identité se produira entre les deux systèmes dans les limites de l'exactitude apportée dans les calculs.

» Pour diminuer les perturbations, il est avantageux, après avoir calculé celles de la première approximation en fonction des éléments osculateurs, de les exprimer en fonction des éléments moyens. A cet effet, on calcule les différences entre les éléments osculateurs et les éléments moyens; de ces différences on déduit ces derniers, ainsi que les quantités à ajouter aux perturbations déjà obtenues pour obtenir le résultat demandé.

» J'ai divisé mon travail en trois parties.

» Dans la première, j'ai placé l'introduction des coordonnées, l'expression analytique des fonctions R et W, dont dépendent respectivement les perturbations de la longitude moyenne et du rayon vecteur, ainsi que celles de la latitude; les transformations de la fonction perturbatrice et de ses dérivées, et enfin l'expression des perturbations du premier ordre des coordonnées choisies.

» Dans la seconde, se trouvent les développements nécessaires au calcul des perturbations du second ordre et aux variations séculaires.

» Dans la troisième, j'expose les corrections que subissent les coefficients des perturbations, lorsqu'on a corrigé les éléments elliptiques pris pour base, et enfin le calcul des perturbations lorsqu'on prend pour base les éléments moyens.

» Je me propose dans un travail ultérieur d'appliquer la méthode de Hansen à l'une des planètes télescopiques. »

— Publications reçues :

Le Bordeaux médical. 2e Année, n° 6. BORDEAUX. — In-4°.

Annales de la Société Entomologique de la Belgique. T. XV. BRUXELLES, 1871-1872. — Gr. in-8°.

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles. 2e Série, t. XI, n° 68. LAUSANNE, 1873. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, nos 4, 5; janvier 1873. PARIS. — In-8°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 3; février 1873. — In-8°.

Bulletin des Sciences mathématiques et physiques. Table des matières du tome III, 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de TOULOUSE. 6e Année, 1871-1872. Fasc. 1, 1873. — In-8°.

E. DELFORTRIE : *Les gîtes de chaux phosphatée dans le département du Lot; leur forme, le mode et l'époque de leur formation.* BORDEAUX, 1873. — Broch. gr. in-8°.

Séance du 6 mars. — M. Franz SCHRADER est élu membre de la Société.

— M. BAUDRIMONT présente à la Société un *Examen comparatif et analytique du sable des dunes et des cendres des végétaux qui croissent à leur surface;* travail entrepris en collaboration avec M. DELBOS.

— Le même Membre donne ensuite connaissance d'un autre Mémoire intitulé : *Analyse des terres du département de la Gironde,* pour lequel il a été puissamment aidé par des analyses faites par M. Duponchel. (Ces deux Mémoires, aujourd'hui terminés, avaient déjà été présentés, autrefois, à la Société.)

— M. DE LAVERGNE rend compte des moyens employés jusqu'à ce jour pour préserver les vignes du Phylloxera.

— Publications reçues :

Bulletin de la Société Algérienne de Climatologie, Sciences physiques et naturelles. 9e Année, 1872, nos 4-6; 10e Année, 1873; nos 1-3. ALGER. — In-8°.

Monatsbericht.... Compte rendu mensuel de l'Académie Royale des Sciences de BERLIN. Novembre 1872. — In-8°.

Le Bordeaux médical, 2e Année, nos 7-9, février 1873. BORDEAUX. — In-4°.

Mémoires de la Société des Sciences naturelles et historiques, des Lettres et des Beaux-Arts de CANNES *et de l'arrondissement de* GRASSE. 5e Année, t. III, n° 1; 1873. — In-8°.

Programme des Concours ouverts par la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de LILLE. 1873. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, n° 6, février 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 4, février 1873. — In-8°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. IV, février 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Journal de Physique théorique et appliquée. N° 14, février 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. T. XXIV. 1870-71. Rome. — In-4°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXV, n° 12; 1873. Valenciennes. — In-8°.

Battaglini (G.) : *Nota intorno alla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche tra di loro.* Rome, 1873. — In-4°.

Delmas (D.) et Laraüza (L.) : *Dax, ses eaux, ses boues. 1er Compte rendu des Thermes de Dax (Landes) pour le 2e trimestre de l'année* 1871. Paris, 1872. — In-8°.

Séance du 20 mars. — M. Abria continue l'exposition des recherches qu'il a entreprises dans le but de vérifier la loi de double réfraction chez les uni-axes.

Il fallait d'abord déterminer la direction de l'axe optique dans le prisme qui sert aux expériences. Pour y parvenir, on fait tomber normalement sur l'une des faces un rayon polarisé; ce rayon éprouve sur une seconde face la réflexion totale et ressort par la troisième. On obtient ainsi quatre images, deux ordinaires, deux extraordinaires. Si l'on fait varier le plan de polarisation du rayon incident, les images extraordinaires s'évanouissent lorsque le plan de polarisation est parallèle à la section principale du cristal, c'est-à-dire au plan mené par l'axe et la normale. On peut ainsi déterminer la direction de la section principale correspondante à chaque face si le Nicole polarisant est monté sur un cercle divisé. Des formules, faciles à établir, permettent de calculer la direction de l'axe au moyen de celles de la section principale sur deux faces et de l'angle que ces faces forment entre elles; d'autres formules permettent de conclure des valeurs trouvées celles qui conviennent aux autres faces du prisme et fournissent ainsi des expériences de vérification. M. Abria communique à la Société les résultats numériques des observations de ce genre faites avec un prisme de quartz.

Pour vérifier la loi de la double réfraction, il suffit de remarquer que, le prisme étant dans la position du minimum de déviation, l'angle d'incidence sur la première face correspond à un angle de réfraction qui est égal à la moitié de l'angle dièdre correspondant. Cette incidence étant ainsi connue, on n'a qu'à suivre, à l'aide des formules qui résultent de la loi d'Huyghens, la marche du rayon extraordinaire jusqu'à la sortie par la seconde face. Les calculs doivent être faits avec attention. M. Abria fait connaître les résultats d'un calcul de ce genre qui s'accordent avec l'observa-

tion. Il communiquera plus tard ceux qui se rapportent aux autres faces et à d'autres substances.

— Publications reçues :

Zeitschrift.... Journal de la Société de Géographie de BERLIN. N° 41, t. VII, 5e livr., 1872. — In-8°.

Académie Nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de BORDEAUX. *Compte rendu des séances.* Année 1872-73, novembre-décembre. — In-8°.

Le Bordeaux médical. 2e Année, n° 10, mars 1873. BORDEAUX. — In-4°.

Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de BORDEAUX. 13e Année, janvier 1873. — In-8°.

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XXXIX, 1872. BRUXELLES. — In-4°.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°, t. XXII. BRUXELLES.

Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 2e Série, t. XXXI-XXXIV. BRUXELLES, 1871-1872. — 4 vol. in-8°.

Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Années 1872-1873. BRUXELLES. — 2 vol. in-18.

Académie Royale de Belgique. Centième anniversaire de fondation. (1772-1872.) BRUXELLES, 1872. — 2 vol. gr. in-8°.

QUETELET (Ad.) : *Tables de mortalité et leur développement.* 1872. — *Sur les étoiles filantes de la période de novembre 1871, et sur les aurores boréales des 9 et 10 du même mois. — Sur l'aurore boréale du 4 février 1872. — Sur le 8me Congrès de Statistique, tenu à Saint-Pétersbourg pendant le mois d'avril 1872. — Étoiles filantes du mois d'août 1872. Aurores boréales des mois d'août et de septembre de la même année. Température des puits artésiens. — Sur l'apparition extraordinaire d'étoiles filantes du 27 novembre 1872.* BRUXELLES, 1872. — Broch. in-8°.

QUETELET (Ad.) : *Annales météorologiques de l'Observatoire de* BRUXELLES. 5e Année, 1871. — In-4°.

Annual Report of the Trustees of the Museum of Comparative Zoölogy, at Harvard College, in CAMBRIDGE : *together with the Report of the Director for 1871.* BOSTON, 1872. — In-8°.

Application of Photography to illustrations of Natural History. With two Figures, printed by the Albert and Woodburg Processes (Bulletin of the Zoölogical Museum). 1871. — In-8°.

Rivista scientifico-industriale. T. V, février 1873. FLORENCE. — Gr. in-8°.

Bulletin de la Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère. 3e Série, t. III. GRENOBLE, 1872. — Gr. in-8°.

Vierteljahrsschrift.... Bulletin trimestriel de la Société Astronomique. 8e Année, 1re livr., 1873. LEIPZIG. — In-8°.

Proceedings of the LONDON *Mathematical Society.* Nos 50-51; 1873. — In-8°.

Inhaltsverzeichniss.... Table des matières, pour les Années 1860-1870, des Comptes rendus des séances de l'Académie Royale des Sciences de Bavière, à MUNICH. 1872. — In-8°.

Sitzungsberichte.... Comptes rendus des séances de la Classe mathématique et physique de l'Académie R. des Sciences de Bavière, à MUNICH. 1871, cah. 3; 1872, cah. 1-2. — In-8°.

Mémoires de l'Académie de Stanislas. 1870 et 1871. 4e Série, t. IV. NANCY, 1872. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, nos 7-9, février-mars 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 5, mars 1873. — In-8°.

Il Nuovo Cimento. 2e Série, t. VII-VIII, novembre-décembre 1872. PISE. — In-8°.

Académie de LA ROCHELLE. *Section des Sciences naturelles. Annales.* 1870-71. N° 10, 1872. — Gr. in-8°.

Notices historiques sur les Sociétés des Lettres, Sciences et Arts de LA ROCHELLE; *publiées sous les auspices de l'Administration municipale, avec le concours de l'Académie.* 1873. — 1 vol. gr. in-8°.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. T. V, juillet, 1872. ROME. — In-4°.

Société des Amis des Sciences naturelles de ROUEN, 8e Année, 1872; 1er semestre. — In-8°.

Württembergische.... Annales scientifiques du Wurtemberg. 28e Année, fasc. 1-3. STUTTGART, 1872. — In-8°.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de TOULOUSE. 6e Année, 1871-72, fasc. 2. — In-8°.

Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis. 3e Série, t. VII, fasc. 1-2. UPSAL, 1867-70. — In-4°.

Årskrift.... Annuaire publié par la Société Royale des Sciences d'UPSAL. 1re et 2e Années, 1860-1861. — 2 vol. gr. in-8°.

*Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'*UPSAL. T. III, nos 1-12, 1871. — Gr. in-4°.

BAYSSELLANCE : *Vallée d'Ossau, vue à vol d'oiseau, d'après une photographie faite sur un relief.* — 1 pl. in-fol. (2 exempl.).

DUBALEN (P.-E.) : *Catalogue critique des Oiseaux observés dans les landes des Basses-Pyrénées et de la Gironde.* BORDEAUX, 1872. — Gr. in-8°.

Séance du 3 avril. — M. HOÜEL communique à la Société une série de Notes de M. Matthew COLLINS, faisant suite à celles qui ont été imprimées dans le tome VI des *Mémoires*, sous le titre de *Geometrical Miscellanies*. Ces Notes paraîtront dans le tome IX.

— M. SERRÉ-GUINO fait la communication suivante :

« Depuis plusieurs années, j'emploie dans mes cours le procédé suivant pour obtenir le phosphure d'hydrogène. Je traite le phosphore rouge par une dissolution concentrée de potasse ou de soude; le gaz obtenu n'est pas spontanément inflammable, comme celui que l'on obtient en traitant le phosphure ordinaire par une dissolution concentrée de potasse ou de soude; dans ce dernier cas, il se produit une petite quantité de phosphure liquide, ce qui n'a pas lieu dans la préparation que j'indique plus haut. Il semble donc, d'après cela, que la différence entre le phosphore ordinaire et le phosphore rouge est plus qu'une différence physique, puisque les réactions d'un même corps (potasse ou soude) sur ces deux états du phosphore ne sont pas les mêmes. C'est un fait qui vient confirmer ce qu'avaient indiqué, depuis longtemps déjà, M. Berthelot, et récemment MM. Troost et Hautefeuille dans une communication récente à l'Académie des Sciences. »

— M. BAUDRIMONT fait une communication sur la physiologie végétale et la formation de la matière organique. (Voir le tome IX des *Mémoires*.)

— Publications reçues :

Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel. N^os^ 5-9, 1872-73. AMIENS. — In-8°.

Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de BORDEAUX. 13^e^ Année, février 1873. — In-8°.

Verhandlungen.... Actes de la Société des Naturalistes de BRÜNN. T. IX, 1871. — In-8°.

Rivista scientifico-industriale. T. V, janvier et mars 1873. FLORENCE. — Gr. in-8°.

Abhandlungen.... Mémoires de la Classe mathématique et physique de la Société Royale des Sciences de Saxe. LEIPZIG. T. X, n^os^ 3-5, 1872. — In-4°.

Berichte.... Comptes rendus des Actes de la Société Royale des

Sciences de Saxe, à LEIPZIG. Classe mathématique et physique. 1871, nos 4-7; 1872, nos 1-2. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, n° 10, mars 1873. Paris. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de Paris. T. XIX, n° 6, mars 1873. — In-8°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. IV, mars 1873. — Gr. in-8°.

Journal de Physique théorique et appliquée. N° 15, mars 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XXVI, séance 2; 1873. ROME. — In-4°.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. T. V, août 1872. ROME. — In-4°.

F. DEL GIUDICE : *Di una nuova forma di elettrocalamita, atta ad accrescere grandemente l'effetto dell' elettricità come forza motrice.* NAPLES. 1873. — In-4°.

Séance du 1er mai. — M. HOÜEL communique de nouvelles Notes de M. COLLINS, relatives à l'extraction de la racine cubique. (Voir le tome IX des *Mémoires.*)

— M. BAUDRIMONT fait une communication sur les comètes. Il pense que ces astres doivent être classés en deux groupes : les uns seraient constitués par un fluide très peu dense; les autres seraient composés de parties solides.

M. Baudrimont croit, d'après quelques observations qu'il a faites au sujet de la comète Donati, que les éléments de la comète, qui forment ce qu'on appelle la *chevelure*, sont soumis aux lois de Kepler, et qu'ils gravitent autour du noyau comme les planètes autour du soleil; mais qu'à cause de la longueur du grand axe de l'ellipse qu'ils décrivent, il peut se faire que, lors de leur plus grand éloignement du noyau, quelques portions soient entraînées, et cessent de faire partie de la comète, si elles se trouvent dans le voisinage d'un autre astre. — Dès 1858, M. Baudrimont a adressé à l'Institut une Note où il indiquait l'opinion ci-dessus.

— M. LESPIAULT rappelle que cette dernière opinion a été émise et que des calculs ont été faits pour déterminer, d'une manière précise, les divers éléments du mouvement des particules cométaires. Il peut y avoir plusieurs espèces de comètes, mais il croit qu'elles sont toutes composées d'une masse excessivement petite, Jamais, en effet, on n'a pu observer la moindre perturbation produite par elles quand elles se sont trouvées dans le voisinage d'une

planète ou d'un satellite; on voit parfaitement bien les étoiles à travers la matière cométaire; même celles de 9e et de 10e grandeur peuvent être observées sans diminution sensible de lumière. La nature de cette matière n'a pu encore être déterminée, même au moyen de l'analyse spectrale.

Il ne faut pas confondre les étoiles filantes avec les aérolithes : ceux-ci sont des fragments de planètes qui pénètrent dans l'atmosphère terrestre; les étoiles filantes proviennent des comètes : on ne sait pas de quoi elles sont composées; jamais, en effet, elles ne sont parvenues jusqu'à nous.

Les étoiles filantes n'ont jamais donné lieu à des explosions comme les aérolithes; jamais il n'est survenu de chutes d'aérolithes à la suite des pluies d'étoiles filantes. Les météorites n'apparaissent pas à des époques périodiques comme les étoiles filantes. Il n'y a pas pour elles, comme pour les étoiles filantes, de point radiant. Les bolides qui s'enflamment et qui font explosion dans l'atmosphère décrivent une trajectoire presque horizontale. Ils traversent une grande portion de l'atmosphère terrestre, et, grâce à la résistance de l'air, il y a transformation du mouvement en chaleur. Si la trajectoire d'un bolide est verticale, ils ne s'enflamment point.

— M. Baudrimont pense pouvoir étudier bientôt la lumière des étoiles filantes, à l'aide d'un instrument nouveau. On aura alors des renseignements précis sur leur nature.

— M. Ratheau fait la communication suivante sur Amélie-les-Bains :

« L'étude d'un hôpital thermal se présente avec intérêt au chimiste, au géologue, au médecin, à l'architecte. C'est à ces titres divers que j'ai pensé qu'il serait intéressant pour mes collègues d'être mis au courant des constructions et aménagements de l'hôpital militaire d'Amélie-les-Bains.

» Situé vers l'extrémité Est de la chaîne des Pyrénées, dans une vallée secondaire descendant du Sud au Nord, celle du Mondouy, le village d'Amélie-les-Bains est connu, de temps immémorial, par la quantité et la qualité de ses eaux thermales : des thermes luxueux y existaient à l'époque gallo-romaine; on en a trouvé les ruines, que j'ai décrites dans le *Bulletin de la Société scientifique des Pyrénées-Orientales,* année 1865.

» Sur la rive gauche du torrent sourdent un assez grand nombre de sources d'eau thermale, dont le débit ne s'élève pas à moins de 2000 mètres cubes par jour. La source de l'État, dite de l'Escaldadou, en donne à elle seule $508^{mc},000$; sa température est de $61°,5$. L'eau est de la nature de celles dites sulfureuses-sodiques; l'agent

principal minéralisateur est le sulfure de sodium; chaque litre d'eau en contient de $0^{gr},0111$ à $0^{gr},0112$; il est aussi considéré comme l'agent thérapeutique le plus important. L'eau contient en outre quelques carbonates; le dégagement d'hydrogène sulfuré est faible; faible aussi est la quantité de barégine.

» La source sort d'une roche de gneiss phorphyrique très dure, à grain fin et compact de couleur gris blanc teintée de rose, qui semble n'être là qu'un accident; car la stratification générale se compose de roches schisteuses des terrains de transition, et de bancs de grès rouges.

» L'hôpital militaire thermal, qui est pour 500 malades, dont 100 officiers, est construit sur l'autre rive du torrent où l'on a trouvé un vaste plateau, parfaitement aéré, et très convenable pour les bâtiments et les jardins. Je ne veux m'occuper ici que de l'aménagement des eaux. Le principe qui a guidé, dans toute cette organisation, a été celui de profiter des moyens naturels que l'on avait à sa disposition, pour éviter toute machine, toute dépense destinées soit à élever l'eau, soit à la chauffer, soit à la distribuer; c'est en utilisant les différences de niveau, les eaux du torrent, celles de la source, et leur chaleur, que l'on est arrivé à ce résultat, non sans quelques difficultés.

» La première consistait à faire arriver l'eau de la source de la rive gauche sur la rive droite en traversant le torrent. Le griffon de la source est à l'altitude $254^{m},50$; les réservoirs sont à l'altitude $245^{m},00$, et une distance de près de $400^{m},00$ les sépare. On a joint ces deux points par une conduite de $0^{m},10$ de diamètre, en forme de siphon renversé, dont le point le plus bas, situé sur un pont qui franchit le Mondouy, est à l'altitude $229^{m},00$. Cette conduite, autrefois en bois, aujourd'hui en poterie, court dans une galerie voûtée; l'eau thermale y coule à tuyaux pleins.

» Pour avoir de l'eau thermale, on a disposé une seconde galerie le long de la galerie ascendante, entre le pont et les réservoirs; dans cette galerie est un tuyau de plomb formant serpentin constamment arrosé par l'eau du torrent; il a $0^{m},08$ de diamètre, et embranche sur la conduite principale au point le plus bas; son développement est d'environ $300^{m},00$. Son débouché est dans un des réservoirs.

» L'eau ordinaire chaude s'obtient en faisant passer l'eau du torrent dans un autre serpentin plongé dans le réservoir d'eau thermale chaude. Ces réservoirs sont donc pourvus de quatre espèces d'eau, eau thermale chaude et froide, eau douce chaude et froide. Ils sont à $7^{m},00$ de hauteur en moyenne au-dessus des

cabinets de bains et de douches, différence de niveau qui tient aux pentes du sol. On a donc rempli le programme proposé. Des robinets, placés de distance en distance dans les grandes conduites, permettent d'y régler le parcours de l'eau.

» Il fallait savoir si cette organisation conservait à l'eau thermale toute sa valeur. Le sulfure de sodium, qui est l'élément principal, est en effet assez instable. L'acide carbonique de l'air le décompose et amène un dégagement d'acide sulfhydrique; l'oxygène le transforme successivement en sulfite et en sulfate, qui n'ont pas les mêmes propriétés thérapeutiques. Il importait de constater ces transformations et de mesurer leur importance. Cela revient à constater en chacun des points différents la quantité de sulfure de sodium existant dans un litre d'eau. L'expérience se fait ainsi : après avoir précipité les carbonates et les silicates par une solution en excès de chlorure de barium, on additionne le liquide d'une solution d'amidon, et puis on y verse goutte à goutte une liqueur titrée d'iode. L'iode se substitue au soufre, équivalent pour équivalent; et, au moment où la liqueur se colore en bleu, tout le soufre est déplacé. La quantité d'acide employée donne la quantité de soufre; et, par un calcul facile, on obtient celle de monosulfure de sodium.

» Des expériences nombreuses, et particulièrement celles que MM. Ratheau, commandant du génie, et Beylier, pharmacien en chef de l'hôpital, ont faites de concert, et qui ont été publiées dans les *Mémoires de médecine militaire* (janvier 1863), ont montré que la perte en sulfure de sodium ne dépassait pas 2 ou 3 pour 100 dans le grand tuyau d'amenée pour l'eau chaude, et 4 ou 5 pour 100 dans le serpentin de l'eau thermale réfrigérée. Mais elle est beaucoup plus considérable dans les réservoirs où l'on ne peut soustraire l'eau à l'action de l'air; elle varie alors de 10 à 30 pour 100. Enfin, dans les piscines et les baignoires, si l'eau est versée à l'avance, la désulfuration marche plus rapidement encore, et elle est complète au bout de cinq à six heures.

» La perte de température n'est guère que de 1°,5 dans la grande conduite, et elle est peu sensible dans les réservoirs; il n'y a pas à s'en occuper. »

» Quant à la désulfuration, on ne peut évidemment y remédier dans les piscines et baignoires; il faut seulement avoir la précaution de ne pas y mettre l'eau à l'avance. La perte dans les tuyaux d'amenée est trop peu considérable pour que l'on s'en préoccupe, il n'y a que celle qui a lieu dans les réservoirs à laquelle il importerait de remédier. MM. François, inspecteur général des mines,

et Poggiale, pharmacien en chef du Val-de-Grâce, ont proposé de mettre au-dessus des réservoirs une atmosphère factice d'azote; il résulte de leurs expériences, que confirme la théorie, que ce gaz n'a aucune action sur le sulfure de sodium, que ce dernier ne serait donc plus décomposé dans les réservoirs si cette atmosphère existait. Cette idée a été adoptée, et j'ai rédigé les projets d'exécution. Voici, en quelques mots, en quoi ils consistent :

» Les réservoirs, hermétiquement fermés à leur partie supérieure qui est voûtée, sont mis en communication avec une cloche à gaz semblable en tout à celle des usines à gaz d'éclairage. Cette cloche est remplie de gaz azote; elle flotte dans un équilibre constant au-dessus d'une grande cuve à eau; l'équilibre est obtenu au moyen de chaînes formant contrepoids variables. Quand l'eau baisse dans les réservoirs, elle est remplacée par l'azote venant de la cloche; si l'eau monte, le gaz repasse des réservoirs dans la cloche; celle-ci est donc constamment en mouvement. Elle doit avoir une capacité de $400^{mc},000$ pour suffire à ces alternatives.

» Mais, si exactes que soient les fermetures, il faut pourvoir au remplacement du gaz perdu, et le confectionner une première fois. Il doit exister pour cela un appareil spécial, dans lequel, comme toujours, on a cherché à utiliser les agents moteurs économiques que l'on possède. L'azote est extrait de l'air atmosphérique. Un courant de cet air passe dans une cornue en fonte chauffée au rouge, laquelle contient de l'éponge de fer; cette matière retient l'oxygène de l'air; le gaz restant, soit l'azote, est purifié dans deux vases successifs contenant de l'eau et de l'eau de chaux; celle-ci lui enlève l'acide carbonique, l'eau lui enlève les matières en suspension non décomposées par la chaleur. Voici comment on procède : un récipient, d'une capacité de $4^{mc},000$ environ, est en communication d'une part avec la cloche et avec la cornue, de l'autre avec le réservoir d'eau du torrent et l'extérieur; supposons-le plein d'eau, et ouvrons les communications avec la cornue et l'extérieur; l'eau se vide par le tuyau de vidange extérieur, et il est fait appel à l'air qui perd son oxygène dans la cornue, ses impuretés dans le premier vase laveur et son acide carbonique dans le second; le réservoir se remplit donc d'azote. Fermons les robinets laissant arriver l'azote et échapper l'eau, et ouvrons les communications avec l'eau du torrent et avec la cloche; la première arrivera dans le réservoir, et remplacera l'azote qui sera chassé sous la cloche. On recommencera alors l'opération; il convient d'avoir deux réservoirs, afin qu'il y ait continuité dans la marche de l'appareil; quand l'un se vide, l'autre se remplit, et il n'y a pas de temps perdu.

» On a proposé aussi un jeu automatique des robinets, basé sur l'emploi des flotteurs. On ne peut le décrire ici; on doit ajouter qu'un problème analogue a été résolu d'une manière qui paraît pratique par un membre de l'Association française pour l'avancement des sciences, qui a communiqué sa solution au Congrès de Bordeaux.

» Il faudrait environ 3^h30^m pour remplir la cloche ($400^{mc},000$). Cette installation délicate n'a pas encore été exécutée, faute de fonds, quoiqu'elle soit adoptée en principe.

» Je ne veux rien dire sur l'installation des bains, douches, vaporarium, etc. Cela sort du programme que je m'étais tracé.

» Cependant je ne veux pas omettre complètement un appareil très simple, inventé par le commandant du génie qui m'a précédé, pour les bains de submersion. Il s'agit de permettre à l'homme de respirer sous l'eau, de manière à immerger la tête, qui est souvent le siége de maladies cutanées.

» Cet appareil, qui a été décrit autrefois dans plusieurs journaux scientifiques et qui est dû à M. Lacroix, commandant du génie, consiste en une embouchure, percée de deux trous munis de deux soupapes en caoutchouc qui s'ouvrent en sens inverse, l'une de l'extérieur à l'intérieur, l'autre de l'intérieur à l'extérieur. La première sert à l'inspiration de l'air, la seconde à son expiration. Les deux ouvertures sont prolongées par des tuyaux en roseaux emmanchés dans un flotteur en liége, de sorte qu'elles débouchent au-dessus de la surface de l'eau. Le malade est assis, complètement immergé, tenant l'embouchure entre ses dents. Il respire ainsi d'une manière assez commode, et peut rester sous l'eau, sans grande gêne, plus d'une demi-heure. »

— M. Baudrimont donne quelques renseignements sur les communications qui ont été faites à la réunion des Sociétés savantes à Paris.

— Publications reçues :

*Bulletin de la Société d'études scientifiques d'*Angers. 2e Année, 1872. — In-8°.

Monatsbericht.... Compte rendu mensuel de l'Académie Royale des Sciences de Berlin. Décembre 1872. — In-8°.

Le Bordeaux médical. 2e Année, nos 11-17, mars-avril 1873. Bordeaux. — In-4°.

Abhandlungen.... Mémoires publiés par la Société d'Histoire naturelle de Brême. T. III, fasc. 3; 1873. — In-8°.

Mémoires de l'Académie Nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen. 1873. — In-8°.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, à HARLEM. T. VI, livr. 4-5; 1872. — In-8°.

Proceedings of the LONDON *Mathematical Society*. N^os^ 52-53. — In-8°.

Relazione de' lavori accademici del R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di NAPOLI *nell' anno* 1872, *etc. Da* F. DEL GIUDICE. 1873. — In-4°.

Zapiski.... Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. I, fasc. 2-3. ODESSA, 1872. — Gr. in-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, n^os^ 11-15, mars-avril 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletins de la Société d'Anthropologie de PARIS. 2^e^ Série, t. VII, fasc. 4; 1872. — In-8°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n^os^ 7-8, avril 1873. — In-8°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. IV, avril-mai 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Journal de Physique théorique et appliquée. N° 16, avril 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Il Nuovo Cimento. 2^e^ Série, t. IX, janvier-février 1873. PISE. — In-8°.

Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XXVI, séance 3; 1873. ROME. — In-4°.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de TOULOUSE. 7^e^ Série, t. IV; 1872. — Gr. in-8°.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de TOULOUSE. 7^e^ Année, 1872-73, fasc. 1. — In-8°.

Recueil des travaux de la Société médicale du département d'Indre-et-Loire. Année 1872, 2^e^ semestre. TOURS, 1873. — In-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXVI, n^os^ 1-2; 1873. VALENCIENNES. — In-8°.

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. 4^e^ Série, t. II, fasc. 2-3; 1872-73. VENISE. — In-8°.

BERNARDIN : *Classification de cent caoutchoucs et gutta-percha, suivie de Notes sur les sucs de Balata et de Massaranduba*. GAND, 1872. — Broch. In-8°.

CARLES (P.) : *Étude chimique sur le givre de vanille*. Paris, 1872. — Broch. in-8°.

SILORATA (A.-B.) : Il Cav. FRANCESCO ZANTEDESCHI. *Cenni biografici e considerazioni*. ROME, 1872. — Broch. in-4°.

STIATTESI (A.) : *Intorno alla vita ed ai lavori del* P. GIOVANNI ANTONELLI, *d. S. P.* ROME; 1873. — Broch. in-4°.

Séance du 15 mai. — M. Baysselance rend compte à la Société des principaux travaux communiqués à la première Section du Congrès Scientifique, dans la session tenue à Pau en avril 1873 :

« *Météorologie.* — M. Fiche, conseiller de préfecture à Pau, communique les observations faites à Pau et dans le département; il annonce que douze observatoires vont bientôt fonctionner sur différents points des Basses-Pyrénées. Ce département est particulièrement intéressant au point de vue météorologique, à cause de la région montagneuse qui en occupe une grande partie. Cette région reçoit une quantité de pluie beaucoup plus considérable que la plaine, et il est admis, dans le pays, qu'il règne, le long de la chaîne, une zone dont la largeur s'étendrait à peu près entre les Eaux-Chaudes et Sévignac, et où il tombe encore plus de pluie que vers l'axe de la chaîne.

» *Observatoire du Pic du Midi de Bigorre.* — M. Vaussenat, ingénieur civil à Bagnères-de-Bigorre, lit un travail sur l'établissement d'un observatoire au Pic du Midi, projet poursuivi depuis longtemps, et qui va recevoir, par les soins de la Société Ramond, un commencement d'exécution. Un observatoire astronomique, établi sur le sommet du Pic, pourrait rendre de grands services, à cause de la pureté de l'air. M. Vaussenat fait voir une série d'épreuves d'une éclipse de soleil, qui étonne les connaisseurs par le relief des images. Ces épreuves proviennent d'un cliché pris au sommet du Pic pendant que la plaine était couverte de nuages, et qu'il pleuvait abondamment à Bagnères.

» Pour le moment, on ne s'occupe que d'un observatoire météorologique. On voudrait arriver à s'établir au sommet du Pic, et on ne croit pas cet établissement impossible, même en hiver : des projets sont étudiés pour mettre les observateurs en relation télégraphique constante avec la plaine, les ravitailler et les mettre à l'abri des rigueurs excessives de l'hiver. Mais, provisoirement, on va commencer dès cette année à établir un observatoire à l'hôtellerie du Pic, à 2200 mètres d'altitude, pour profiter des bâtiments qui existent.

» Des fonds ont été obtenus, dans ce but, du Conseil général, des communes voisines, etc.; de nombreuses souscriptions ont été recueillies. Tous les amis des sciences sont invités à donner leur concours à cette œuvre intéressante.

» Le Congrès a émis le vœu que cette entreprise fût encouragée et soutenue, et que plusieurs observatoires semblables fussent établis le long de la chaîne, notamment sur le sommet du Canigou,

placé, à l'extrémité orientale, dans une position analogue à celle du Pic du Midi dans la partie centrale.

» *Mouvement des sables à l'embouchure de l'Adour.* — M. Daguenet, ingénieur en chef des travaux maritimes à Bayonne, a donné quelques détails sur les travaux faits pour rendre plus praticable la barre de l'Adour. En construisant des jetées pleines pour enserrer le courant du fleuve, il semble qu'on doive lui conserver sa profondeur, et détruire la barre ; en réalité, on ne fait que la repousser au large. Les courants latéraux, qui longent le rivage, sont arrêtés par les jetées, et déposent du sable qui ne tarde pas à remplir l'angle, en sorte qu'on se trouve avoir simplement modifié la forme du rivage, et la barre se reforme un peu plus loin.

» Avec des jetées à claire-voie en pilotis, au contraire, on maintient le courant en direction, tout en laissant le passage assez libre aux courants latéraux; c'est par ce système qu'on est parvenu à augmenter déjà notablement la profondeur d'eau sur la barre, sans changer sa position.

» A la demande qui lui est faite, — s'il ne pourrait pas arriver que le courant du fleuve se déviât au travers d'une des jetées, et laissât le chenal se remplir de sable, — M. Daguenet répond qu'en effet il faut, pour éviter ce danger, conserver une proportion convenable entre les vides et les pleins. Pour déterminer cette proportion par expérience, on emploie, sur l'Adour, des piliers en maçonnerie reliés par des vannes mobiles.

» *Histoire naturelle des Pyrénées.* — Plusieurs Mémoires ont été communiqués, notamment par M. le comte de Bouillé, sur la botanique, l'ornithologie, la zoologie et l'entomologie des Pyrénées. M. de Bouillé a fait aussi des découvertes paléontologiques très intéressantes à Biarritz, où il a trouvé plusieurs fossiles nouveaux dans le terrain nummulitique.

» *Anthropologie.* — M. le docteur Garrigou a rendu compte des résultats des innombrables fouilles qu'il a opérées dans les grottes de plusieurs régions, mais surtout des Pyrénées. Ces résultats sont connus. Le seul fait saillant à remarquer, c'est que, d'après son expérience, les restes de l'âge de l'*Ours des cavernes* ne se trouvent jamais dans des grottes élevées à moins de 200 mètres au-dessus du fond de la vallée. La concordance de cet âge avec la période glaciaire rendrait compte de ce fait, les glaces qui remplissaient le fond des vallées les ayant rendues inaccessibles.

» M. Garrigou a fouillé aussi, près de Salies-de-Béarn, des terrains marécageux, dans lesquels il a retrouvé des restes nombreux et incontestables d'habitations lacustres : pieux de 5 à 6 mètres de

long, enfoncés debout dans la vase, et reliés par une espèce de plancher, débris de l'industrie humaine appartenant à l'âge de la pierre, etc., etc.

Plusieurs membres du Congrès se sont rendus à la grotte d'Espalungue, près d'Izeste, une des plus belles des Pyrénées, et des fouilles ont été pratiquées sous leurs yeux. On a trouvé de nombreux débris de l'âge du renne : silex taillés, mâchoires de renne, d'isard, de cheval, de renard, os brisés, bois de renne travaillés, etc. Les deux pièces les plus intéressantes ont été : une dent canine perforée par la main de l'homme, et un morceau de bois de renne de 10 centimètres environ de longueur, couvert d'arabesques et de dessins très régulièrement tracés; ces deux pièces ont été trouvées par M. Potier, de Dax.

» *Géologie.* — M. Rey-Lescure a présenté, à la première Section, une carte géologique des environs de sa propriété située près des confluents de l'Aveyron, du Tarn et de la Garonne. Un fait résultant de son exposition est le rejet complet sur la rive sud de tous les dépôts apportés par le Tarn et la Garonne, venant du Sud-Est, et tournant à l'Ouest après le confluent. Ce fait, après une discussion, a été expliqué par la direction de l'Aveyron, dont le courant, dirigé de l'Est à l'Ouest, a formé comme un barrage, et a dû empêcher les dépôts en suspension dans les deux autres rivières, de se porter sur la rive Nord.

» *Géologie des Pyrénées.* — Deux communications très intéressantes ont été faites sur ce sujet : une description de la vallée du Gave de Pau, de Lourdes à Gavarnie, par M. Frossard, président de la Société Ramond, et une carte géologique des montagnes de l'Ariége, de la Haute-Garonne, et d'une partie des Hautes-Pyrénées, par M. le docteur Garrigou.

» M. Garrigou a constaté la présence dans les Pyrénées du terrain *Laurentien* et du terrain *Huronien,* ce dernier représenté, comme dans l'Amérique du Nord, par des couches de quartzites. Dans le terrain Laurentien, a été retrouvé par M. Thores, dans les Basses-Pyrénées, l'*Éozoon,* découvert pour la première fois au Canada, M. Garrigou a trouvé lui-même des traces évidentes d'organismes, sans pouvoir en préciser les formes.

» M. Frossard et M. Garrigou affirment, l'un comme l'autre, la présence du terrain *carbonifère,* autrefois contestée. Il paraît exister, à peu près tout le long de la chaîne, parfaitement caractérisé.

» M. Garrigou fait remarquer la disposition des pointements d'ophite, très nombreux dans les Pyrénées, et toujours alignés

entre eux, suivant des directions parallèles aux couches des terrains sédimentaires. D'après de nombreuses observations, M. Garrigou n'hésite pas à regarder les ophites et les graphites comme des terrains stratifiés par voie d'éruption sous forme de boue thermale; il ne peut admettre leur éruption à l'état de fusion. Sur certains points, il a observé des argiles très nettement stratifiées, passant à l'ophite compacte par degrés insensibles. Sur d'autres, les couches de granit alternent avec les couches sédimentaires, avec un parallélisme parfait.

» *Période glaciaire.* — La question de la période glaciaire a été longuement traitée. M. Garrigou a constaté l'ancienneté de certains terrains, évidemment morainiques, qui plongent sous des terrains tertiaires. A ses yeux, la grande époque glaciaire remonte à l'époque miocène; c'est alors que ce sont formés ces immenses dépôts, qui recouvrent le plateau de Lannemezan et toute la région sous-pyrénéenne, et proviennent de la moraine frontale remaniée. Des restes de cette moraine paraissent encore comme des îlots, dans les plaines de Tarbes. Plus au Nord, quand on creuse des puits, on retrouve à une certaine profondeur des blocs anguleux, restes de moraine en place, recouverts par les cailloux roulés de la moraine remaniée.

» M. Guireau a fait remarquer la disposition en terrasses planes étagées, qui se retrouve dans toutes les vallées des Pyrénées. Il l'explique, en prenant pour exemple la vallée d'Arudy par les déplacements successifs du puissant cours d'eau formé par la fusion des glaciers, à mesure que le sommet de la moraine, enlevé par le courant, laissait à nu de nouveaux obstacles solides.

» M. Bayssellance a fait observer que dans l'hypothèse de M. Garrigou, l'énorme quantité de dépôts entraînés au Nord des Pyrénées rendrait compte de la dénudation extraordinaire subie par le sommet de la chaîne; dénudation tellement considérable, que l'axe orographique s'est trouvé reporté très au Sud de l'axe géologique. Il ne faut pas s'étonner, du reste, de l'intensité de la période glaciaire dans les Pyrénées à l'époque miocène. Le soulèvement pyrénéen avait déjà dû porter les sommets à une grande hauteur, tandis que les deux soulèvements alpins n'avaient pas encore donné aux Alpes leur relief actuel. Les Pyrénées devaient donc se trouver beaucoup plus élevées, et le climat extrêmement pluvieux de cette région explique l'extension qu'ont dû prendre les glaciers.

» La chaîne qui sépare la vallée d'Arudy de celle de Pau, et dont les sommets portent un lit épais de cailloux roulés, et des blocs évidemment erratiques, a dû être exhaussée par le soulèvement des

Alpes principales, dont les traces sont très marquées, et a présenté, pendant la période quaternaire, une barrière infranchissable au glacier d'Ossau, qui avait pu s'étendre au Nord pendant la période miocène.

» M. Bayssellance a signalé aussi, dans l'intérieur des montagnes, les petites vallées à fond plat, désignées vulgairement comme *fonds de sac* (notamment le *prade* de Gavarnie), mais dont l'origine lui paraît évidemment glaciaire. Ces surfaces planes, en effet, sont loin d'être horizontales, ce qui ne peut s'accorder avec une origine lacustre; elles ont une pente dépendant de la pente générale de la vallée supérieure. On s'explique parfaitement que les débris tombés sous le glacier, et entraînés par lui, se sont entassés dans les fonds de crevasse, jusqu'à ce qu'ils aient atteint un plan parallèle au mouvement du glacier, et passant par le sommet du seuil de la crevasse. Ce plan a bien servi forcément de limite ; au-dessus, ils étaient entraînés par le glacier, par-desus le seuil.

» Au centre de la chaîne, au contraire, dans les vallées d'origine, la pression de la masse étant presque verticale, les glaces occupant le fond des crevasses sont restées en place, ont empêché les débris d'y arriver, et ont laissé, lors de la fusion des glaciers, des sacs à grande profondeur.

» *Fractures.* — Les fractures parallèles aux principaux soulèvement signalés par M. Élie de Beaumont sont indiquées sur la carte de M. Garrigou; elles entraînent toujours des rapports de composition remarquables, entre les sources thermales situées sur leur parcours. Les plus accentuées dans les Pyrénées sont, après celles dues au soulèvement pyrénéen lui-même, celles des soulèvements du Mont-Viso, des Alpes occidentales et des Alpes principales. Le Thüringerwald, le Sancerrois (déterminé par notre collègue M. Raulin), et, au dire de M. Genreau, le Montserrat, ont aussi laissé des traces marquées. »

— Publications reçues :

Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de BORDEAUX. 13e Année, mars 1873. — In-8°.

Bulletin de la Société Académique de BREST. Année 1871, 2e livr. — In-8°.

Illustrated Catalogue of the Museum of Comparative Zoölogy, at Harvard College. N° VII. *Revision of the Echini by* ALEXANDER AGASSIZ. Part. I-II, avec 49 planches. CAMBRIDGE (Mass.) — 2 vol in-4°.

Rivista scientifico-industriale. T. V, avril 1873. FLORENCE. — Gr. in-8°.

Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. T. IX. HELSINGFORSIÆ, 1871. — In-4°.

Öfversigt.... Bulletin des Actes de la Société des Sciences de Finlande. N^os^ XII-XIII, 1869-1871. HELSINGFORS. — In-8°.

Bidrag till Finlands.... Contribution à la Statistique officielle de la Finlande. V. Etat de la température en Finlande, années 1846-1865, 1^er^ fasc. HELSINGFORS, 1869. — In-4°.

Bidrag till kännedom.... Contribution à la connaissance de la nature et de la population en Finlande; publié par la Société des Sciences de Finlande. Fasc. XV-XVII, 1870-1871. HELSINGFORS. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, N^os^ 16-17, avril 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 9, mars 1873. — In-8°.

Verhandlungen.... Actes de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de PRESBOURG. Nouvelle Série, fasc. 1, année 1869-70. — In-8°.

Catalog I.... Catalogue I de la Bibliothèque de la Société d'Histoire naturelle de PRESBOURG, 1871. — In-8°.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. T. V, septembre 1872. ROME. — In-4°.

Schriften.... Publications de la Société pour la propagation des Sciences naturelles, à VIENNE. T. II-VI (1861-66), IX-X (1868-70), XII (1871-72). — 8 vol. in-12.

Séance du 29 mai. — M. BAYSSELLANCE ajoute quelques mots à la communication qu'il a faite à la dernière séance. D'après M. Genreau, au moment de la période glaciaire, les eaux, retenues par la moraine terminale qui barrait chaque vallée, en ont rongé le sommet jusqu'à ce qu'elles se soient frayé une voie, en la coupant au point de moindre résistance; elles ont donc dû former, pendant quelque temps, un lac remplissant toute la vallée.

Une remarque, faite par M. Genreau, tend à prouver l'exactitude de cette hypothèse : dans la vallée de la Nive, au-dessous de Cambo, se trouve une moraine qui force la rivière à dévier de sa direction pour passer par la tranchée creusée par les eaux au point où le barrage était le plus faible. Il a dû exister là un lac à la fin de l'époque glaciaire. Or, le village situé au fond de la vallée s'appelle Itsatsou, nom qui, en langue basque, signifie « petite mer »; la race basque aurait donc été témoin de l'existence de ce lac.

M. Frossard, dans son *Étude sur la vallée de Gavarnie,* indique

la ressemblance que présente la Prade, à l'entrée du cirque, avec un ancien lac. Un barrage de roches coupe la vallée, et en amont, une prairie complètement plate s'étend sur un très grand espace. Cette opinion, de l'existence en ce point d'un ancien lac, était tellement répandue, qu'on a conçu l'idée de rétablir ce lac. Mais, dès qu'on entreprit une étude sérieuse, on reconnut que ce fond plat était loin d'être horizontal, et pour créer le lac il eût fallu ou élever un énorme barrage factice, ou creuser profondément le sol à peu de distance du barrage naturel. Ce fait vient à l'appui de l'idée émise par M. Bayssellance, que les nivellements des fonds de vallée, dans la montagne, doivent être attribués, non au séjour de lacs disparus, mais au mouvement des glaciers.

— M. Bayssellance entretient la Société d'essais faits, en ce moment, à bord des bateaux de poste d'Arcachon et à bord de la *Sonora,* paquebot de la Compagnie Transatlantique. C'est une modification imaginée par M. Chodzko, et qui produirait une grande économie de combustible. La partie postérieure de la grille, sur environ le quart de sa longueur, est abaissée d'une trentaine de centimètres et forme un petit foyer séparé, ayant sa porte et son cendrier au-dessous de la grille principale. Il est alimenté uniquement par le menu charbon provenant de cette grille. On passe de temps en temps un ringard en forme de spatule à talon qui enlève la crasse et le même charbon et les refoule dans le petit foyer; le charbon supérieur se trouve en même temps reporté en arrière, et on recharge sur le devant.

Une voûte de briques faites en forme de voussoir force le courant de flamme à descendre sur le petit foyer où la combustion s'opère à haute température; les escarbilles y sont complètement brûlées. Les gaz provenant du charbon frais s'oxydent aussi complètement; en sorte que l'on obtient une fumivorité remarquable, en même temps qu'une économie notable. L'intervalle entre les barreaux n'étant sur les deux grilles que de 7 millimètres, il ne tombe à peu près que des cendres.

Sur les bateaux de pêche, l'économie réalisée s'élève au-delà de 30 pour 0/0; sur la *Sonora,* pour une moitié seulement des foyers transformés, elle s'élève à 12 p. 0/0. Des expériences précises vont être entreprises pour arriver à mesurer la consommation de charbon par cheval développé. Dès à présent, on doit reconnaître que la modification, indiquée par M. Chodsko, promet une économie certaine, en même temps qu'une plus grande facilité pour la conduite des feux et une conservation plus longue des parties de la chaudière les plus exposées aux coups de feu.

— M. BAUDRIMONT demande si ce fourneau ne faciliterait point en même temps la fumivorité.

— M. BAYSSELLANCE répond qu'effectivement le fourneau dont il a donné description, diminue considérablement la perte de la fumée; mais, néanmoins, ne le fait pas d'une manière complète.

— M. BAUDRIMONT ajoute qu'il serait éminemment désirable que ce problème fût résolu complètement; car c'est une honte pour notre époque de donner naissance à un produit nuisible à divers points de vue, et qui, en même temps, entraîne une perte considérable de combustible.

— Publications reçues :

Monatsbericht... Compte rendu mensuel de l'Académie Royale des Sciences de BERLIN. Janvier 1873. — In-8°.

Académie nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux. Compte rendu des séances. Janvier-mars 1873. — In-8°.

Le Bordeaux médical. 2e année, nos 18-21, mai 1873. BORDEAUX. — In-4°.

Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de BORDEAUX. 13e année, avril 1873. — In-8°.

Memoirs of the BOSTON *Society of Natural History.* T. II, 1re part., nos 2-3; 2e part., n° 1. 1871-72. — In-4°.

Proceedings of the BOSTON *Society of Natural History.* T. XIII, p. 369 *ad finem,* 1869-1871. — T. XIV, p. 1-224, 1871-1872. — In-8°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. T. VIII, p. 137-408. BOSTON et CAMBRIDGE. — Gr. in-8°.

Rivista scientifico-industriale. T. V, mai 1873. FLORENCE. — Gr. in-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, nos 18-19, mai 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 10, mai 1873. — In-8°.

Journal de Physique théorique et appliquée. N° 17, mai 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of PHILADELPHIA. 1871, fasc. 1-3. — In-8°.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at PHILADELPHIA. N° 88, t. XII, 1872. — In-8°.

Il Nuovo Cimento. 2e série, t. IX, mars 1873. PISE. — In-8°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XXVI, séance 4. 1873. ROME. — In-8°.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. T. XXV, séances 1-3, 7. ROME. 1871-1872. — 3 fasc. Gr. in-4°.

Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. T. V, octobre 1872. ROME. — In-4°.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de TOULOUSE. 6e année, 1871-72 (fin). — In-8°.

Vierteljahrsschrift... Bulletin trimestriel de la Société des Naturalistes de ZURICH. Années XII-XIX, 1867-1869. — In-8°.

BAYSSELLANCE (A.) : *Excursions dans la vallée d'Ossau*. PARIS, 1869. — Broch. gr. in-8°.

Séance du 12 juin. — M. DE LACOLONGE regrette d'avoir été absent de Bordeaux lors de l'intéressante communication de M. Bayssellance sur le système de foyer de M. Chodsko.

L'emploi de voûtes ou autels, en briques, dans la boîte à feu des générateurs de vapeur, le fonctionnement par étages de leurs grilles, le chargement en charbon neuf près de la portière, dont on l'éloigne ensuite quand il est incandescent, sont des moyens bien connus d'arriver à la fumivorité, en tant qu'on peut l'atteindre.

— M. BAUDRIMONT observe que la grille de M. Chodsko a surtout pour but de brûler les escarbilles qui, avec les barres de grille ordinaire, tombent improductives dans le cendrier, ce qui entraîne une perte considérable de combustible.

— M. DE LACOLONGE répond qu'à l'audition du procès-verbal, il n'avait pas bien saisi le but de la disposition décrite par son honorable collègue; qu'en prenant la question à ce point de vue, il appuie sur ce fait que les moyens dont il s'agit sont les moyens, bien connus, en usage pour établir la fumivorité; que d'après des expériences très concluantes, faites par la Société industrielle de Mulhouse, on n'arrive à la fumivorité que par un excès de dépense en charbon, qui atteint 5 ou 6 pour 100, parce qu'on ne l'obtient que par l'introduction, dans le foyer, d'un excès d'air frais.

M. de Lacolonge pense donc que l'économie de 8 pour 100 de combustible, constatée par M. Bayssellance, sera difficilement dépassée.

Il ajoute que souvent, et particulièrement avec les cendriers où l'on entretient un blanc d'eau pour des motifs spéciaux, les escarbilles ne se perdent pas : les chauffeurs en font une espèce de pâte qu'ils remettent au feu, pratique analogue à celle des forgerons, qui, près du contre-cœur de leur âtre, mouillent le charbon en lançant le vent.

Le nom de M. Chodsko n'est pas nouveau pour M. de Lacolonge. Des souvenirs, assez vagues pour le moment, lui font croire qu'il a

déjà eu connaissance des travaux de cet ingénieur. Si M. Bayssellance pouvait se procurer la date du brevet en question, il ne lui serait pas difficile de trouver, dans les publications spéciales, des renseignements sur les résultats précédemment obtenus.

Une maison de Bordeaux, celle de MM. Bourgès et Troye à La Bastide, spéciale pour le commerce et le travail mécanique du bois, est parvenue à alimenter son générateur uniquement avec les copeaux et rubans du bois mis en œuvre. La fumivorité est très satisfaisante. La machine à vapeur est du système Woolff et donne trente chevaux en marche ordinaire; à pleine pression, elle en fournit soixante. Les copeaux sont introduits d'une façon constante et régulière par un appareil automatique, conduit par une courroie montée par la transmission générale de l'établissement. Cet appareil est très simple et extrêmement facile à surveiller.

M. de Lacolonge pense que cette ingénieuse machine, ainsi que ses effets, mérite l'attention de la Société.

— M. Baudrimont donne lecture des observations suivantes, relatives à une publication de M. Raulin : *Origine des apatites de la région du Lot.*

« Dans le *Bulletin hebdomadaire de l'Association scientifique* du 25 mai dernier, page 157, on trouve une note de notre honorable collègue, M. Raulin, qui combat l'opinion de M. Delfortrie et celle que j'ai émise sur l'origine du phosphate de la région du Lot, que j'ai considérée comme le résultat de l'altération de guanos comparables à ceux que l'on trouve sur les côtes et sur les îles de l'Océan Pacifique.

» Je tiens à faire remarquer que les arguments invoqués par M. Raulin sont plus favorables à ma manière de voir qu'à celle qu'il a soutenue.

» Non seulement j'ai émis l'opinion que ces phosphates pouvaient avoir des guanos pour origine, mais je rappelle que j'ai présenté à la Société des concrétions trouvées, en 1867, dans du guano de Bolivie, concrétions qui ressemblaient tellement à des apatites du Lot, qu'il est fort difficile de les en distinguer.

» M. Raulin cite M. Élie de Beaumont qui, dès 1857, a exposé des notions relatives à l'existence des phosphates dans le sol arable, où ils se trouvent disséminés en quantités très minimes. Ces considérations sont connues des agronomes, et, pour ma part, je les enseigne depuis plus de vingt ans. Ces phosphates échappent à l'analyse chimique quand on opère sur de trop petites quantités de matière; mais on en reconnaît facilement la présence dans la terre arable et dans la plupart des eaux, ainsi que M. P. de Gas-

parin et moi nous nous sommes efforcés de le démontrer expérimentalement.

» C'est la non-existence de couches de phosphates dans les terrains stratifiés, c'est la rareté de ces produits qui m'a conduit à penser qu'ils avaient dû être recueillis successivement par les végétaux d'abord, les herbivores ensuite, et finalement par les carnivores, qui les ont déposés sous forme d'excréments auxquels on a donné le nom de *guano*, nom qui est tiré du quichua ou de l'ancienne langue péruvienne, dans laquelle il avait la même valeur que le mot *excrément* dans la nôtre.

» A ce point de vue, l'opinion que j'ai émise diffère à peine de celle de M. Élie de Beaumont, telle qu'elle a été rapportée par M. Raulin, opinion qui est d'ailleurs antérieure à la découverte des apatites de la région du Lot, et ne peut y être appliquée que d'une manière indirecte.

« La présence des minéraux phosphatés dans les roches cristal-
» lines anciennes et dans les roches éruptives subséquentes, fait
» concevoir que l'acide phosphorique a dû se trouver disséminé,
» en général, dans les dépôts sédimentaires, et explique comment
» il s'est rencontré dans les matières meubles superficielles, où
» ont crû les premiers végétaux, qui l'ont fourni ensuite aux ani-
» maux. Les uns et les autres, en se décomposant après la mort,
» l'ont laissé dans la terre végétale et dans les dépôts meubles
» superficiels, où il retourne sans cesse après avoir joué son rôle
» dans le règne organique. »

» Cette opinion de l'illustre savant que je viens de citer est presque conforme à celle que jai émise et ne peut, par conséquent, être invoquée pour en démontrer l'impossibilité.

» La seule différence existant entre l'opinion de M. de Beaumont et la mienne, est que ce savant n'admet la restitution des phosphates au sol arable qu'après la mort des individus, tandis que je la fais principalement dériver des excréments de ces derniers, ce qui fait qu'ils doivent y être en quantité beaucoup plus considérable.

» En effet, si les herbivores consomment par jour au moins la soixantième partie de leur poids d'aliments, si leurs excréments contiennent un demi-centième d'acide phosphorique, on peut admettre que la matière qui les forme se renouvelle plusieurs fois pendant le cours de leur vie.

» Les animaux peuvent donc, par la réunion de leurs excréments, donner naissance à un produit riche en phosphate, produit auquel on a donné le nom de guano.

» Quant à l'opinion émise par M. Daubrée, que « les accumula-» tions de phosphore ont été produites en dehors de toute inter-» vention de l'organisme animal, » elle ne me paraît appuyée sur rien de positif, au moins sur aucun fait bien fondé qui soit contraire à l'opinion que j'ai émise; car les excréments, le guano, en un mot, peuvent exister en dehors des animaux qui les produisent.

» En effet, les masses immenses de guano qui ont été extraites des îles Chinchas ne renfermaient en général aucune trace d'ossements fossiles qui auraient pu signaler les espèces animales qui auraient concouru à le produire.

» Enfin, pour ce qui concerne l'origine des phosphates calcaires de la région du Lot, j'avoue que, quelles que soient les recherches que j'aie pu faire, je ne puis leur attribuer une autre provenance que celle que j'ai indiquée, à moins de les faire sortir de lieux inférieurs aux terrains primitifs connus. Les phosphates disséminés dans les couches supérieures du globe ont été recueillis par les végétaux. Ces derniers les ont transmis aux animaux qui les ont concentrés dans leurs excréments, dont les amas représentent les guanos, et c'est de ces derniers produits que dérivent les phosphates dont il est ici question.

» C'est là ce qui me paraît le plus conforme avec les faits; aucune des opinions émises jusqu'à ce jour, en dehors de celle que j'ai signalée, ne me paraît avoir pour elle des probabilités qui permettent de l'admettre. »

— Répondant à M. Raulin, qui assigne l'âge miocène à la formation des phosphates de chaux du Lot, M. Delfortrie fait observer que l'opinion qu'il a déjà émise à ce sujet, et d'après laquelle cette formation ne remonterait qu'à l'époque quaternaire, se trouve aujourd'hui pleinement confirmée par la présence du cheval, associé dans ces dépôts aux Palæothériens et aux Anthracothériens; si anomale que soit cette association, le fait n'en existe pas moins, dit M. Delfortrie, et prouve sans conteste que les eaux diluviennes, roulant sur leur passage les débris miocènes et quaternaires, ont entraîné le tout dans les crevasses servant d'antres aux chauve-souris; et que ce n'est qu'après ce remplissage que le phosphate s'est formé.

Pourquoi donc se refuserait-on à croire à l'existence de dépôts de cette nature? ajoute M. Delfortrie; les riches et nombreux gisements de Pikermi, si savamment étudiés par M. Albert Gaudry, ne sont-ils pas eux-mêmes de formation quaternaire, quoique ne renfermant que des débris miocènes?

— En terminant sa communication, M. DELFORTRIE informe la Société qu'il vient de faire dans ces phosphates une découverte qui est un véritable événement en Paléontologie, et qui consiste en un crâne, parfaitement conservé, d'un maki ou lémurien, dit aussi singe de Madagascar, dont, jusqu'ici, on n'avait rencontré aucun débris fossile.

— M. RATHEAU commence la lecture d'un travail sur la dynamite et la nitro-glycérine.

— Publications reçues :

Jahrbuch.... Annuaire des progrès des Mathématiques, publié par C. OHRTMANN, F. MÜLLER et A. WANGERIN. T. II, 3e liv., année 1869-1870. BERLIN, 1873. — In-8°.

Le Bordeaux médical. T. II, nos 22-23. BORDEAUX, 1873. — In-4°.

Société des Sciences naturelles et historiques, des Lettres et des Beaux-Arts de CANNES *et de l'arrondissement de* GRASSE. T. III, n° 2, 1873. — Gr. in-8°.

Proceedings of the Royal Society of EDINBURGH. Vol. VII. Session 1871-72. — In-8°.

Transactions of the Royal Society of EDINBURGH. Vol. XXVI, Part. IV, Session 1871-72. — In-4°.

Matematitchesky.... Journal de Mathématiques, publié par la Société Mathématique de Moscou. T. VI, fasc. 3, 1873. — Gr. in-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, nos 20-21, mai 1863. PARIS. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 11, 1873. — In-8°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. IV, juin 1873. Paris. — Gr. in-8°.

Ministère de l'Instruction publique. — *Comité des Travaux historiques et des Sociétés savantes.* Liste des membres du Comité. Instructions. Liste des Sociétés savantes des départements. PARIS, 1873. — Broch. in-8°.

Verhandlungen.... Actes de la Société Physico-Médicale de WURZBOURG. Nouvelle Série, T. III, fasc. 4. 1872. — In-8°.

Séance du 26 Juin 1873. — M. RAULIN lit quelques passages d'une note de M. Trutat relative au gisement des phosphates du Lot, qui confirment l'opinion qu'il a déjà émise sur l'âge de ces dépôts.

— M. DELFORTRIE, après cette lecture, fait observer que, suivant M. Trutat, le dépôt en question ne serait pas phosphaté.

M. Raulin, au contraire, constate dans une note la présence des phosphates. M. Delfortrie demande à M. Raulin comment la couche supérieure à la couche phosphatée peut contenir des fragments détachés de celle-ci.

— M. RAULIN répond qu'il en est de ces débris comme des calcaires fragmentés qu'on trouve dans les argiles des plateaux, supérieures aux assises calcaires d'où ces fragments proviennent.

— M. RATHEAU continue sa communication sur la dynamite.

— Publications reçues.

Le Bordeaux médical. T. II, nos 24-25; 1873. BORDEAUX. — In-4°.

Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de BORDEAUX. Années III-XI, 1862-1871; année XII, novembre-décembre 1872; année XIII, mai 1873. — In-8°.

Société Entomologique de Belgique. N° 87. Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 7 juin 1873. BRUXELLES. — In-8°.

Berichte. .. Bulletins des Actes de la Société des Naturalistes de FRIBOURG-EN-BRISGAU. T. VI, fasc. 1; 1873. — In-8°.

Izviélia.... Nouvelles et Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de KAZAN. T. IV, 1869 (fasc. V.-VI); T. V, 1870. — *Outchonyia....* Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de KAZAN. T. VI, 1871. — 13 fasc. Gr. in-8°.

Schriften.... Mémoires de la Société Royale de Physique et d'Économie de KÖNIGSBERG. Années XII, 1872, et XIII (1re partie), 1873. — In-4°.

Mémoires de la Société Royale des Sciences de LIÉGE. 2e série, t. III, 1873. — In-8°.

Industrial and Technological Museum, Melbourne. Lectures delivered in the Lecture Room of the Museum, during the second Session of 1871. MELBOURNE, 1872. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, nos 22, 23; juin 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XIX, n° 12, juin 1873. — In-8°.

Abhandlungen.... Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême, à PRAGUE. VIe Série, t. IV et V, 1870-1871. — In-4°.

Sitzungsberichte.... Comptes rendus des séances de la Société Royale des Sciences de Bohême, à PRAGUE. Années 1870, 1871 et 1872 (1er semestre). — In-8°.

Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de SAINT-PÉTERSBOURG. T. XVII, 1872; t. XVIII (nos 1-2), 1873. — Gr. in-4°.

Trondy.... Travaux du Jardin Impérial de Botanique de SAINT-PÉTERSBOURG. T. I, fasc. 2; t. II, fasc. 1. 1872-1873. — Gr. in-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXVII, nos 3-4, mars-avril 1873. VALENCIENNES. — In-8°.

DARBOUX (G.) : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires.* (Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.*) PARIS (BORDEAUX), 1873. — 1 vol. Gr. in-8°.

MÉRAY (CH.) *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale.* PARIS, 1872. — 1 vol. in-8°.

Séance du 10 juillet. — M. RATHEAU termine la lecture de son Mémoire sur la dynamite (Voir le tome IX des *Mémoires*), et dit quelques mots d'une visite qu'il a faite récemment au camp de Saint-Médard.

— M. HOÜEL commence la lecture d'une Note de M. DE TILLY, capitaine d'artillerie et professeur à l'École Militaire de Bruxelles, sur deux publications récentes de MM. le général MAYEVSKI et DE SAINT-ROBERT sur la Balistique.

— Publications reçues :

Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel. Nos 10-12, avril-juin 1873. AMIENS. — In-8°.

Physikalische.... Mémoires de Physique de l'Académie Royale des Sciences de BERLIN. Année 1870. — In-4°.

Monatsbericht.... Compte rendu mensuel de l'Académie Royale des Sciences de BERLIN. Février 1873 (N° 1). — In-8°.

Le Bordeaux médical. 2e Année, n° 26, 1873. BORDEAUX. — In-4°.

Rivista scientifico-industriale, compilata da G. Vimercati. 5e Année, juin 1873. FLORENCE. — In-8°.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de GENÈVE. T. XXII, 1873. — In-4°.

Proceedings of the Philosophical Society of GLASGOW. 1872-73. T. VIII, n° 2. — In-8°.

Proceedings of the LONDON *Mathematical Society.* Nos 54-55. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, nos 24-25, juin 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletins de la Société d'Anthropologie de PARIS. IIe Série, t. VIII, fasc. 1; 1873. — In-8°

Bulletin de la Societé Chimique de PARIS. T. XX, n° 1, juillet 1873. — In-8°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. V, juillet 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Journal de physique théorique et appliquée. N° 18, juin 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. T. V, novembre 1872. ROME. — In-4°.

Société d'Histoire naturelle de TOULOUSE. *La Rage au point de vue physiologique, par le Colonel* E. BELLEVILLE. 1873. — In-8°.

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. 4e Série, t. 2, fasc. 5-6. VENISE, 1873. — In-8°.

Schriften.... Publications de la Société pour la diffusion des Sciences naturelles, à VIENNE. T. XI, 1870-71. — In-18.

Verhandlungen.... Actes de la Société physico-médicale de WURZBOURG. Nouvelle série, t. III, fasc. 3; 1872. — In-8°.

BATTAGLINI (G.) : *Nota sul Rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle Coniche.* ROME, 1873. — In-4°.

Séance du 24 juillet. — M. DE TILLY, capitaine d'artillerie et professeur à l'École Militaire de Bruxelles, est élu membre honoraire de la Société des Sciences physiques et naturelles.

— M. HOÜEL termine la lecture du travail de M. DE TILLY sur la Balistique. (Voir les *Mémoires*, t. IX)

— M. ABRIA donne lecture d'un Mémoire de M. BOURGET, membre correspondant, intitulé : *Théorie mathématique des Expériences acoustiques de Kundt.* (Voir les *Mémoires*, t. IX.)

— M. RAULIN propose pour l'impression dans le recueil de la Société deux travaux anciens de feu L. Cordier, professeur de géologie au Muséum d'histoire naturelle de Paris. Il se croit certain d'obtenir l'assentiment de la famille Cordier, dans le cas où sa proposition serait agréée par la Société.

Le premier est une classification minéralogique résumant les études faites pendant soixante ans par ce savant minéralogiste; elle a été relevée sur sa collection après son décès par M. Raulin lui-même. Elle pourrait être précédée de quelques pages d'introduction, extraites de divers Mémoires de minéralogie, publiés par L. Cordier avant 1830.

Le second est une carte géologique de la moitié orientale du plateau central de la France, dressée en 1808. Cette carte, de 40 centimètres de côté environ, qui était le premier essai de carte géologique d'une partie de la France, a été gravée à cette époque par un des premiers graveurs de Paris, Ambroise Tardieu. Elle est accompagnée d'une planche de coupes et d'un texte comprenant des généralités d'abord et des descriptions locales ensuite. Si la Société faisait tirer et colorier ces deux planches, elle

publierait un document intéressant et important pour l'histoire de la géologie de la France. Quant au texte, il y aurait évidemment lieu de le restreindre aux vues générales sur la région; car des études plus détaillées et bien plus complètes ont été publiées à diverses reprises sur les régions centrales de la France.

La Société accueille avec intérêt ces propositions. Pour la première, elle est d'avis de ne pas reproduire textuellement tous les extraits imprimés il y a cinquante ou soixante ans. Pour la seconde, M. Raulin est chargé de préparer, à Paris, le devis de la dépense afférente aux deux planches.

— Publications reçues :

Verhandlungen... Actes de la Société des Naturalistes de BALE. T. V, 4e fasc., 1873. — In-8°.

Verhandlungen... Actes de la Société de Géographie de BERLIN. 1873, n° 4. — In-8°.

Le Bordeaux médical. 2e année, nos 27-29, 1873. BORDEAUX. — In-4°.

Société Entomologique de Belgique. N° 88. Compte rendu de l'Assemblée du 5 juillet 1873. BRUXELLES. — In-8°.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de DIJON. 2e série, t. XIV-XVI, 1866-1870. — In-8°.

Atti della Società Italiana di Scienze naturali. T. XIV, fasc. III IV; t. XV, fasc. I-II. MILAN, 1871-1872. — In-8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, n° 26; t. LXXVII, nos 1-2; juin-juillet 1873. PARIS. — In-4°.

Bulletin de la Société Chimique de PARIS. T. XX, n° 2, juillet 1873. — In-8°.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. T. V, août 1873. PARIS. — Gr. in-8°.

Il Nuovo Cimento. 2e série, t. IX, avril-juin 1873. PISE. — In-8°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XXVI, 5e séance, avril 1873. ROME. — In-4°.

SUR UNE CLASSE REMARQUABLE

DE COURBES ET DE SURFACES ALGÉBRIQUES

ET SUR

LA THÉORIE DES IMAGINAIRES

PAR M. G. DARBOUX

TROISIÈME PARTIE.

Etude de certaines propriétés des imaginaires en géométrie, et d'une classe générale de courbes algébriques, comprenant comme cas particulier la courbe de Cassini.

27.

Des points associés dans le plan.

Soient, dans un plan, des points rapportés à des coordonnées rectangulaires. La distance d'un point (x, y) à un point fixe du plan s'exprime par la formule

$$\delta^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

qu'on peut écrire

$$\delta^2 = (x+yi-a-bi)(x-yi-a+bi).$$

On voit donc que le carré de la distance se décompose en deux facteurs, et l'on est ainsi conduit à un système de coordonnées *symétriques* fréquemment employé.

Substituons aux quantités x, y les coordonnées u, v, définies par les formules

$$u = x + yi, \quad v = x - yi. \tag{35}$$

Si l'on pose, de même,

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = a - bi,$$

on obtient

$$\delta^2 = (u-\alpha)(v-\beta). \tag{36}$$

Cela posé, soient deux points P, Q; par ces deux points menons des droites aux points à l'infini sur le cercle; ces

droites se rencontrent en deux nouveaux points P', Q'. Nous dirons que ces nouveaux points sont *associés* aux premiers. Réciproquement, P, Q sont associés à P', Q'. Si les points P, Q sont réels, les points P', Q' sont imaginaires conjugués, et inversement. On peut dire que deux couples de points associés sont deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère, dont les deux autres sommets opposés sont les deux points I et J à l'infini sur le cercle.

Soient

$u=\alpha$, $v=\beta$ les coordonnées du point P;
$u=\alpha'$, $v=\beta'$ celles du point Q.

Les coordonnées des points associés seront, par exemple,

pour le point P', $u=\alpha$, $v=\beta'$;
pour le point Q', $u=\alpha'$, $v=\beta$.

Considérons un point quelconque M du plan. On aura les formules suivantes

$$MP^2=(u-\alpha)(v-\beta), \quad MQ^2=(u-\alpha')(v-\beta'),$$
$$MP'^2=(u-\alpha)(v-\beta'), \quad MQ'^2=(u-\alpha')(v-\beta).$$

On déduit d'abord de ces formules

$$MP\,.\,MQ=MP'\,.\,MQ'. \tag{37}$$

Donc *le produit des distances d'un point quelconque du plan à deux points fixes est égal au produit des distances du même point aux deux points associés.*

On peut déduire de nouvelles relations de la signification géométrique des facteurs $u-\alpha$, $v-\beta$. Soit ω l'angle que fait MP avec l'axe des x; on a

$$x-a=MP\,.\cos\omega, \quad y-b=MP\,.\sin\omega,$$

et par suite

$$u-\alpha=MP\,.\,e^{\omega i}, \quad v-\beta=MP\,.\,e^{-\omega i}, \tag{38}$$

d'où

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta}=e^{2\omega i}\,. \tag{39}$$

L'angle PMQ, sous lequel on voit le segment PQ, est évidemment égal à la différence des angles ω, ω', que font les droites MP, MQ avec l'axe des x. On a donc

$$e^{2i\widehat{(PMQ)}} = e^{2i(\omega-\omega')} = \frac{u-\alpha}{v-\beta} : \frac{u-\alpha'}{v-\beta'} = \frac{(u-\alpha)(v-\beta')}{(u-\alpha')(v-\beta)} = \left(\frac{MP'}{MQ'}\right)^2,$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$e^{i\widehat{(PMQ)}} = \frac{MP'}{MQ'}. \tag{40}$$

De même,

$$e^{i\widehat{(P'MQ')}} = \frac{MP}{MQ}.$$

Donc *le rapport des distances d'un point* M *du plan à deux points est égal à* e^{iV}, V *désignant l'angle sous lequel on voit du même point le segment formé par les points associés.*

Cette proposition est importante (1); elle permet, quand deux points sont imaginaires conjugués, de remplacer les éléments imaginaires relatifs à ces deux points par des fonctions d'éléments réels, correspondants aux points associés.

Nous allons donner deux applications. Prenons d'abord deux points fixes A, B sur un cercle. On sait que l'angle sous lequel on voit d'un point du cercle le segment AB est constant. Donc le rapport des distances du même point aux deux points A', B', associés à A et à B, est aussi constant. Si les points A et B

(1) Cette proposition se déduit, comme on voit, très simplement de l'équation

$$e^{2iV} = \frac{u-\alpha}{v-\beta} : \frac{u-\alpha'}{v-\beta'},$$

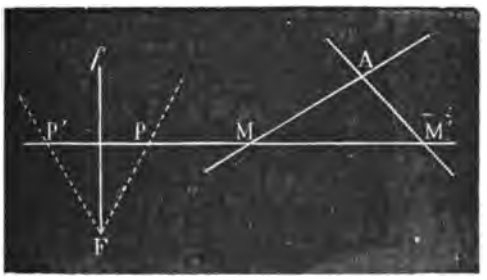
et cette dernière équation exprime que l'angle de deux droites MA, MB multiplié par $2i$, est le logarithme du rapport anharmonique des quatre droites MA, MB, MI, MJ. Ce fait remarquable, contenu implicitement dans une formule du *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles, a été pour la première fois énoncé d'une manière explicite par M. Laguerre (*Nouvelles Annales de Mathématiques* 1853, p. 57), et appliqué par ce géomètre à une question importante, la transformation des relations contenant des angles dans l'homographie. On pourra consulter à ce sujet le *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, de M. Chasles, p. 313.

deviennent imaginaires, A′, B′ deviennent réels, et on retrouve une propriété connue du cercle. Mais nous allons traiter un exemple moins simple.

On sait la difficulté qu'ont rencontrée les auteurs de Traités de sections coniques dans l'étude des propriétés focales des courbes du second degré. Il est difficile, quand on prend pour point de départ les beaux théorèmes généraux relatifs aux sections coniques, de rattacher à ces propositions générales, d'une manière directe, la démonstration des propriétés métriques focales. Les remarques précédentes permettent, il nous semble, de lever simplement cette difficulté.

Nous nous appuierons seulement sur un des deux théorèmes généraux que M. Chasles a pris pour base de sa ***Théorie des sections coniques***. Le rapport anharmonique des quatre points où une tangente mobile rencontre quatre tangentes fixes est constant.

Prenons deux tangentes quelconques se coupant en A, et deux autres tangentes imaginaires passant par les deux points



à l'infini sur le cercle, et se coupant en un point réel F, qui, d'après la définition générale, sera un foyer. Soit une tangente mobile MM′PP′. Elle coupe les deux tangentes imaginaires en deux points imaginaires P, P′ représentés pour plus de clarté sur la figure, et ayant *pour associés le foyer* F *et son symétrique f par rapport à la tangente*. Écrivons que le rapport anharmonique des quatre points M, M′, P, P′ est constant; nous aurons

$$\frac{MP}{MP'} : \frac{M'P}{M'P'} = K.$$

Or, d'après la formule (40), les deux rapports qui figurent dans le premier membre peuvent s'exprimer en fonction des angles relatifs aux points associés. On a

$$\frac{PM}{MP'} = e^{i(\widehat{FMf})}, \quad \frac{PM'}{P'M'} = e^{i(\widehat{FM'f})},$$

et, par suite,

$$e^{i(\widehat{FMf} - \widehat{FM'f})} = K.$$

La différence des angles qui figurent dans le premier membre de cette formule est évidemment égale au double de l'angle sous lequel on voit du foyer le segment MM'.

Donc *la portion de tangente comprise entre deux tangentes fixes est vue de chaque foyer sous un angle constant.*

Supposons maintenant que les deux tangentes fixes soient menées du second foyer. Les points associés à M, M' seront le foyer F' et son symétrique f' par rapport à la tangente. L'angle MFM' s'exprimera, par la formule (40), en fonction du rapport des distances du foyer F aux deux points F', f'. Donc le rapport $\frac{Ff'}{FF'}$, et par suite Ff' restera constant. Ainsi, *le symétrique d'un foyer par rapport à la tangente décrit un cercle ayant pour centre l'autre foyer.*

Ces deux propositions peuvent évidemment constituer une base pour la théorie des foyers. On en déduit immédiatement les propriétés métriques focales.

Les points associés donnent lieu encore à des propriétés nombreuses. Par exemple, *les droites qui joignent un point* M *du plan à deux points* P, Q *ont mêmes bissectrices que les droites joignant le point* M *aux deux points associés* P', Q'. La différence

$$MP^2 + MQ^2 - MP'^2 - MQ'^2$$

est constante, quel que soit le point M, et par conséquent égale à PQ^2. On a

$$PQ^2 = -P'Q'^2, \quad (MP + MQ)^2 - (MP' + MQ')^2 = PQ^2.$$

Mais il nous paraît inutile de multiplier les énoncés.

28.

D'une classe générale de courbes.

On peut aussi déduire des principes précédents des propositions beaucoup plus générales, s'appliquant à une classe nombreuse de courbes de tous les degrés. Voici la définition de ces courbes, auxquelles nous allons étendre une des propriétés les plus importantes du cercle.

Soit une courbe telle que *le produit des distances de l'un quelconque de ses points à une série de pôles fixes soit dans un rapport constant avec le produit des distances du même point à une autre série de pôles fixes.*

Son équation sera

$$rr'r'' \ldots = k \cdot \mathrm{R}\,\mathrm{R}'\,\mathrm{R}'' \ldots ;$$

ou

$$\frac{(u-\alpha)(v-\beta)(u-\alpha')(v-\beta')\ldots}{(u-a)(v-b)(u-a')(v-b')\ldots} = k^2 .$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{(u-\alpha)(u-\alpha')\ldots}{k(u-a)(u-a')\ldots} = \frac{k(v-b)(v-b')\ldots}{(v-\beta)(v-\beta')\ldots} .$$

Elle est donc de la forme

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \frac{\psi_1(v)}{\varphi_1(v)} , \tag{41}$$

où φ, φ_1, ψ, ψ_1, désignent des polynômes imaginaires, conjugués deux à deux. Il est évident que, réciproquement, toute équation de la forme (41) représente une courbe jouissant de la propriété énoncée, et, pour avoir les deux séries de pôles contenus dans cette définition, il suffira de décomposer en facteurs les polynômes φ, ψ.

Or l'équation (41) peut s'écrire

$$\frac{\varphi(u)+\lambda\psi(u)}{\lambda'\varphi(u)+\psi(u)} = \frac{\psi_1(v)+\lambda\varphi_1(v)}{\lambda'\psi_1(v)+\varphi_1(v)} , \tag{42}$$

ou

$$[\varphi(u)+\lambda\psi(u)]\,[\varphi_1(v)+\lambda'\psi_1(v)]$$
$$=[\psi(u)+\lambda'\varphi(u)]\,[\psi_1(v)+\lambda\varphi_1(v)]\,.$$

La forme nouvelle de l'équation est identique à la première (41); mais les racines des polynômes ont changé. La définition de la courbe reste donc la même, *mais avec d'autres pôles.*

Donc, *si une courbe est telle que les produits des distances de l'un de ses points à deux séries de pôles fixes soient dans un rapport constant, cette propriété subsistera quand on remplacera les pôles fixes par une infinité de nouveaux systèmes de points convenablement choisis.*

Les deux nouvelles séries de pôles ne seront réelles, comme le montre l'équation précédente, que si λ et λ' sont imaginaires conjugués. Alors les pôles de la première série seront donnés par les équations

$$(43)\quad \Phi(u)=\varphi(u)+\lambda\psi(u)=0\,,\qquad \Phi_1(v)=\varphi_1(v)+\lambda'\psi_1(v)=0\,,$$

et ceux de la seconde par

$$(44)\quad \Psi(u)=\psi(u)+\lambda'\varphi(u)=0\,,\qquad \Psi_1(v)=\psi_1(v)+\lambda\varphi_1(v)=0\,.$$

Il y a plusieurs remarques à faire sur ces nouveaux pôles. D'abord les équations (43), (44) sont du même degré. Donc, alors même que les pôles primitifs ne seraient pas en même nombre dans les deux séries, les nouveaux pôles seront en nombre égal dans chaque série.

En second lieu, si l'un des pôles était multiple, le polynôme $\varphi(u)$ avait un facteur multiple; mais, dans les nouveaux systèmes, il n'en est plus ainsi, et les pôles multiples sont remplacés généralement par des pôles simples, en nombre égal au degré de multiplicité.

Enfin, on peut disposer de λ et de λ' de manière que *l'un des pôles soit en un point donné quelconque,* et les autres seront alors déterminés. Si nous exprimons, en effet, que les équations (43)

sont vérifiées par des valeurs données de u et de v, ces équations feront connaître λ et λ'.

Quand on aura choisi arbitrairement le premier pôle A_1, voici comment on trouvera tous les autres. Par A_1 on mènera des droites aux deux points I, J; ces droites coupent la courbe en deux groupes de n points, et on reliera d'une manière quelconque les points du premier groupe à ceux du second par n droites. Les n pôles de l'une des séries seront les symétriques de A_1 par rapport à ces n droites; et, en opérant comme précédemment sur l'un de ces n pôles, on trouvera de même A_1 et les $n-1$ pôles qui avec A_1 forment la série associée à la précédente.

La courbe la plus simple de la classe actuelle est le cercle, pour les points duquel le rapport des distances à deux pôles fixes est constant. La proposition énoncée plus haut est donc la généralisation d'une des propriétés fondamentales du cercle.

Mais il nous paraît digne d'intérêt qu'on puisse étendre à toutes nos courbes les propriétés relatives à l'angle inscrit dans le cercle, et de la manière suivante :

Donnons, dans la formule (42), à λ et à λ' des valeurs imaginaires, e^{hi}, e^{hi}, dont le module soit l'unité. Cette équation prendra la forme

$$\frac{\varphi(u)+e^{hi}\psi(u)}{\varphi_1(v)+e^{-hi}\psi_1(v)}=e^{(h+k)i}\frac{\varphi(u)+e^{-hi}\psi(u)}{\varphi_1(v)+e^{hi}\psi_1(v)}. \tag{45}$$

Les deux termes des deux fractions sont imaginaires conjugués. Donc, si nous les décomposons en facteurs, l'équation précédente deviendra

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta}\cdot\frac{u-\alpha'}{v-\beta'}\cdot\frac{u-\alpha''}{v-\beta''}\cdots=\frac{u-a}{v-b}\cdot\frac{u-a'}{v-b'}\cdot\frac{u-a''}{v-b''}\cdots,$$

où (α, β), (α', β'), ..., (a, b), ... sont imaginaires conjugués.

Soient A_i le point réel défini par les coordonnées α_i, β_i; B_i le point réel défini par a_i, b_i. Désignons par ω_i l'angle que fait avec l'axe des x le rayon qui va du point M (u, v) au point A_i;

par ω'_i le même angle pour le point B_i. On a, d'après une formule déjà rappelée (39),

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta}=e^{2i\omega}, \quad \frac{u-a}{v-b}=e^{2i\omega'}, \text{ etc.}$$

L'équation (45) prend donc la forme

$$\omega+\omega_1+\omega_2+\cdots-\omega'-\omega'_1-\omega'_2-\cdots=\text{constante},$$

ou

$$\omega-\omega'+\omega_1-\omega'_1+\omega_2-\omega'_2+\cdots=\text{constante}. \tag{46}$$

Sous cette forme, elle exprime que la somme des angles sous lesquels on voit d'un point de la courbe les segments rectilignes AB, A_1B_1, ..., A_iB_i, ... est constante.

Donc, *quand une courbe est telle que les produits des distances de l'un quelconque de ses points à deux séries de pôles fixes soient dans un rapport constant, on peut encore la considérer, et d'une infinité de manières, comme le lieu des points tels que la somme (ou la différence) des angles sous lesquels on voit d'un point de la courbe des segments fixes soit constante.*

On obtient ainsi la généralisation complète de la propriété de l'angle inscrit dans le cercle. Il y a quelques remarques à présenter sur les segments.

D'abord leurs extrémités sont sur la courbe; cela est évident d'après l'équation, et résulte aussi du théorème. Car, lorsque le point décrivant la courbe sera en un des points A par exemple, l'angle sous lequel on verra du point le segment AB sera indéterminé, et on pourra lui donner, en particulier, la valeur qui satisfait à l'équation (46).

On se rend compte d'ailleurs du résultat qui précède au moyen d'une proposition déjà énoncée. On sait, en effet, que l'angle V, sous lequel on voit un segment d'un point M, s'exprime en fonction des distances r, r' aux points associés du segment, par la formule

$$e^{iV}=\frac{r}{r'}.$$

On voit donc qu'*analytiquement* les deux définitions données

dans les énoncés précédents sont identiques. Mais l'une n'est employée que lorsque les éléments qui figurent dans l'autre deviennent imaginaires conjugués.

Les courbes précédentes ont des foyers, que nous allons déterminer. A cet effet, reprenons leur équation, qu'on peut écrire

$$\frac{\varphi(u)+\lambda\psi(u)}{\psi(u)+\lambda'\varphi(u)}=\frac{\psi_1(v)+\lambda\varphi_1(v)}{\varphi_1(v)+\lambda'\psi_1(v)}.$$

Les pôles de la première série correspondants à cette forme de l'équation, sont déterminés par les racines de l'équation

$$\varphi(u)+\lambda\psi(u)=0. \tag{47}$$

Disposons de λ de telle manière que cette équation ait une racine double, ce qui exige que l'on ait

$$\varphi'(u)+\lambda\psi'(u)=0,$$

ou

$$\varphi(u)\psi'(u)-\psi(u)\varphi'(u)=0.$$

Alors, toutes les droites données par les valeurs de v, racines de l'équation

$$\psi_1(v)+\lambda\varphi_1(v)=0,$$

seront tangentes à la courbe; car leurs intersections avec la courbe sont définies par l'équation (47), qui a une racine double. Les points réels situés sur ces droites seront donc les foyers. Nous ferons l'application de cette remarque en étudiant quelques courbes particulières.

Pour ces systèmes de pôles particuliers, l'équation des courbes prendrait la forme

$$R^1R'R''\cdots=k.rr'r''r''\cdots.$$

Il y a un pôle double dans la première série. Ceux de la seconde sont des foyers.

Enfin, il ne sera pas inutile de remarquer que les courbes étudiées dans cet article appartiennent à la classe de celles dont la définition ne change pas quand on les transforme par

rayons vecteurs réciproques. Si le pôle est dans le plan, cela est évident; car toute transformation par rayons vecteurs réciproques se ramène, comme on sait, dans le système de coordonnées symétriques, à effectuer une substitution de la forme

$$(48) \qquad u = \frac{\alpha v_1 + \alpha'}{\beta v_1 + \beta'}, \quad v = \frac{a u_1 + a'}{b u_1 + b'},$$

et une telle substitution ne change en aucune façon la forme des équations de nos courbes. Mais on peut donner aussi la démonstration suivante qui s'applique au cas où le pôle de transformation est en dehors du plan, et où nos courbes planes deviennent des courbes sphériques.

Étant donnés le pôle O et deux points A, M, dont les transformés sont a, m, on aura

$$\frac{AM}{OA} = \frac{am}{Om}, \quad AM = OA.\frac{am}{Om}.$$

Cette formule nous montre que la distance d'un point variable M à un point fixe A se reproduit multipliée par une constante et divisée par la distance du point m au pôle.

Donc toute équation homogène entre les distances, et en particulier l'équation

$$RR' \ldots = k.rr' \ldots,$$

où le nombre des facteurs est le même dans chaque membre, conservera la même forme après une transformation. Cependant, si le pôle de la transformation était placé en un des pôles de la courbe, A par exemple, le facteur R correspondant disparaîtrait, quel que fût son degré de multiplicité. Par exemple l'équation

$$RR' = k.r^2$$

représente une transformée par rayons vecteurs réciproques d'ellipse de Cassini, puisqu'on pourra faire disparaître le facteur r^2.

29.

Du système orthogonal formé avec les courbes précédentes.

Soient les deux systèmes de courbes représentés par les équations

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \alpha \cdot \frac{\psi_1(v)}{\varphi_1(v)}, \tag{49}$$

et

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = e^{\beta i} \cdot \frac{\varphi_1(v)}{\psi_1(v)}. \tag{50}$$

Lorsqu'on fait varier α, β, les équations précédentes représentent deux systèmes de courbes isothermes et orthogonales. Nour rappellerons d'abord en quelques mots la démonstration de ce théorème.

Les formules précédentes, si l'on prend les logarithmes des deux membres, rentrent dans le type

$$\Phi(u) + \Psi(v) = C, \quad \Phi(u) - \Psi(v) = C_1.$$

D'après cela, si l'on considère la courbe de chaque système passant par un point donné du plan, les tangentes à ces deux courbes seront données par des valeurs de $\frac{du}{dx}$ égales et de signes contraires. Or on a, en appelant V l'angle que fait la tangente avec l'axe des x,

$$\frac{du}{dv} = \frac{dx + i\,dy}{dx - i\,dy} = e^{2iV}.$$

En appelant V_1, V'_1 les angles pour nos deux courbes, on aura donc

$$e^{2iV_1} = -e^{2iV'_1}, \quad \text{ou} \quad V_1 - V'_1 = \pm\frac{\pi}{2},$$

ce qui démontre la proposition.

Ainsi, deux systèmes de courbes représentés par les deux équations du type

$$\Phi(u) + \Psi(v) = \alpha, \quad \Phi(u) - \Psi(v) = \beta, \tag{51}$$

Or, d'après la formule (40), les deux rapports qui figurent dans le premier membre peuvent s'exprimer en fonction des angles relatifs aux points associés. On a

$$\frac{PM}{MP'} = e^{i(\widehat{PMP'})}, \quad \frac{PM'}{P'M'} = e^{i(\widehat{PM'P'})},$$

et, par suite,

$$e^{i(\widehat{PMP'} - \widehat{PM'P'})} = K.$$

La différence des angles qui figurent dans le premier membre de cette formule est évidemment égale au double de l'angle sous lequel on voit du foyer le segment MM'.

Donc *la portion de tangente comprise entre deux tangentes fixes est vue de chaque foyer sous un angle constant.*

Supposons maintenant que les deux tangentes fixes soient menées du second foyer. Les points associés à M, M' seront le foyer F' et son symétrique f' par rapport à la tangente. L'angle MFM' s'exprimera, par la formule (40), en fonction du rapport des distances du foyer F aux deux points F', f'. Donc le rapport $\frac{Ff'}{FF'}$, et par suite Ff' restera constant. Ainsi, *le symétrique d'un foyer par rapport à la tangente décrit un cercle ayant pour centre l'autre foyer.*

Ces deux propositions peuvent évidemment constituer une base pour la théorie des foyers. On en déduit immédiatement les propriétés métriques focales.

Les points associés donnent lieu encore à des propriétés nombreuses. Par exemple, *les droites qui joignent un point* M *du plan à deux points* P, Q *ont mêmes bissectrices que les droites joignant le point* M *aux deux points associés* P', Q'. La différence

$$MP^2 + MQ^2 - MP'^2 - MQ'^2$$

est constante, quel que soit le point M, et par conséquent égale à PQ^2. On a

$$PQ^2 = -P'Q'^2, \quad (MP + MQ)^2 - (MP' + MQ')^2 = PQ^2.$$

Mais il nous paraît inutile de multiplier les énoncés.

30.

Des courbes lieux des points d'où l'on voit plusieurs segments sous des angles dont la somme est nulle.

L'équation

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f_1(v)}{\varphi_1(v)}, \tag{53}$$

où f, f_1, φ, φ_1 désignent des polynômes imaginaires conjugués, dont les premiers termes ont l'unité pour coefficient, est comprise comme cas particulier dans l'équation (45). Elle représente des courbes, de degré impair, qui se distinguent des courbes générales, en ce que la somme des angles sous lesquels on voit d'un point de la courbe plusieurs segments est égale à un multiple de π. L'équation peut en effet s'écrire

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta} : \frac{u-a}{v-b} \times \frac{u-\alpha'}{v-\beta'} : \frac{u-a'}{v-b'} \times \ldots = 1,$$

ou

$$V + V' + V' + \ldots = k\pi .$$

La même propriété subsiste avec d'autres segments; car on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\varphi(u) + \lambda' f(u)}{\varphi(u) + \lambda f(u)} = \frac{\varphi_1(v) + \lambda' f_1(v)}{\varphi_1(v) + \lambda f_1(v)},$$

absolument semblable à la forme (53); mais les segments servant à la définition de la courbe sont changés, et demeurent réels, si λ et λ' le sont. Donc,

Quand une courbe est le lieu des points tels qu'on voit de ces points plusieurs segments sous des angles dont la somme est un multiple de π, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments, ayant tous leurs extrémités sur la courbe.

Les courbes précédentes comprennent comme cas particulier celles qui sont définies par une équation de la forme

$$\sum \frac{\lambda_i}{R_i^3} = A, \tag{54}$$

où les quantités R_i désignent des distances à des pôles fixes, situés sur une droite. Si nous prenons cette droite pour axe des x, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\sum \frac{\lambda_i}{(u-a_i)(v-a_i)} = A ,$$

ou, en multipliant par $u-v$,

$$\sum \frac{\lambda_i}{u-a_i} + Au = \sum \frac{\lambda_i}{v-a_i} + kv , \tag{55}$$

ou enfin

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)} .$$

Mais nous n'insistons pas sur ce cas particulier, que nous aurons à considérer plus loin à un autre point de vue (voir art. 37).

31.

Des rapports entre la théorie générale des cycliques et celle des fonctions elliptiques.

L'étude détaillée de ces rapports nous entraînerait trop loin. Cependant nous allons indiquer rapidement comment la théorie générale des cycliques peut être rattachée aux fonctions elliptiques.

Soit l'équation différentielle

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{dv}{\sqrt{f_1(v)}} , \tag{56}$$

où $f(u)$, $f_1(v)$ désignent des polynômes imaginaires conjugués du 4e degré. En général, cette équation ne peut s'intégrer en termes finis. Mais, si la différentielle $\frac{du}{\sqrt{f(u)}}$ se déduit de $\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k\xi^2)}}$ par une substitution linéaire de la forme

$$u = \frac{a\xi + a'}{b\xi + b'}, \tag{57}$$

la différentielle $\frac{dv}{\sqrt{f_1(v)}}$ se déduira de même de $\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k\eta^2)}}$ par la substitution

$$v = \frac{\alpha\eta + \alpha'}{\beta\eta + \beta'}, \tag{58}$$

imaginaire conjuguée de la précédente, et l'équation différentielle (56) sera intégrable algébriquement. L'étude de cette intégrale nous avertit que la courbe qu'elle représente est une cyclique plane quelconque. Elle est en effet de la forme

$$Au^2v^2 + Buv^2 + B_1u^2v + Cu^2 + C_1v^2 + Duv + Eu + E_1v + F = 0.$$

D'ailleurs, l'équation différentielle (56) met en évidence les propriétés focales de la courbe.

En effet, soient

$$f(u) = A(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3)(u-a_4),$$
$$f_1(v) = B(v-b_1)(v-b_2)(v-b_3)(v-b_4).$$

La droite

$$u = a_i$$

coupera la courbe en un point pour lequel $\frac{du}{dv}$ est nul, d'après l'équation différentielle. Cette droite est donc tangente à la courbe. Il en est de même des droites

$$v = b_i.$$

La cyclique aura donc les 16 foyers définis par les équations

$$f(u) = 0, \qquad f_1(v) = 0.$$

Nous allons démontrer que ces foyers peuvent être placés 4 à 4 sur des cercles.

Les polynômes $f(u)$, $f_1(v)$ provenant d'un même polynôme par une substitution linéaire, leurs racines auront les mêmes rapports anharmoniques. Supposons par exemple que $0(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0(b_1, b_2, b_3, b_4)$. On aura

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3} : \frac{a_1-a_4}{a_2-a_4} = \frac{b_1-b_3}{b_2-b_3} : \frac{b_1-b_4}{b_2-b_4}.$$

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre foyers déterminés par les coordonnées $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)$. On a, d'après des formules que nous avons fréquemment employées,

$$\frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{A_1A_3}{A_2A_3} e^{i.\widehat{A_1A_3A_2}}, \quad \frac{a_1 - a_4}{a_2 - a_4} = \frac{A_1A_4}{A_2A_4} e^{i.\widehat{A_1A_4A_2}},$$

et de même pour les rapports figurant dans le second membre de l'équation, ce qui nous conduit, en substituant, à la formule

$$2(\widehat{A_1A_3A_2} - \widehat{A_1A_4A_2}) = 2k\pi.$$

Cette égalité exprime que le quadrilatère formé par les quatre points est inscriptible, et, par conséquent, que les quatre foyers sont sur un cercle.

Comme chaque valeur du rapport anharmonique répond à quatre dispositions différentes des éléments, on trouvera quatre cercles sur lesquels les 16 foyers seront rangés 4 à 4.

Enfin l'équation (56) conduit à une construction simple de la tangente aux cycliques, analogue à celle que l'on connaît pour les courbes du second degré. Car soient V, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ les angles que font avec l'axe des x la tangente au point M et les droites MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, qui joignent ce point aux quatre foyers; l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{A}{B} \cdot \frac{u - a_1}{v - b_1} \cdot \frac{u - a_2}{v - b_2} \cdot \frac{u - a_3}{v - b_3} \cdot \frac{u - a_4}{v - b_4}$$

conduit, en posant

$$\frac{A}{B} = e^{2iK},$$

à la relation

$$2V = 2K + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = M.\pi, \tag{59}$$

et cette relation donne pour l'angle V deux valeurs, différentes de $\frac{\pi}{2}$; par conséquent, les tangentes aux deux courbes passant en un point du plan sont perpendiculaires. Ainsi, *l'équation* (56) *est intégrée par le système des cycliques planes, homofocales et orthogonales.*

Pour construire simplement la formule (59), il suffira de connaître la constante K, et, pour cela, de placer d'abord le point M sur le cercle focal. Mais nous n'insistons pas sur ce point de détail. Remarquons aussi que les formules de substitution (57), (58), interprétées géométriquement, donnent la transformation par rayons vecteurs réciproques dans le plan. Nous retrouvons donc cette proposition : ***Toute cyclique plane est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une cyclique à deux axes de symétrie.***

Ces dernières cycliques ont été étudiées par M. Siebeck dans deux Mémoires importants (t. LVII et LIX du *Journal de Borchardt*). Les ovales de Descartes ont été considérées au même point de vue par l'auteur dans les *Annales de l'École Normale*. Signalons aussi des articles de M. Laguerre dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (1).

32.

De l'ellipse de Cassini.

On sait que l'équation de cette courbe, rapportée à ses axes de symétrie, est

$$(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)+b^4=0\,.$$

C'est donc une cyclique; c'est aussi ce qui résulte de l'équation focale

$$rr'=k\,,$$

et cette dernière équation va nous permettre d'énoncer les propriétés caractéristiques de l'ellipse de Cassini.

Proposons-nous d'abord le problème suivant, résolu d'une manière générale par M. de la Gournerie (2) : Étant donnée

---

(1) Sur les applications de la Géométrie au Calcul Intégral. *Bulletin de la Société Philomathique*, 1867, p. 81.

(2) *Journal de Liouville*, t. XIV, 2e série. Mémoire sur les lignes spiriques.

une cyclique plane, définie par la conique déférente (K) et par le cercle directeur (A), déterminer les foyers singuliers de cette cyclique.

Nous avons vu que les foyers singuliers sont les points réels, situés sur les asymptotes de la cyclique. Nous savons aussi qu'étant donné un des cercles orthogonaux au cercle (A) et ayant son centre en m sur la conique (K), pour avoir les points de la courbe, il faut abaisser du centre O de (A) une perpendiculaire sur la tangente en m. Les points d'intersection de cette perpendiculaire et du cercle appartiennent à la cyclique. L'un de ces points s'éloignera à l'infini dans le cas seulement où la tangente en M à la conique ira passer par un des points à l'infini sur le cercle, I par exemple. Alors la tangente à la cyclique sera la tangente au cercle, c'est-à-dire la tangente menée à la conique par le point I. On voit donc que les asymptotes de la cyclique seront les tangentes menées à la conique des deux points I et J; en d'autres termes, *les foyers singuliers de la cyclique seront les foyers ordinaires de la conique déférente.*

Cela posé, soit une ellipse de Cassini. Les points qu'on appelle d'ordinaire foyers de cette courbe, et qui donnent lieu lieu à l'équation

$$rr' = k,$$

seront à la fois des foyers ordinaires et des foyers singuliers. L'ellipse de Cassini s'obtiendra donc en prenant une conique déférente (K) à centre unique quelconque, et un cercle directeur concentrique à cette conique. D'ailleurs, comme les foyers de la conique (K) doivent aussi être foyers de la courbe, il faudra que le cercle (A) passe par les points de contact des tangentes menées à la conique de ses deux foyers. Cela nous conduit au mode suivant de génération :

On obtient la courbe de Cassini, en prenant une conique déférente quelconque (qui doit être une hyperbole, si la courbe est réelle), et pour cercle directeur le lieu des points

d'où l'on peut mener à la conique des tangentes rectangulaires.

Si l'hyperbole a son axe réel plus grand que l'axe imaginaire, la courbe est formée des deux ovales. Dans ce cas, les quatre foyers sont sur l'axe réel.

Si l'hyperbole a son axe imaginaire plus grand que l'axe réel, on obtient la courbe formée d'une seule branche. Deux des foyers réels sont sur l'axe imaginaire.

Enfin, si l'hyperbole est équilatère, c'est la lemniscate que l'on obtient.

Pour avoir les quatre foyers de la courbe, il suffira de mener des droites aux points I et J par les quatre points d'intersection de la conique déférente et du cercle.

Ce serait ici le lieu de montrer comment les propriétés des cycliques permettent de généraliser un théorème relatif à la lemniscate, et de donner un mode parfait de représentation des intégrales elliptiques par un arc de courbe. Mais ces propriétés peuvent, sans inconvénient, être détachées du travail actuel.

L'ellipse de Cassini fait partie des courbes que nous avons étudiées au n° 27. Son équation peut, en effet, s'écrire

$$(u^2-c^2)(v^2-c^2)=a^4, \tag{60}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{u^2-c^2}{a^2}=\frac{a^2}{v^2-c^2},$$

et, par suite,

$$(u^2-c^2+\lambda a^2)(v^2-c^2+\lambda' a^2)=\lambda\lambda'\left(u^2-c^2+\frac{a^2}{\lambda'}\right)\left(v^2-c^2+\frac{a^2}{\lambda}\right),$$

équation de la forme

$$RR'=k\,.\,rr';$$

et les nouveaux pôles seront déterminés par les équations

$$\begin{cases} u^2=c^2-\lambda a^2, \\ v^2=c^2-\lambda' a^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2=c^2-\dfrac{a^2}{\lambda'}, \\ v^2=c^2-\dfrac{a^2}{\lambda}. \end{cases}$$

Considérons un cas particulier,

$$\lambda = \lambda' = \frac{c^2}{a^2};$$

l'équation deviendra

$$u^2v^2 = \frac{c^4}{a^4}\left(v^2 - c^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)\left(u^2 - c^2 + \frac{a^4}{c^2}\right).$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{a^2}{c^2}\rho^2 = RR', \tag{61}$$

ρ désigne la distance au centre de la courbe; R, R′ sont évidemment les distances aux deux autres foyers déterminés par les formules

$$u^2 = v^2 = c^2 - \frac{a^4}{c^2}.$$

Donc, *le produit des distances aux deux seconds foyers est proportionnel au carré de la distance au centre.*

Il résulte de là que la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une ellipse de Cassini est encore une ellipse de Cassini, si l'on met le pôle au centre. Seulement, pour la courbe formée d'une seule ovale, les deux foyers donnant lieu à la propriété focale $rr' = k$ passeront par la transformation sur l'axe perpendiculaire.

Nous allons maintenant développer la propriété des segments capables, en écrivant l'équation (60) sous la forme

$$\frac{u^2 - c^2 + a^2e^{\alpha i}}{u^2 - c^2 + a^2e^{\beta i}} = e^{(\alpha-\beta)i}\frac{v^2 - c^2 + a^2e^{-\alpha i}}{v^2 - c^2 + a^2e^{-\beta i}}. \tag{62}$$

. D'après les propositions générales données plus haut, cette équation exprime que, si l'on considère les deux segments dont les extrémités sont données par les formules

$$u^2 = c^2 - a^2e^{\alpha i}, \quad v^2 = c^2 - a^2e^{-\alpha i},$$

pour la première extrémité, et

$$u^2 = c^2 - a^2e^{\beta i}, \quad v^2 = c^2 - a^2e^{-\beta i},$$

pour la seconde, la somme des angles sous lesquels on voit ces deux segments est constante. Donc,

Si l'on inscrit dans l'ellipse de Cassini un parallélogramme de même centre, la somme algébrique des angles sous lesquels on voit les côtés opposés d'un point de la courbe est constante.

Ces remarques servent d'application aux théorèmes généraux énoncés plus haut.

L'ellipse de Cassini n'est pas d'ailleurs la cyclique la plus générale ayant une équation de la forme

$$RR' = K \cdot rr' .$$

Il semble même que cette équation, contenant 9 constantes, serait propre à représenter les cycliques planes les plus générales. Mais, comme on a démontré que cette équation peut conserver la même forme avec une infinité de systèmes de pôles, et que même l'un d'eux peut être choisi arbitrairement, on voit qu'elle ne contient, en réalité, que 7 constantes, et ne peut représenter toute cyclique. Nous verrons plus loin comment on peut rattacher tout cela aux théorèmes de Poncelet.

Les cycliques définies par l'équation

$$\frac{MA \cdot MA'}{MB \cdot MB'} = K \tag{63}$$

forment, lorsque K varie, un système de cycliques, coupées à angle droit par les courbes satisfaisant à l'équation

$$\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{A'MB'} = \text{const.} \tag{64}$$

Ces nouvelles courbes sont encore des cycliques. On a donc un système double orthogonal, formé exclusivement de cycliques.

Ce système comprend, comme cas particulier, celui des ellipses de Cassini et des hyperboles équilatères, qui a été étudié surtout par Lamé. Il suffit que deux des pôles, B , B', servant à la définition du premier système, soient rejetés à l'infini. Toutes les cycliques du système général sont d'ailleurs

des transformées par rayons vecteurs réciproques de l'ellipse de Cassini.

33.

Des points associés à la surface de la sphère.

Les propriétés des points associés dans le plan ont leurs analogues dans la géométrie sphérique.

Si nous transformons une figure plane par rayons vecteurs réciproques, au plan correspond une sphère; aux droites du plan passant par le point I correspondent les génératrices d'un même système de la sphère. De même, aux droites passant par le point J correspondent les génératrices rectilignes du second système. On voit donc que toute génératrice de la sphère a un point réel, et que les génératrices d'un système sont imaginaires conjuguées de celles de l'autre. Donc, à un quadrilatère du plan, ayant pour sommets opposés les deux points I et J, correspond sur la sphère un quadrilatère rectiligne formé de deux génératrices de chaque système. Il résulte de là la construction des points P′, Q′, associés aux points P, Q.

Par les points P, Q on mènera les deux génératrices rectilignes de la sphère, qui passent en ces points. Ces deux génératrices se coupent en deux points P′, Q′ qu'on dira associés aux premiers. Il est clair que la droite P′Q′ est la polaire de PQ, et, par conséquent, si l'un des couples, PQ, P′Q′ est réel, l'autre sera nécessairement imaginaire.

Il est vrai que, dans le plan, nous faisions une distinction entre les points P′, Q′. Si les points P et Q ont pour coordonnées

$$P\begin{cases} u=a, \\ v=a', \end{cases} \qquad Q\begin{cases} u=b, \\ v=b', \end{cases}$$

nous avons pris

$$P'\begin{cases} a=a, \\ v=b', \end{cases} \qquad Q'\begin{cases} u=a', \\ v=b. \end{cases}$$

(Voir art. 26). Mais ici la même distinction peut évidemment être faite; car aux droites passant par le point I dans le plan correspondront, sur la sphère, les génératrices d'un système, que nous appelerons (I); et de même, aux droites passant par J dans le plan, les droites du second système, que nous distinguerons par la lettre (J), et qui sont imaginaires conjuguées des premières. Examinons maintenant les propriétés des points associés.

Le rapport $\frac{MP \cdot MQ}{MP' \cdot MQ'}$ des distances d'un point M aux quatre points P, Q, P', Q', étant égal à l'unité dans le plan, sera constant à la surface de la sphère, et l'on aura

$$\frac{MP \cdot MQ}{PQ^2} = \pm \frac{MP' \cdot MQ'}{P'Q'^2}. \tag{65}$$

Donc *il y a sur la sphère un rapport constant entre le produit des distances d'un point quelconque* M *à deux points fixes,* P, Q, *et le produit des distances du même point aux deux points associés* P', Q'.

On peut transformer de même les relations relatives aux angles, et nous signalerons d'abord celle-ci. Si l'on joint le point M soit aux deux points P, Q, soit aux deux points P', Q', les deux couples de grands cercles ainsi obtenus auront mêmes bissectrices. On pourra substituer, sans que la propriété cesse d'exister, aux grands cercles des petits cercles assujettis à couper à angle droit un cercle fixe quelconque de la sphère.

Nous avons vu que, dans le plan, on a

$$e^{i.\widehat{P'MQ'}} = \frac{MP}{MQ}.$$

Sur la sphère les droites MP, MQ, ... se transforment en petits cercles passant par le pôle. Si nous appelons ce pôle M', la relation précédente, transformée sans aucune difficulté par la méthode des rayons vecteurs réciproques, nous conduit au résultat suivant :

Soient deux petits cercles de la sphère passant, l'un par

M, M', P', l'autre par M, M', Q', et désignons leur angle par $\widehat{P'MQ'}$; on aura

$$e^{i\cdot\widehat{P'MQ'}} = \frac{MP}{MQ} : \frac{M'P}{M'Q}, \tag{66}$$

M, M' étant d'ailleurs des points quelconques de la sphère, et P, Q les points associés à P', Q'. Cette relation est fondamentale, et nous allons en déduire plusieurs conséquences.

1° Les points M, M' étant quelconques, on peut faire sur leur position différentes hypothèses particulières, et supposer, par exemple, qu'ils soient diamétralement opposés sur la sphère. Alors les cercles considérés plus haut sont les grands cercles passant par M et les points fixes P', Q'. D'ailleurs, les distances M'P, M'Q deviennent égales aux distances MP_1, MQ_1 du point M aux points P_1, Q_1, diamétralement opposés à P et à Q, et la formule (66) devient

$$e^{i\cdot\widehat{P'MQ'}} = \frac{MP}{MQ} : \frac{MP_1}{MQ_1} = \operatorname{tang} \frac{\frac{\operatorname{arc} MP}{2}}{\frac{\operatorname{arc} MP'}{2}}. \tag{67}$$

Ainsi l'angle des deux arcs de grand cercle, menés du point M aux extrémités du segment P'Q', s'exprime en fonction des distances de ce point M aux deux points fixes P, Q associés à P', Q', et aux deux points P_1, Q_1 diamétralement opposés à P et à Q. Cette formule est analogue à l'équation (40) relative au plan; elle ne constitue pas cependant, comme nous allons le voir, la véritable généralisation de cette formule.

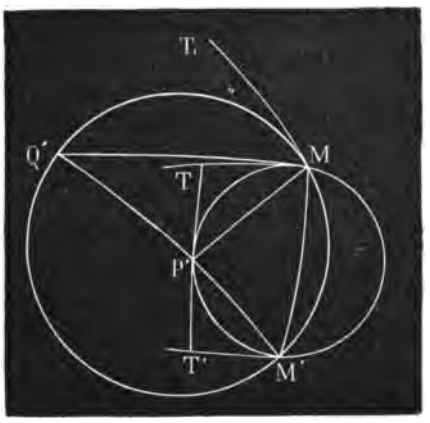
2° Supposons que dans la formule (66) le point M', qui est quelconque, ait été placé sur l'arc de grand cercle P'Q'; alors on aura

$$M'P = M'Q,$$

puisque les points P et Q sont placés symétriquement par rapport à l'arc P'Q', et la formule (66) deviendra

$$\frac{MP}{MQ} = e^{i\cdot\widehat{P'MQ'}}.$$

Cela posé, je dis que l'angle P'MQ' ou TMT, des deux petits



cercles s'exprime en fonction des angles du triangle sphérique MP'Q' par la formule

$$2\,\widehat{P'MQ'} = M - P' - Q' + \pi. \tag{68}$$

En effet, menons les arcs tangents en M, M', P'. D'après les propriétés du cercle, les angles suivants seront égaux,

$$TP'M = TMP', \quad T'P'M' = T'M'P', \quad TMM' = T'M'M,$$

et par conséquent on aura

$$2TMM' = P'MM' + P'M'M + \pi - MP'M'.$$

En appliquant la même relation au second petit cercle, on aura

$$2T_1MM' = Q'MM' + Q'M'M + \pi - MQ'M'.$$

En retranchant de cette équation la précédente, on trouve

$$2T_1MT = Q'MP' - MQ'M' + MP'M',$$

équation équivalente à la formule (68), qu'il s'agissait de démontrer.

Ainsi l'angle des deux petits cercles s'exprime par la formule

$$\frac{M - P' - Q' + \pi}{2}.$$

M, P', Q' étant les angles du triangle sphérique MP'Q'.

L'expression précédente est susceptible d'une interprétation géométrique simple. A cet effet, considérons, en même temps que P', Q', les points diamétralement opposés P'_1, Q'_1. *L'expression précédente est égale à* $\frac{S}{2}$, S *étant l'aire du triangle sphérique* $MP'_1Q'_1$, et l'on a

$$\frac{MP}{MQ} = e^{i\frac{S}{2}}. \tag{69}$$

Ainsi, *le rapport des distances d'un point quelconque* M *de la sphère à deux points* P, Q *de cette surface est égal à* $e^{i\frac{S}{2}}$, S *désignant l'aire du triangle sphérique formé par le point* M *et les points* P'_1, Q'_1, *diamétralement opposés aux points* P', Q', *associés à* P *et à* Q.

Nous ne devons pas dissimuler que la formule et la démonstration précédentes présentent quelques difficultés quant aux signes. Ces difficultés, sur lesquelles nous reviendrons dans une autre occasion, et qu'on lèvera dans chaque cas particulier, tiennent à la convention faite par les auteurs de Trigonométrie de détruire la continuité, et de ne considérer que les triangles dont les côtés sont inférieurs à π. La règle à suivre est la suivante. On prendra le même signe pour toutes les aires correspondantes à un sens de rotation déterminé autour des côtés du triangle, et des signes opposés quand les sens de rotation seront différents.

La formule (69) peut être employée sur la sphère de la même manière que l'équation (40) relative au plan. Elle donne, comme cette dernière, une transformation du rapport $\frac{MP}{MQ}$ de deux distances seulement, tandis que la formule (67), qu'on pourrait d'ailleurs déduire de la précédente, contient quatre distances MP, MQ, M'P, M'Q.

Ainsi, quand les deux points P, Q deviennent imaginaires conjugués, le rapport des distances du point M à ces deux

points s'exprimera en fonction de l'aire d'un triangle sphérique réel.

Sous ce point de vue, c'est le théorème de Lexell, relatif aux triangles sphériques d'aire constante, qui constitue, sur la sphère, la propriété analogue à celle des angles inscrits dans les cercles du plan. Car on sait, d'après ce théorème, qu'étant donnés deux points quelconques P, Q d'un petit cercle, le triangle sphérique formé par les points diamétralement opposés P_1, Q_1, et par un point M du cercle, conservera une aire constante, quand le point M décrira le petit cercle.

On retrouverait exactement, comme à l'article 26, les propriétés focales des coniques sphériques.

34.

Des courbes sphériques analogues aux courbes planes déjà considérées.

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre à la sphère les propriétés signalées à l'article 7, et qui conviennent à une classe étendue de courbes planes.

Prenons sur la sphère deux séries de pôles fixes,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

et appelons R_i, r_i les distances d'un point M aux pôles A_i, B_i des deux séries. Les courbes sphériques que nous allons considérer sont définies par l'équation

$$R_1 R_2 \ldots R_n = k \cdot r_1 r_2 \ldots r_n. \tag{70}$$

Ces courbes donnent lieu à des propositions plus nombreuses que les courbes planes correspondantes.

D'abord, si l'on effectue leur projection stéréographique sur un plan, la forme de l'équation précédente (70) ne change pas. On voit donc que ces courbes sphériques sont les transformées par rayons vecteurs réciproques des courbes planes déjà étu-

diées, et, par conséquent, en tenant compte de la propriété énoncée (art. 27), nous obtiendrons le théorème suivant :

Quand une courbe sphérique est telle qu'il y ait un rapport constant entre les produits de ses distances à deux séries de pôles fixes pris sur la sphère, elle jouit des mêmes propriétés avec une infinité d'autres séries de pôles fixes, situés aussi sur la sphère, et l'un des nouveaux pôles peut même être choisi arbitrairement.

Supposons que l'on se donne un des pôles A_1, et que l'on demande de trouver les pôles qui lui sont associés. On mènera le plan tangent en A_1, contenant deux génératrices de la sphère qui couperont la courbe en deux groupes de n points imaginaires,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$
$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n.$$

On joindra les points du premier groupe à ceux du second, et l'on aura ainsi n arcs de grand cercle. Les pôles B_i de l'une des séries seront les symétriques de A_1 par rapport à ces n arcs de grand cercle. En opérant la construction précédente sur un de ces pôles B_i, on retrouvera A_1 et les $(n-1)$ pôles A_i, qui doivent lui être adjoints dans la première série.

Les arcs de grand cercle joignant les points du premier groupe α'_i peuvent d'ailleurs être pris d'une manière quelconque; mais il est clair qu'ils ne seront réels que si l'on joint chaque point imaginaire α_i à son conjugué α'_i. La construction que nous donnons ici est d'ailleurs une conséquence immédiate de ce fait évident que deux pôles appartenant à deux séries différentes, considérés comme des cercles de rayon nul, se coupent en deux points de la courbe.

Revenons au cas général, et considérons, en même temps que la courbe sphérique, la courbe plane qui en est la projection stéréographique. Nous avons vu, formule (45), qu'on pouvait choisir pour la courbe plane une infinité de pôles, tels que les pôles de la 2e série soient imaginaires conjugués de ceux de la première. La transformation par rayons vecteurs réciproques conserve cette relation. On pourra donc trouver

sur la sphère deux séries de pôles imaginaires de la courbe, tels que les pôles de l'une des séries soient conjugués de ceux de l'autre. Appelons R_i, r_i les distances d'un point M de la courbe à deux pôles imaginaires conjugués A_i, B_i, et S_i l'aire du triangle sphérique formé par le point M et les deux points fixes réels A'_i, B'_i, diamétralement opposés aux points associés à A_i, B_i. On aura

$$\frac{R_i}{r_i} = e^{\frac{S_i}{2}\sqrt{-1}},$$

et comme l'équation de la courbe peut s'écrire

$$\frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdots \frac{R_n}{r_n} = k,$$

on voit que l'on aura

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \text{const.}$$

Ainsi, *quand une courbe sphérique est telle qu'il y ait un rapport constant entre les produits des distances d'un de ses points à une première série de n pôles et le produit des distances du même point à une deuxième série de n pôles, situés comme les premiers sur la sphère, elle possède, et d'une infinité de manières, la propriété que la somme des aires des n triangles sphériques, formés avec un de ses points comme sommet et n segments fixes comme bases, soit constante.*

Les extrémités de ces *n* segments décrivent d'ailleurs la courbe sphérique diamétralement opposée à la proposée.

L'énoncé précédent peut même être complété, et l'on peut dire que toute courbe qui jouit de l'une ou de l'autre des propriétés indiquées dans le théorème fait partie de la classe de courbes que nous étudions, et conserve par conséquent ces mêmes propriétés avec une infinité d'autres systèmes soit de pôles, soit de segments fixes.

Quelques cas particuliers dans lesquels les deux séries de pôles ont une disposition particulière méritent d'être signalés.

35.

Des courbes sphériques pour lesquelles les pôles de chaque série sont deux à deux diamétralement opposés. Propriétés correspondantes des cônes algébriques, ayant ces courbes pour base.

Si les pôles de chacune des deux séries qui servent à définir la courbe sont deux à deux diamétralement opposés, la courbe définie par ces deux séries de n pôles sera évidemment symétrique par rapport au centre de la sphère. Nous allons voir que, parmi les nouveaux systèmes de pôles qu'on peut substituer aux premiers, il y en a une infinité qui sont, comme les premiers, deux à deux diamétralement opposés dans chaque série.

En effet, quand on fait la projection stéréographique de la sphère, deux points diamétralement opposés se projettent suivant deux points divisant harmoniquement les diamètres d'un cercle fixe du plan. Le carré k du rayon de ce cercle est négatif; le cercle n'a de réel que son centre. Prenons ce centre pour origine des coordonnées; l'équation de la courbe plane, projection de la courbe sphérique, sera

$$\varphi(u)\varphi_1(v) = \psi(u)\psi_1(v).$$

Les pôles de la première série seront définis par les équations

$$(71)\qquad \begin{cases} \varphi(u) = Au^m + \cdots + A_m = 0, \\ \varphi_1(v) = Av^m + \cdots + A'_m = 0, \end{cases}$$

où A désigne une quantité réelle, A_m, A'_m des quantités imaginaires conjuguées. De même, les pôles de la 2e série seront donnés par le système semblable

$$(72)\qquad \begin{cases} \psi(u) = Bu^m + \cdots + B_m = 0, \\ \psi_1(v) = Bv^m + \cdots + B'_m = 0, \end{cases}$$

Cela posé, d'après les hypothèses faites, les pôles de chaque

série peuvent être groupés deux à deux, de telle manière que les points de chaque couple (u, v), (u_1, v_1) divisent harmoniquement un diamètre du cercle ayant son centre à l'origine, et pour rayon $\sqrt{k}$. On passera donc d'un de ces points à l'autre par les formules

$$u_1 = \frac{k}{v}, \qquad v_1 = \frac{k}{u},$$

et par suite les polynômes φ, φ_1, ψ, ψ_1 devront satisfaire aux équations

$$(73)\qquad \begin{cases} v^m \varphi\left(\dfrac{k}{v}\right) = \dfrac{A_m}{A}\varphi_1(v), & u^m \varphi_1\left(\dfrac{k}{u}\right) = \dfrac{A'_m}{A}\varphi(u), \\ v^m \psi\left(\dfrac{k}{v}\right) = \dfrac{B_m}{B}\psi_1(v), & u^m \psi_1\left(\dfrac{k}{u}\right) = \dfrac{B'_m}{B}\psi(u). \end{cases}$$

Si, dans la deuxième de ces équations, on change u en $\frac{k}{v}$, et et qu'on la multiplie avec la première, elle donne

$$k^m = \frac{A_m A'_m}{A^2}.$$

On aurait de même

$$k^m = \frac{B_m B'_m}{B^2},$$

d'où résulte

$$\frac{A_m A'_m}{A^2} = \frac{B_m B'_m}{B^2}.$$

Cela posé, formons les nouveaux pôles. L'équation de la courbe [voir art. 27, équation (43)] prend la forme

$$(74)\qquad \Phi(u)\Phi_1(v) = \Psi(u)\Psi_1(v),$$

où les polynômes Φ, Φ_1, ... sont définis par les formules

$$(75)\qquad \begin{cases} \Phi(u) = \varphi(u) + \lambda\psi(u), & \Phi_1(v) = \varphi_1(v) + \lambda'\psi_1(v), \\ \Psi(u) = \psi(u) + \lambda'\varphi(u), & \Psi_1(v) = \psi_1(v) + \lambda\varphi_1(v), \end{cases}$$

λ et λ' étant deux facteurs imaginaires conjugués. En égalant ces polynômes à zéro, on aura les nouveaux pôles de la courbe. Pour que ces points aient les mêmes dispositions que les pre-

miers, il suffira que les nouveaux polynômes Φ, Ψ satisfassent à des équations de la même forme que les formules (73). Or on a

$$v_m \Phi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{A_m}{A}\left[\varphi_1(v) + \frac{\lambda A B_m}{A_m B}\psi_1(v)\right].$$

On aura donc

$$v_m \Phi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{A_m}{A}\Phi_1(v),$$

et les équations semblables, en prenant

$$\lambda \frac{A B_m}{B A_m} = \lambda', \quad \lambda' \frac{A B'_m}{B A'_m} = \lambda. \tag{76}$$

Ces deux équations se réduisent évidemment à une seule, la première. Il suffira donc que les indéterminées λ, λ' satisfassent à cette équation, pour que les nouveaux pôles aient la même disposition que les anciens.

Si l'on pose

$$A_m = A k^{\frac{m}{2}} e^{ia}, \quad A'_m = A k^{\frac{m}{2}} e^{-ia},$$
$$B_m = B k^{\frac{m}{2}} e^{ib}. \quad B'_m = B k^{\frac{m}{2}} e^{-ib},$$
$$\lambda = \mu e^{-\omega i}, \quad \lambda' = \mu e^{+\omega i},$$

on aura, en vertu de l'équation (76),

$$\omega = \frac{b-a}{2}.$$

μ demeurera quelconque. Ainsi, on trouve un nombre infini de systèmes de pôles, satisfaisant aux conditions posées. Ces pôles, satisfaisant aux équations

$$\Phi(u) = \varphi(u) + \lambda \psi(u) = 0,$$
$$\Phi_1(v) = \varphi_1(v) + \lambda' \psi_1(v) = 0,$$

sont, en vertu de l'équation (76), sur la courbe

$$\frac{\varphi_1(v)}{\varphi(u)} = \frac{A B_m}{B A_m}\frac{\psi_1(v)}{\psi(u)}, \tag{77}$$

courbe qui n'est pas indécomposable, et qui comprend le

cercle $uv = k$. La courbe précédente fait partie de celles qui coupent la première à angle droit. Mais nous nous contentons d'indiquer ces résultats.

Il est donc démontré que, si une courbe sphérique est définie par deux séries de pôles, telles que les pôles de chaque série soient deux à deux diamétralemeut opposés, la même propriété subsiste avec une infinité d'autres pôles, assujettis à décrire une courbe, d'un ordre inférieur de deux unités, et orthogonale à la proposée. Cette disposition particulière donne lieu à un théorème nouveau.

En effet, le produit des distances d'un point M de la sphère à deux points diamétralement opposés α, α' est évidemment proportionnel au carré de la distance du point M à la droite $\alpha\alpha'$. La courbe sphérique est donc telle qu'il y a un rapport constant entre les produits des distances de l'un de ses points à deux séries de diamètres de la sphère; et comme cette définition convient aussi au cône ayant le centre de la sphère pour sommet et la courbe pour base, nous avons, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, le théorème suivant :

Quand un cône est tel qu'il y ait un rapport constant entre les produits des distances de l'un de ses points à deux séries distinctes de droites passant à son sommet, il conserve la même définition avec une infinité d'autres séries de droites passant également par son sommet, décrivant un cône algébrique orthogonal au premier et d'un degré inférieur d'une unité.

Le cas le plus simple de cette proposition a été étudié par M. Chasles. Le cône du second degré, tel qu'il y ait un rapport constant entre les distances d'un de ses points à deux droites fixes, conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes des deux droites, situées dans le plan des premières.

La propriété relative à la somme des aires des triangles sphériques prend ici une forme particulière. En effet, quand les pôles de chaque série deviennent imaginaires, les points associés sont diamétralement opposés. En associant les triangles sphériques dont les sommets sont diamétralement opposés,

on voit que, dans ce cas, la somme algébrique de leurs aires est égale à la somme des angles à la base, et l'on peut énoncer cette proposition :

Quand une courbe sphérique est telle qu'il y ait un rapport constant entre les produits des distances de ses points à deux séries de n diamètres, on peut former d'une infinité de manières n segments ayant leurs extrémités sur la courbe, et tels que la somme des angles à la base des triangles sphériques formés avec ces segments comme bases, et ayant tous pour sommet un même point variable de la courbe, soit constante.

On pourrait évidemment ajouter un grand nombre de propositions aux précédentes. Mais peut-être le lecteur trouvera-t-il que nous avons déjà été trop long.

36.

Des courbes lieux des points desquels on voit plusieurs segments de grand cercle sous des angles dont la somme est nulle.

Ces courbes forment une nouvelle classe particulière des courbes sphériques que nous étudions. En effet, l'angle de deux arcs de grand cercle MA, MB, joignant le point M aux deux points A et B, est évidemment égal à la somme des aires des triangles sphériques MAB, MA'B'; A', B' étant les points diamétralement opposés à A, B. Les courbes que nous allons étudier sont, par conséquent, telles que la somme des aires des triangles sphériques formés avec un point de la courbe et $2n$ segments fixes, deux à deux diamétralement opposés, soit constante. Elles sont donc comprises dans la définition générale donnée au n° 33, et elles correspondent à une disposition particulière des pôles, qu'on peut caractériser en disant que ceux-ci sont en nombre pair dans chaque série, et que les pôles de l'une des séries sont diamétralement opposés à ceux de l'autre.

Ces courbes nouvelles ont donc toutes les propriétés appar-

tenant aux courbes générales, et signalées au n° 33; on peut les engendrer au moyen de deux séries de $2n$ pôles, un des pôles étant placé en un point quelconque de la sphère, etc. Mais la question qu'il importe d'examiner est la suivante : Peut-on conserver leur définition particulière et trouver, de plus d'une manière, n segments tels que la somme des angles sous lesquels on voit ces n segments conserve une valeur constante pour chaque point de la courbe?

Il est clair que cette question revient à la suivante : Peut-on trouver de nouveaux systèmes de pôles tels que les pôles de chaque série soient diamétralement opposés à ceux de l'autre?

A cet effet, reprenons les équations du numéro précédent, qui s'appliquent à la courbe plane, projection stéréographique,

$$\varphi(u)\,\varphi_1(v) = \psi(u)\,\psi_1(v),$$

et la nouvelle équation

$$\Phi(u)\,\Phi_1(v) = \Psi(u)\,\Psi_1(v).$$

En raisonnant comme à l'article précédent, on verra que les fonctions φ, ψ satisfont ici aux équations identiques

$$(78)\qquad \begin{cases} v^m \varphi\left(\dfrac{k}{v}\right) = \dfrac{A_m}{B}\psi_1(v), & u^m \varphi_1\left(\dfrac{k}{u}\right) = \dfrac{A'_m}{B}\psi(u), \\ v^m \psi\left(\dfrac{k}{v}\right) = \dfrac{B_m}{A}\varphi_1(v), & u^m \psi_1\left(\dfrac{k}{u}\right) = \dfrac{B'_m}{A}\varphi(u). \end{cases}$$

On déduit de là, en s'appuyant sur les équations déjà données pour Φ, Ψ,

$$v^m \Phi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{A_m}{B}\left[\psi_1(v) + \frac{\lambda B B_m}{A A_m}\varphi_1(v)\right].$$

Pour que le second membre se réduise à $\Psi_1(v)$ à un facteur constant près, il faut et il suffit que l'on ait

$$(79)\qquad \frac{A A_m}{B B_m} = 1.$$

Cette relation n'est pas satisfaite en général. Par suite, dans la définition posée au commencement de cet article, on ne

pourra pas, en général, substituer aux segments fixes des segments donnant lieu aux mêmes propriétés. Mais il n'en sera plus ainsi si $\frac{AA_m}{BB_m}=1$.

Interprétons d'abord cette condition. Elle signifie, en tenant compte des identités (79), que l'équation de la courbe est vérifiée par la valeur

$$u=\frac{k}{v},$$

c'est-à-dire que la courbe contient le cercle

$$uv=k.$$

Ce cercle étant la projection stéréographique du cercle de l'infini sur la sphère, il résulte de là que, lorsque la condition (79) sera satisfaite, la courbe sphérique se décomposera et contiendra le cercle de l'infini; par suite, la somme des angles des triangles sphériques sera nulle. Donc,

Si l'on considère sur la sphère la courbe telle que la somme des angles, formés autour d'un quelconque de ses points M, *des triangles sphériques ayant tous ce point pour sommet, et pour bases respectivement n segments fixes, soit constante, on ne pourra substituer à ces segments fixes d'autres segments donnant lieu aux mêmes propriétés que dans le cas où la somme constante des angles sera nulle ou égale à un multiple de* π.

Par exemple, le lieu des foyers des coniques sphériques inscrites dans un quadrilatère formé de quatre grands cercles est tel que la différence des angles sous lesquels on voit deux côtés opposés du quadrilatère sphérique est nulle. Cette courbe conservera les mêmes propriétés avec d'autres quadrilatères, c'est-à-dire sera le lieu des foyers des coniques sphériques inscrites dans toute une série de quadrilatères.

37.

Des systèmes orthogonaux formés à la surface de la sphère avec les courbes précédentes.

Il est clair que les propriétés démontrées au n° 25 pour les systèmes orthogonaux de courbes planes s'étendent aux courbes sphériques, et nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

Quand des courbes sphériques sont telles que les produits de leurs distances à deux séries de pôles fixes

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

conservent un rapport constant pour chaque courbe, elles sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points M, pour lesquels les triangles sphériques $MA'_iB'_i$ ont des aires dont la somme demeure constante pour chaque courbe, les points A'_i, B'_i étant diamétralement opposés aux points A_i, B_i.

Quand des courbes sphériques sont telles que les produits de leurs distances à deux séries de diamètres fixes

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$$
$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

conservent un rapport constant pour chaque courbe, elles sont coupées à angle droit par les courbes sphériques lieux des points M pour lesquels les angles formés par les arcs de grand cercle $M\Delta_i$, ME_i conservent une somme qui demeure constante pour chaque courbe.

Enfin on peut citer le théorème suivant, énoncé par M. Michael Roberts (1) :

---

(1) *Journal de Liouville*, t. X, 1re série, p. 251. « Note sur deux systèmes généraux de trajectoires orthogonales. » Le système considéré par M. Roberts revient évidemment à celui que nous donnons dans le texte.

Quand des courbes sphériques sont telles qu'il y ait un rapport constant pour chacune d'elles entre le produit des distances d'un de leurs points à n pôles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et le produit des distances aux n pôles diamétralement opposés $A'_1, A'_2, \ldots, A_n$, elles sont coupées à angle droit par les courbes telles que la somme des angles MA_1A_2, MA_1A_2, ... soit constante.

On peut signaler, par exemple, le cas particulier suivant du 2e système général :

Tous les cônes tels qu'il y ait un rapport constant entre les distances de leurs points à deux diamètres fixes Δ, E coupent la sphère suivant une suite de coniques sphériques circonscrites à un quadrilatère rectiligne imaginaire de la sphère. Ces coniques sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points M, pour lesquels les grands cercles M Δ et M E font un angle constant.

La courbe que nous rencontrons ici, et qui est le lieu des sommets des angles constants dont les côtés passent par deux points fixes de la sphère, appartient, comme on voit, à la classe des cycliques. C'est une courbe du 4e ordre, bicylindrique, transformée par rayons vecteurs réciproques d'une ellipse de Cassini.

38.

Démonstrations nouvelles des théorèmes de Poncelet, relatifs aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques, déduites des principes précédents.

Les propositions qui précèdent nous conduisent d'une manière directe à une démonstration des théorèmes de Poncelet, qui paraît se distinguer de toutes les démonstrations connues, et que, pour ce motif, nous allons développer ici.

Soient un cône du second degré (H), et un angle polyèdre inscrit de même sommet, formé d'une suite de plans $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

ou, en multipliant par $u-v$,

$$\sum \frac{a_i}{u-\alpha_i} = \sum \frac{a_i}{v-\alpha_i},$$

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)}. \tag{82}$$

Dans cette équation, $f(u)$ est de degré inférieur à $\varphi(u)$, et le polynôme $\varphi(u)$ a ses racines réelles. Mais toutes ces propriétés pourront être conservées, si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)+\lambda f(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)+\lambda f(v)}. \tag{83}$$

En décomposant les deux membres en fractions simples, on reviendra à une équation de même forme que l'équation (81), mais *avec de nouveaux pôles;* c. q. f. d.

Il ne sera pas inutile de développer une autre démonstration des théorèmes de Poncelet, bien que cette démonstration ne s'applique qu'aux polygones de degré pair, parce qu'elle nous mettra sur la voie de propositions un peu plus générales que les théorèmes connus.

Si un angle polyèdre d'un nombre pair de faces est inscrit dans un cône (H) et circonscrit au cône (H_1), tous les points du cône (H) satisferont à une équation de la forme

$$P_1 P_2 \dots P_n = Q_1 Q_2 \dots Q_n,$$

où les plans P_i, Q_i sont tangents à la sphère, et par suite la cyclique, section de la sphère par le cône (H_1), satisfera à l'équation

$$R_1 R_2 \dots R_n = K . r_1 r_2 \dots r_n. \tag{84}$$

D'une manière plus précise, cette équation représentera à la fois la cyclique située sur (H_1) et une courbe d'ordre $2n-4$.

On a vu d'ailleurs que, lorsqu'une courbe satisfait à une telle équation, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles. Prenons un autre de ces

systèmes, formé de pôles réels. La nouvelle équation de notre courbe composée sera

$$R'_1 R'_2 \dots R'_n = K_1 . r'_1 r'_2 \dots r'_n , \tag{85}$$

et, si l'on remplace les quantités R'_i, r'_i par P'_i, Q'_i, qui désignent les distances d'un point quelconque aux plans tangents de la sphère en R'_i, r'_i, l'équation

$$P'_1 P'_2 \dots P_n = h . Q'_1 Q'_2 \dots Q'_n \tag{86}$$

représentera une surface d'ordre n, qui coupera la sphère suivant la courbe complète représentée par les équations (84) ou (85). Je dis que cette surface d'ordre n se décompose dans tous les cas en une surface du second ordre contenant la cyclique située sur (H_1) et en une autre surface d'ordre $n-2$ (1).

En effet, le plan P'_i coupe la surface suivant n droites, situées dans les plans Q'_i, et qui contiennent chacune deux points de la courbe sphérique; comme d'ailleurs ce plan P'_i est tangent à la sphère, il coupe la courbe complète (84) en $2n$ points imaginaires, dont quatre appartiennent à la cyclique. Appelons ces points

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \beta_1 , \beta_2 , \dots , \beta_{n-2} ,$$
$$\alpha'_1 , \alpha'_2 , \beta'_1 , \beta'_2 , \dots , \beta'_{n-2} ,$$

les points α_1, α_2, α'_1, α'_2 appartenant à la cyclique, les $2(n-2)$ autres au reste de la courbe. Les droites réelles joignant les points du premier groupe à ceux du second sont évidemment $\alpha_1 \alpha'_1$, $\alpha_2 \alpha'_2$, etc., car les quatre points de la cyclique sont imaginaires conjugués deux à deux. D'ailleurs ces n droites réelles sont évidemment les n droites de la surface (86), situées

(1) Cette surface d'ordre $n-2$ se décompose en réalité en surfaces du second degré, si n est pair; en surfaces du second degré et en un plan, si n est impair. Mais cette proposition, qui est une conséquence très simple du théorème principal, ne joue aucun rôle dans la démonstration que nous donnons ici.

37.

Des systèmes orthogonaux formés à la surface de la sphère avec les courbes précédentes.

Il est clair que les propriétés démontrées au n° 25 pour les systèmes orthogonaux de courbes planes s'étendent aux courbes sphériques, et nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

Quand des courbes sphériques sont telles que les produits de leurs distances à deux séries de pôles fixes

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

conservent un rapport constant pour chaque courbe, elles sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points M, pour lesquels les triangles sphériques $MA'_iB'_i$ ont des aires dont la somme demeure constante pour chaque courbe, les points A'_i, B'_i étant diamétralement opposés aux points A_i, B_i.

Quand des courbes sphériques sont telles que les produits de leurs distances à deux séries de diamètres fixes

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$$
$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

conservent un rapport constant pour chaque courbe, elles sont coupées à angle droit par les courbes sphériques lieux des points M pour lesquels les angles formés par les arcs de grand cercle $M\Delta_i$, ME_i conservent une somme qui demeure constante pour chaque courbe.

Enfin on peut citer le théorème suivant, énoncé par M. Michael Roberts [1] :

---

[1] *Journal de Liouville*, t. X, 1re série, p. 251. « Note sur deux systèmes généraux de trajectoires orthogonales. » Le système considéré par M. Roberts revient évidemment à celui que nous donnons dans le texte.

Quand des courbes sphériques sont telles qu'il y ait un rapport constant pour chacune d'elles entre le produit des distances d'un de leurs points à n pôles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et le produit des distances aux n pôles diamétralement opposés $A'_1, A'_2, \ldots, A_n$, elles sont coupées à angle droit par les courbes telles que la somme des angles MA_1A_2, MA_2A_3, ... soit constante.

On peut signaler, par exemple, le cas particulier suivant du 2e système général :

Tous les cônes tels qu'il y ait un rapport constant entre les distances de leurs points à deux diamètres fixes Δ, E coupent la sphère suivant une suite de coniques sphériques circonscrites à un quadrilatère rectiligne imaginaire de la sphère. Ces coniques sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points M, pour lesquels les grands cercles M Δ et M E font un angle constant.

La courbe que nous rencontrons ici, et qui est le lieu des sommets des angles constants dont les côtés passent par deux points fixes de la sphère, appartient, comme on voit, à la classe des cycliques. C'est une courbe du 4e ordre, bicylindrique, transformée par rayons vecteurs réciproques d'une ellipse de Cassini.

38.

Démonstrations nouvelles des théorèmes de Poncelet, relatifs aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques, déduites des principes précédents.

Les propositions qui précèdent nous conduisent d'une manière directe à une démonstration des théorèmes de Poncelet, qui paraît se distinguer de toutes les démonstrations connues, et que, pour ce motif, nous allons développer ici.

Soient un cône du second degré (H), et un angle polyèdre inscrit de même sommet, formé d'une suite de plans $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

On reconnaît sans difficulté que tous les points du cône satisferont à une équation de la forme

$$\frac{a_1}{P_1} + \frac{a_2}{P_2} + \cdots + \frac{a_n}{P_n} = 0 . \tag{80}$$

Il suffit de remarquer que cette équation est connue pour l'angle trièdre, qu'on la démontrera pour un angle tétraèdre en le décomposant en deux trièdres, en écrivant les équations relatives à ces deux trièdres, et éliminant par addition la face commune, etc.

Cela posé, supposons que les plans $P_1, P_2, \ldots, P_n$, qui se coupent au sommet A du cône (H), soient tous tangents à une sphère (S); il est clair que l'angle polyèdre inscrit dans le cône sera en même temps circonscrit au cône (H_1) de sommet A, circonscrit lui-même à la sphère (S). Pour établir le théorème de Poncelet, il suffira de prouver que, s'il existe un tel angle polyèdre, inscrit à (H), circonscrit à (H_1), il y en a une infinité d'autres satisfaisant aux mêmes conditions.

A cet effet, cherchons l'équation de la courbe de section du cône (H) et de la sphère (S). D'après les principes développés dans la *Deuxième Partie,* il faudra remplacer dans l'équation (80) les quantités P_i, qui représentent les distances à un plan tangent, par R_i^2, R_i désignant la distance d'un point de la courbe au point de contact du plan tangent P_i. L'équation

$$\frac{a_1}{R_1^2} + \frac{a_2}{R_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{R_n^2} = 0 \tag{81}$$

conviendra donc à tous les points de la courbe; elle ne sera pas l'équation de la courbe, et, de même que l'équation (80) représente, en même temps que le cône (H), un cône de degré $n-2$, l'équation (81) représentera, en même temps que l'intersection de la sphère et de (H), une courbe de degré $2(n-2)$. Quoi qu'il en soit, l'équation (81) convient à tous les points de la courbe, et les pôles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont tous sur le petit cercle, intersection de la sphère et du plan polaire du sommet A du cône.

Réciproquement, si nous pouvons trouver une équation semblable à l'équation (81), les nouveaux pôles étant sur le même petit cercle, en remplaçant les nouvelles quantités R_i' par P_i, nous aurons une équation analogue à (80), qui devra représenter un cône identique au premier, puisqu'il a même sommet et même base sphérique. On pourra donc trouver une infinité d'équations de la forme (80), satisfaites pour tous les points du cône (H), c'est-à-dire une infinité d'angles polyèdres inscrits à (H) et circonscrits à (H_1). Nous sommes donc ramenés à la démonstration de la proposition suivante :

Quand une courbe sphérique est définie par l'équation (81), où les quantités R_i désignent des distances rectilignes à des pôles fixes situés sur un petit cercle, son équation conserve la même forme avec d'autres systèmes de pôles fixes situés sur le même petit cercle.

Comme l'équation (81) ne change pas de forme après une transformation par rayons vecteurs réciproques, on peut faire la projection stéréographique, en prenant le point de vue en un point quelconque du petit cercle qui contient les pôles, et nous n'aurons plus qu'à démontrer le théorème suivant :

Si une courbe plane est définie par l'équation (81), où les quantités R_i désignent des distances à des pôles fixes situés en ligne droite, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles fixes situés sur la même ligne droite que les premiers.

Or, cette dernière proposition peut se démontrer comme il suit :

Prenons la ligne des pôles pour axe des x; on aura

$$R_i' = (u - \alpha_i)(v - \alpha_i),$$

où α_i désigne une quantité réelle, abscisse du pôle de rang i, et, par suite, l'équation (81) prendra la forme

$$\sum \frac{a_i}{(u - \alpha_i)(v - \alpha_i)} = 0,$$

ou, en multipliant par $u-v$,

$$\sum \frac{a_i}{u-\alpha_i} = \sum \frac{a_i}{v-\alpha_i},$$

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)}. \tag{82}$$

Dans cette équation, $f(u)$ est de degré inférieur à $\varphi(u)$, et le polynôme $\varphi(u)$ a ses racines réelles. Mais toutes ces propriétés pourront être conservées, si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)+\lambda f(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)+\lambda f(v)}. \tag{83}$$

En décomposant les deux membres en fractions simples, on reviendra à une équation de même forme que l'équation (81), mais *avec de nouveaux pôles;* c. q. f. d.

Il ne sera pas inutile de développer une autre démonstration des théorèmes de Poncelet, bien que cette démonstration ne s'applique qu'aux polygones de degré pair, parce qu'elle nous mettra sur la voie de propositions un peu plus générales que les théorèmes connus.

Si un angle polyèdre d'un nombre pair de faces est inscrit dans un cône (H) et circonscrit au cône (H_1), tous les points du cône (H) satisferont à une équation de la forme

$$P_1 P_2 \dots P_n = Q_1 Q_2 \dots Q_n,$$

où les plans P_i, Q_i sont tangents à la sphère, et par suite la cyclique, section de la sphère par le cône (H_1), satisfera à l'équation

$$R_1 R_2 \dots R_n = K . r_1 r_2 \dots r_n. \tag{84}$$

D'une manière plus précise, cette équation représentera à la fois la cyclique située sur (H_1) et une courbe d'ordre $2n-4$.

On a vu d'ailleurs que, lorsqu'une courbe satisfait à une telle équation, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles. Prenons un autre de ces

systèmes, formé de pôles réels. La nouvelle équation de notre courbe composée sera

$$R'_1 R'_2 \dots R'_n = K_1 . r'_1 r'_2 \dots r'_n , \tag{85}$$

et, si l'on remplace les quantités R'_i, r'_i par P'_i, Q'_i, qui désignent les distances d'un point quelconque aux plans tangents de la sphère en R'_i, r'_i, l'équation

$$P'_1 P'_2 \dots P_n = h . Q'_1 Q'_2 \dots Q'_n \tag{86}$$

représentera une surface d'ordre n, qui coupera la sphère suivant la courbe complète représentée par les équations (84) ou (85). Je dis que cette surface d'ordre n se décompose dans tous les cas en une surface du second ordre contenant la cyclique située sur (H_1) et en une autre surface d'ordre $n-2$ (1).

En effet, le plan P'_i coupe la surface suivant n droites, situées dans les plans Q'_i, et qui contiennent chacune deux points de la courbe sphérique; comme d'ailleurs ce plan P'_i est tangent à la sphère, il coupe la courbe complète (84) en $2n$ points imaginaires, dont quatre appartiennent à la cyclique. Appelons ces points

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \beta_1 , \beta_2 , \dots , \beta_{n-2} ,$$
$$\alpha'_1 , \alpha'_2 , \beta'_1 , \beta'_2 , \dots , \beta'_{n-2} ,$$

les points α_1, α_2, α'_1, α'_2 appartenant à la cyclique, les $2(n-2)$ autres au reste de la courbe. Les droites réelles joignant les points du premier groupe à ceux du second sont évidemment $\alpha_1 \alpha'_1$, $\alpha_2 \alpha'_2$, etc., car les quatre points de la cyclique sont imaginaires conjugués deux à deux. D'ailleurs ces n droites réelles sont évidemment les n droites de la surface (86), situées

(1) Cette surface d'ordre $n-2$ se décompose en réalité en surfaces du second degré, si n est pair; en surfaces du second degré et en un plan, si n est impair. Mais cette proposition, qui est une conséquence très simple du théorème principal, ne joue aucun rôle dans la démonstration que nous donnons ici.

dans le plan P'_i. Nous allons déduire de cette remarque la démonstration de la proposition que nous avons en vue.

Puisque chacun des plans P'_i, Q'_i contient deux droites s'appuyant sur la cyclique, toutes ces droites, en nombre $2n$, appartiennent évidemment à l'une des surfaces du second degré contenant la cyclique. Cette surface du second degré, coupant la surface (86) à la fois suivant $2n$ droites et suivant la cyclique, devra faire partie tout entière de cette surface d'ordre n. La proposition est donc démontrée.

D'ailleurs, étant donnée une quelconque des surfaces du second degré passant par la cyclique, cette surface est obtenue avec une infinité de systèmes de pôles; car il suffit de mener par une des génératrices de la surface deux plans tangents à la sphère. Les points de contact de ces plans tangents sont deux pôles appartenant à un même système et à deux séries différentes. On pourra donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un cône, si on peut lui inscrire un angle polyèdre de n faces circonscrit à la sphère, on pourra de même mener à la sphère une infinité de systèmes de n plans tangents, se coupant, dans un ordre déterminé, suivant les génératrices d'une surface du second degré passant par l'intersection de la sphère et du cône. La surface du second degré est une quelconque de celles qui contiennent la cyclique, et pour chacune d'elles, il y a une infinité de systèmes de n plans.

Transformons par la méthode des polaires réciproques.

Si l'on peut circonscrire à une conique (C) *un polygone inscrit dans une quadrique* (A), *non seulement on pourra construire une infinité de polygones ayant les mêmes propriétés, mais de plus, dans la courbe d'intersection de la surface* (A) *et de toute autre quadrique* (A') *inscrite dans la développable* $\boxed{AC}$, *on pourra inscrire une infinité de polygones formés des génératrices rectilignes de* (A).

Le théorème paraîtra plus simple, si nous en faisons encore une transformation par l'homographie.

Si dans une ligne de courbure d'un ellipsoïde on peut inscrire

un polygone de n côtés, formé avec les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde homofocal contenant cette ligne de courbure, on pourra inscrire une infinité de polygones semblables, formés avec les génératrices des hyperboloïdes homofocaux, non seulement dans la même ligne de courbure, mais encore dans toutes les autres lignes de courbure (1).

Pour les sections principales, ces polygones seront circonscrits à la focale et inscrits dans la section principale. Il en passera un par chaque point de toute ligne de courbure.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer comprennent deux parties distinctes.

1° Si l'on peut inscrire dans la courbe d'intersection de deux surfaces (A), (A′) un polygone formé des génératrices rectilignes de (A′), on pourra en inscrire une infinité d'autres formés de la même manière. Cette première proposition, comme M. Moutard en a fait le premier la remarque en 1864 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*), est au fond le théorème de Poncelet; elle s'en déduit par une simple perspective.

2° La même propriété subsiste, quand on substitue à (A′) toute surface (A″) inscrite dans la développable $\boxed{AA'}$. Cette proposition paraît nouvelle. Sa vérification analytique est extrêmement simple, et elle complète notre démonstration géométrique, qui ne s'appliquerait qu'aux polygones de degré pair.

39.

Transformation des propositions précédentes par la méthode des figures supplémentaires.

Les théorèmes donnés dans cette partie pour les courbes sphériques se transforment immédiatement par la méthode

(1) Ces polygones constituent des routes de lumière; leurs côtés adjacents viennent couper l'ellipsoïde sous des angles égaux.

des figures supplémentaires, et nous pouvons énoncer les propositions suivantes.

Si une courbe sphérique est telle que la somme des périmètres des n triangles sphériques interceptés par son arc tangent dans n angles fixes soit constante, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de n angles.

Si une courbe sphérique est telle que la somme des longueurs interceptées par son arc tangent sur n arcs de cercles fixes, à partir d'une origine fixe sur chaque arc, soit constante, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres systèmes d'arcs.

Si une courbe sphérique est telle que n angles interceptent sur son arc tangent des segments dont la somme algébrique soit nulle, elle conserve la même propriété, quand on substitue aux premiers une infinité de nouveaux angles fixes convenablement choisis.

Ces propositions, sur lesquelles nous n'insisterons pas, s'étendent évidemment aux courbes planes. Elles peuvent être considérées comme la généralisation de ce théorème : un cercle peut être considéré d'une infinité de manières comme l'enveloppe d'un arc de grand cercle interceptant dans un angle fixe un triangle sphérique de périmètre constant.

QUATRIÈME PARTIE.

Étude analytique des surfaces cyclides.

40.

Introduction.

Dans cette partie nous étudions les surfaces du 4e ordre qui ont le cercle de l'infini pour ligne double et les surfaces du 3e ordre qui contiennent ce cercle. Ces dernières surfaces se déduisent des précédentes au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, et d'ailleurs, en leur adjoignant le plan de l'infini, on forme une surface du 4e ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double. Nous désignerons toutes ces surfaces sous la dénomination de *cyclides*, parce qu'elles contiennent dix séries de sections circulaires, et aussi parce qu'elles comprennent comme cas particulier la surface à lignes de courbure circulaires nommée *cyclide* par M. Dupin. Nous réserverons par suite à cette dernière surface le nom de cyclide de Dupin ou cyclide à lignes de courbure circulaires.

Ces surfaces ont été d'abord étudiées en 1864 par M. Moutard qui les a rencontrées en cherchant les surfaces *anallagmatiques*, c'est-à-dire qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation par rayons vecteurs réciproques convenablement choisie. Les cyclides sont donc les anallagmatiques les plus générales du 3e et du 4e ordre. M. Moutard a même montré qu'elles possédaient cette propriété par rapport à cinq pôles différents; il a en outre étudié les cinq séries de sphères doublement tangentes, les sections circulaires formant

dix séries distinctes, et reconnu l'existence de cinq focales, lieux des sphères de rayon nul doublement tangentes à la surface (1).

Les surfaces cyclides comprennent, comme cas particuliers, plusieurs surfaces remarquables : le tore, la cyclide de Dupin, les podaires de quadrique, les transformées par rayons vecteurs réciproques de quadriques, les surfaces de révolution engendrées par la rotation de l'ellipse de Cassini, des ovales de Descartes, etc., autour de leur axe de symétrie. On les rencontre dans un grand nombre de problèmes. L'intérêt qu'elles présentent a été accru par la découverte, publiée à peu près simultanément par M. Moutard et par l'auteur, des lignes de courbure de ces surfaces. Les cyclides peuvent, en effet, faire partie d'un système triple orthogonal, tout à fait analogue à celui des quadriques homofocales.

Dans un travail présenté en 1866 comme thèse à la Faculté des Sciences de Paris et inséré dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* (même année), j'ai étudié ces cyclides orthogonales et le système des coordonnées curvilignes auxquelles elles donnent lieu. D'un autre côté, M. Laguerre, dans une série de notes présentées à la Société Philomathique, a ajouté plusieurs propriétés à celles qu'avait données M. Moutard, et fait connaître, le plus souvent sans démonstration, des propositions élégantes, se rapportant soit aux sections circulaires, soit aux dispositions relatives des focales et des sphères principales des cyclides.

Il est juste de rappeler ici, bien que cet historique soit loin d'être complet, que les cyclides du 3e et du 4e ordre ne sont que des transformées par l'homographie de la surface du 4e ordre à conique double, que M. Kummer a étudiée le premier en 1863 (2), et dont il a reconnu les principales propriétés.

---

(1) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864. — *Bulletin de la Société Philomathique* et *Comptes rendus de l'Académie*, même année.

(2) *Kummer* : Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. (*Journal de Borchardt*, t. LXIV, p. 66, année 1863.)

Depuis, différents géomètres, et en particulier M. Clebsch, ont consacré des Mémoires importants et développés à l'étude de cette surface du 4e ordre. Je citerai en particulier le Mémoire de M. Clebsch publié en 1868 (1). Dans ce travail se trouvent déterminées d'une manière complète les droites et les courbes les plus simples qu'on peut placer sur la surface.

Il est vrai qu'on peut, par une transformation homographique, déduire les propriétés des cyclides de celles de la surface du 4e ordre à conique double. Cependant l'étude directe des cyclides me paraît conserver de l'intérêt. Le choix particulier de la ligne double imprime un caractère remarquable de simplicité à l'étude de ces surfaces, et permet de découvrir des théorèmes dont l'énoncé serait trop compliqué ou peu intéressant quand la conique double est quelconque. Dans tous les cas, on pourra aussi étendre par l'homographie aux surfaces du 4e ordre à conique double et à la surface générale du 3e ordre les propositions trouvées dans la théorie des cyclides.

Nous commencerons par étudier les propriétés les plus élémentaires, et, en particulier, les sections circulaires, les focales, les cinq modes de génération des cyclides du 4e ordre.

41.

Propriétés générales des cyclides.

Soit la surface du 4e ordre représentée par l'équation

$$(1) \qquad (x^2+y^2+z^2)^2+2u_1(x^2+y^2+z^2)+u_2=0,$$

où u_1 désigne un polynôme homogène du premier degré, et u_2 un polynôme quelconque du second degré. Cette équation

(1) *Clebsch* : Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen (*Journal de Borchardt*, t. LXIX, p. 355, année 1868).

On reconnaît sans difficulté que tous les points du cône satisferont à une équation de la forme

$$\frac{a_1}{P_1} + \frac{a_2}{P_2} + \cdots + \frac{a_n}{P_n} = 0 . \tag{80}$$

Il suffit de remarquer que cette équation est connue pour l'angle trièdre, qu'on la démontrera pour un angle tétraèdre en le décomposant en deux trièdres, en écrivant les équations relatives à ces deux trièdres, et éliminant par addition la face commune, etc.

Cela posé, supposons que les plans $P_1, P_2, \ldots, P_n$, qui se coupent au sommet A du cône (H), soient tous tangents à une sphère (S); il est clair que l'angle polyèdre inscrit dans le cône sera en même temps circonscrit au cône (H_1) de sommet A, circonscrit lui-même à la sphère (S). Pour établir le théorème de Poncelet, il suffira de prouver que, s'il existe un tel angle polyèdre, inscrit à (H), circonscrit à (H_1), il y en a une infinité d'autres satisfaisant aux mêmes conditions.

A cet effet, cherchons l'équation de la courbe de section du cône (H) et de la sphère (S). D'après les principes développés dans la *Deuxième Partie*, il faudra remplacer dans l'équation (80) les quantités P_i, qui représentent les distances à un plan tangent, par R_i^2, R_i désignant la distance d'un point de la courbe au point de contact du plan tangent P_i. L'équation

$$\frac{a_1}{R_1^2} + \frac{a_2}{R_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{R_n^2} = 0 \tag{81}$$

conviendra donc à tous les points de la courbe; elle ne sera pas l'équation de la courbe, et, de même que l'équation (80) représente, en même temps que le cône (H), un cône de degré $n-2$, l'équation (81) représentera, en même temps que l'intersection de la sphère et de (H), une courbe de degré $2(n-2)$. Quoi qu'il en soit, l'équation (81) convient à tous les points de la courbe, et les pôles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont tous sur le petit cercle, intersection de la sphère et du plan polaire du sommet A du cône.

Réciproquement, si nous pouvons trouver une équation semblable à l'équation (81), les nouveaux pôles étant sur le même petit cercle, en remplaçant les nouvelles quantités R_i' par P_i, nous aurons une équation analogue à (80), qui devra représenter un cône identique au premier, puisqu'il a même sommet et même base sphérique. On pourra donc trouver une infinité d'équations de la forme (80), satisfaites pour tous les points du cône (H), c'est-à-dire une infinité d'angles polyèdres inscrits à (H) et circonscrits à (H_1). Nous sommes donc ramenés à la démonstration de la proposition suivante :

Quand une courbe sphérique est définie par l'équation (81), où les quantités R_i désignent des distances rectilignes à des pôles fixes situés sur un petit cercle, son équation conserve la même forme avec d'autres systèmes de pôles fixes situés sur le même petit cercle.

Comme l'équation (81) ne change pas de forme après une transformation par rayons vecteurs réciproques, on peut faire la projection stéréographique, en prenant le point de vue en un point quelconque du petit cercle qui contient les pôles, et nous n'aurons plus qu'à démontrer le théorème suivant :

Si une courbe plane est définie par l'équation (81), où les quantités R_i désignent des distances à des pôles fixes situés en ligne droite, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles fixes situés sur la même ligne droite que les premiers.

Or, cette dernière proposition peut se démontrer comme il suit :

Prenons la ligne des pôles pour axe des x; on aura

$$R_i' = (u - \alpha_i)(v - \alpha_i),$$

où α_i désigne une quantité réelle, abscisse du pôle de rang i, et, par suite, l'équation (81) prendra la forme

$$\sum \frac{a_i}{(u - \alpha_i)(v - \alpha_i)} = 0,$$

ou, en multipliant par $u-v$,

$$\sum \frac{a_i}{u-\alpha_i} = \sum \frac{a_i}{v-\alpha_i},$$

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)}. \tag{82}$$

Dans cette équation, $f(u)$ est de degré inférieur à $\varphi(u)$, et le polynôme $\varphi(u)$ a ses racines réelles. Mais toutes ces propriétés pourront être conservées, si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)+\lambda f(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)+\lambda f(v)}. \tag{83}$$

En décomposant les deux membres en fractions simples, on reviendra à une équation de même forme que l'équation (81), mais *avec de nouveaux pôles;* c. q. f. d.

Il ne sera pas inutile de dévelbpper une autre démonstration des théorèmes de Poncelet, bien que cette démonstration ne s'applique qu'aux polygones de degré pair, parce qu'elle nous mettra sur la voie de propositions un peu plus générales que les théorèmes connus.

Si un angle polyèdre d'un nombre pair de faces est inscrit dans un cône (H) et circonscrit au cône (H_1), tous les points du cône (H) satisferont à une équation de la forme

$$P_1 P_2 \dots P_n = Q_1 Q_2 \dots Q_n,$$

où les plans P_i, Q_i sont tangents à la sphère, et par suite la cyclique, section de la sphère par le cône (H_1), satisfera à l'équation

$$R_1 R_2 \dots R_n = K . r_1 r_2 \dots r_n. \tag{84}$$

D'une manière plus précise, cette équation représentera à la fois la cyclique située sur (H_1) et une courbe d'ordre $2n-4$.

On a vu d'ailleurs que, lorsqu'une courbe satisfait à une telle équation, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles. Prenons un autre de ces

systèmes, formé de pôles réels. La nouvelle équation de notre courbe composée sera

$$R'_1 R'_2 \dots R'_n = K_1 . r'_1 r'_2 \dots r'_n , \tag{85}$$

et, si l'on remplace les quantités R'_i, r'_i par P'_i, Q'_i, qui désignent les distances d'un point quelconque aux plans tangents de la sphère en R'_i, r'_i, l'équation

$$P'_1 P'_2 \dots P_n = h . Q'_1 Q'_2 \dots Q'_n \tag{86}$$

représentera une surface d'ordre n, qui coupera la sphère suivant la courbe complète représentée par les équations (84) ou (85). Je dis que cette surface d'ordre n se décompose dans tous les cas en une surface du second ordre contenant la cyclique située sur (H_1) et en une autre surface d'ordre $n-2$ [1].

En effet, le plan P'_i coupe la surface suivant n droites, situées dans les plans Q'_i, et qui contiennent chacune deux points de la courbe sphérique; comme d'ailleurs ce plan P'_i est tangent à la sphère, il coupe la courbe complète (84) en $2n$ points imaginaires, dont quatre appartiennent à la cyclique. Appelons ces points

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \beta_1 , \beta_2 , \dots , \beta_{n-2} ,$$
$$\alpha'_1 , \alpha'_2 , \beta'_1 , \beta'_2 , \dots , \beta'_{n-2} ,$$

les points $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha'_1 , \alpha'_2$ appartenant à la cyclique, les $2(n-2)$ autres au reste de la courbe. Les droites réelles joignant les points du premier groupe à ceux du second sont évidemment $\alpha_1 \alpha'_1$, $\alpha_2 \alpha'_2$, etc., car les quatre points de la cyclique sont imaginaires conjugués deux à deux. D'ailleurs ces n droites réelles sont évidemment les n droites de la surface (86), situées

---

[1] Cette surface d'ordre $n-2$ se décompose en réalité en surfaces du second degré, si n est pair; en surfaces du second degré et en un plan, si n est impair. Mais cette proposition, qui est une conséquence très simple du théorème principal, ne joue aucun rôle dans la démonstration que nous donnons ici.

dans le plan P'_i. Nous allons déduire de cette remarque la démonstration de la proposition que nous avons en vue.

Puisque chacun des plans P'_i, Q'_i contient deux droites s'appuyant sur la cyclique, toutes ces droites, en nombre $2n$, appartiennent évidemment à l'une des surfaces du second degré contenant la cyclique. Cette surface du second degré, coupant la surface (86) à la fois suivant $2n$ droites et suivant la cyclique, devra faire partie tout entière de cette surface d'ordre n. La proposition est donc démontrée.

D'ailleurs, étant donnée une quelconque des surfaces du second degré passant par la cyclique, cette surface est obtenue avec une infinité de systèmes de pôles; car il suffit de mener par une des génératrices de la surface deux plans tangents à la sphère. Les points de contact de ces plans tangents sont deux pôles appartenant à un même système et à deux séries différentes. On pourra donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un cône, si on peut lui inscrire un angle polyèdre de n faces circonscrit à la sphère, on pourra de même mener à la sphère une infinité de systèmes de n plans tangents, se coupant, dans un ordre déterminé, suivant les génératrices d'une surface du second degré passant par l'intersection de la sphère et du cône. La surface du second degré est une quelconque de celles qui contiennent la cyclique, et pour chacune d'elles, il y a une infinité de systèmes de n plans.

Transformons par la méthode des polaires réciproques.

Si l'on peut circonscrire à une conique (C) *un polygone inscrit dans une quadrique* (A), *non seulement on pourra construire une infinité de polygones ayant les mêmes propriétés, mais de plus, dans la courbe d'intersection de la surface* (A) *et de toute autre quadrique* (A') *inscrite dans la développable* $\boxed{AC}$, *on pourra inscrire une infinité de polygones formés des génératrices rectilignes de* (A).

Le théorème paraîtra plus simple, si nous en faisons encore une transformation par l'homographie.

Si dans une ligne de courbure d'un ellipsoïde on peut inscrire

un polygone de n côtés, formé avec les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde homofocal contenant cette ligne de courbure, on pourra inscrire une infinité de polygones semblables, formés avec les génératrices des hyperboloïdes homofocaux, non seulement dans la même ligne de courbure, mais encore dans toutes les autres lignes de courbure (1).

Pour les sections principales, ces polygones seront circonscrits à la focale et inscrits dans la section principale. Il en passera un par chaque point de toute ligne de courbure.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer comprennent deux parties distinctes.

1° Si l'on peut inscrire dans la courbe d'intersection de deux surfaces (A), (A') un polygone formé des génératrices rectilignes de (A'), on pourra en inscrire une infinité d'autres formés de la même manière. Cette première proposition, comme M. Moutard en a fait le premier la remarque en 1864 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*), est au fond le théorème de Poncelet; elle s'en déduit par une simple perspective.

2° La même propriété subsiste, quand on substitue à (A') toute surface (A'') inscrite dans la développable $\boxed{AA'}$. Cette proposition paraît nouvelle. Sa vérification analytique est extrêmement simple, et elle complète notre démonstration géométrique, qui ne s'appliquerait qu'aux polygones de degré pair.

39.

Transformation des propositions précédentes par la méthode des figures supplémentaires.

Les théorèmes donnés dans cette partie pour les courbes sphériques se transforment immédiatement par la méthode

(1) Ces polygones constituent des routes de lumière; leurs côtés adjacents viennent couper l'ellipsoïde sous des angles égaux.

des figures supplémentaires, et nous pouvons énoncer les propositions suivantes.

Si une courbe sphérique est telle que la somme des périmètres des n triangles sphériques interceptés par son arc tangent dans n angles fixes soit constante, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de n angles.

Si une courbe sphérique est telle que la somme des longueurs interceptées par son arc tangent sur n arcs de cercles fixes, à partir d'une origine fixe sur chaque arc, soit constante, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres systèmes d'arcs.

Si une courbe sphérique est telle que n angles interceptent sur son arc tangent des segments dont la somme algébrique soit nulle, elle conserve la même propriété, quand on substitue aux premiers une infinité de nouveaux angles fixes convenablement choisis.

Ces propositions, sur lesquelles nous n'insisterons pas, s'étendent évidemment aux courbes planes. Elles peuvent être considérées comme la généralisation de ce théorème : un cercle peut être considéré d'une infinité de manières comme l'enveloppe d'un arc de grand cercle interceptant dans un angle fixe un triangle sphérique de périmètre constant.

QUATRIÈME PARTIE.

Étude analytique des surfaces cyclides.

40.

Introduction.

Dans cette partie nous étudions les surfaces du 4e ordre qui ont le cercle de l'infini pour ligne double et les surfaces du 3e ordre qui contiennent ce cercle. Ces dernières surfaces se déduisent des précédentes au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, et d'ailleurs, en leur adjoignant le plan de l'infini, on forme une surface du 4e ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double. Nous désignerons toutes ces surfaces sous la dénomination de *cyclides*, parce qu'elles contiennent dix séries de sections circulaires, et aussi parce qu'elles comprennent comme cas particulier la surface à lignes de courbure circulaires nommée *cyclide* par M. Dupin. Nous réserverons par suite à cette dernière surface le nom de cyclide de Dupin ou cyclide à lignes de courbure circulaires.

Ces surfaces ont été d'abord étudiées en 1864 par M. Moutard qui les a rencontrées en cherchant les surfaces *anallagmatiques*, c'est-à-dire qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation par rayons vecteurs réciproques convenablement choisie. Les cyclides sont donc les anallagmatiques les plus générales du 3e et du 4e ordre. M. Moutard a même montré qu'elles possédaient cette propriété par rapport à cinq pôles différents; il a en outre étudié les cinq séries de sphères doublement tangentes, les sections circulaires formant

asymptotes des cinq quadriques homofocales, sont homocycliques.

On peut d'ailleurs obtenir leurs équations, en les considérant comme des quadriques inscrites dans la cyclide. En effet, l'équation

$$(12)\quad \begin{cases} (A-\lambda)x^2+(A'-\lambda)y^2+(A''-\lambda)z^2+2Cx+2C'y+2C''z \\ \qquad +D-\lambda^2=0\,, \end{cases}$$

analogue à l'équation (3), représente toute quadrique (V) inscrite dans la cyclide. Cette quadrique sera un cône, si l'on a

$$\frac{C^2}{\lambda-A}+\frac{C'^2}{\lambda-A'}+\frac{C''^2}{\lambda-A''}+D-\lambda^2=0\,.$$

C'est l'équation déjà obtenue pour λ.

On a donc cinq cônes inscrits, c'est-à-dire dont les plans tangents seront plans tangents doubles de la cyclide, et la couperont, par conséquent, suivant deux cercles. L'équation de la cyclide sera

$$(13)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2+2\lambda)^2+4(A-\lambda)x^2+4(A'-\lambda)y^2+4(A''-\lambda)z^2 \\ \qquad +8Cx+8C'y+8C''z+4D-4\lambda^2=0\,. \end{cases}$$

Nous voyons, sur l'équation (12), que le cône ne sera réel que si λ est compris entre A et A″, c'est-à-dire si la surface déférente correspondante est un des deux hyperboloïdes. Comme le premier membre de l'équation (12) est négatif, d'après l'équation (13), pour tous les points de la cyclide, cette surface sera tout entière à l'intérieur, ou tout entière à l'extérieur du cône doublement tangent. Si λ est compris entre A et A′, la déférente est un hyperboloïde à deux nappes; la cyclide est à l'intérieur du cône. Si λ est compris entre A′ et A″, la déférente est un hyperboloïde à une nappe; la cyclide est à l'extérieur de son cône doublement tangent. Dans ce dernier cas, de tout point de la cyclide, on peut mener des plans tangents réels au cône. Les sections circulaires contenues dans ces plans seront réelles. Il n'en sera pas de même dans les cas précédents. Donc

Les sections circulaires appartenant à un mode de génération ne sont réelles que si la déférente est un hyperboloïde réglé, et alors elles le sont toujours, pourvu que la cyclide soit réelle.

Cette proposition sera confirmée par l'étude géométrique des cyclides.

Voici quelques autres conséquences.

D'abord, par chaque point de la cyclide, on peut faire passer 10 plans tangents doubles, qui sont tangents aux 5 cônes du second degré. Il passe donc 10 cercles réels ou imaginaires par chaque point de la surface. Ainsi, les 10 séries de coniques, qui se trouvent sur toute surface du second ordre à conique double, sont ici formées exclusivement avec des cercles. De plus, comme nous avons vu qu'il y a une ou trois racines de l'équation en λ entre A' et A'', c'est-à-dire que parmi les déférentes il y aura un ou trois hyperboloïdes réglés, il s'ensuit que la cyclide aura une série double ou trois séries doubles de sections circulaires réelles. Nous reviendrons sur ce point.

La détermination des focales est aussi une conséquence des résultats obtenus. Celles des sphères doublement tangentes à la cyclide qui se réduisent à des points ont nécessairement leur centre à l'intersection de la surface déférente et de la sphère directrice qui lui correspond. Donc

Les focales de la cyclide sont les cinq courbes cycliques, intersections de chacune des sphères directrices (S_i) *avec la quadrique déférente* (A_i) *qui lui correspond.*

Ces cinq courbes sont évidemment celles qui ont été examinées dans la *Deuxième Partie* de ce travail; elles constituent les lignes doubles de la développable circonscrite à la cyclide et au cercle de l'infini. Elles sont focales les unes des autres. Si l'on se donne l'une d'elles, les autres se détermineront comme il a été indiqué dans la *Deuxième Partie.*

Si l'on se donne une focale d'une cyclide inconnue, quoique les autres focales puissent être déterminées, la cyclide ne le sera pas. La sphère qui contient la focale est bien la sphère

directrice d'un mode de génération; mais on pourra lui associer comme déférente une quelconque des quadriques qui contiennent la focale. L'équation des cyclides qui admettent pour focales cinq courbes données, focales les unes des autres, contiendra donc nécessairement, et d'une manière rationnelle, un paramètre variable λ.

Un mode de transformation que nous allons étudier nous montrera d'ailleurs, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux principes énoncés dans la *Première* et la *Deuxième Partie*, que les cinq focales sont les lignes doubles de la développable circonscrite à la cyclide et au cercle de l'infini.

44.

Généralités sur les surfaces anallagmatiques.

Nous allons, avant de continuer cette étude, indiquer quelques propriétés générales des surfaces anallagmatiques, que nous appliquerons ensuite aux cyclides.

La définition générale de ces surfaces est la suivante : Elles sont les surfaces enveloppes d'une sphère variable, qui demeure orthogonale à une sphère fixe (S) (la *sphère directrice*), et dont le centre décrit une surface quelconque (B), que nous appellerons la *déférente*.

Soit M un point de la déférente et (P) le plan tangent en ce point. La sphère ayant son centre au point M et orthogonale à (S) touchera son enveloppe en deux points m, m', placés symétriquement par rapport au plan (P). Je dis que la droite mm' va passer au centre O de (S).

En effet, toutes les sphères doublement tangentes, qui ont leurs centres en des points de la déférente voisins de M, pourront être considérées comme ayant leurs centres dans le plan tangent (P), et se coupant aux deux points cherchés m, m'. Toutes ces sphères coupant à angle droit la sphère directrice (S), leur axe radical mm' passera donc par le point O. D'où la règle suivante :

Les points de contact m, m' de chaque sphère de centre M doublement tangente avec l'anallagmatique, sont sur la perpendiculaire abaissée du centre O de la sphère directrice sur le plan tangent à la déférente au point M. On a d'ailleurs

$$Om \cdot Om' = R^2,$$

R étant le rayon de la sphère directrice.

On peut encore définir autrement les points m, m'. Toutes les sphères orthogonales à (S) et ayant leurs centres dans le plan (P) couperont à angle droit toutes les sphères passant par l'intersection de (S) et de (P). En particulier, elles contiendront les deux sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (P). Les centres de ces deux sphères sont donc les points m, m'.

Donc l'anallagmatique peut être considérée comme le lieu des centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de la sphère directrice et des plans tangents à la déférente.

De la remarque précédente, qui a déjà été faite par M. Laguerre, il résulte que les points m, m' ne seront réels que si le plan (P) tangent en M ne rencontre pas la sphère directrice. Par conséquent, si l'on circonscrit à la déférente (B) et à la sphère (S) une développable, la courbe de contact de cette développable et de la déférente découpera celle-ci en régions, pour chacune desquelles le plan tangent coupera toujours ou ne coupera jamais la sphère directrice. Celles des régions de (B) pour lesquelles le plan tangent ne coupe pas la sphère (S) donnent seules des points réels de l'anallagmatique; elles donnent lieu à une nappe de même connexion que la région d'où elle dérive. Toutefois, pour que cette proposition soit exacte, il faut considérer la région de (B) d'où dérive la nappe de l'anallagmatique comme formée de deux feuillets distincts se réunissant l'un à l'autre sur le contour de cette région. Nous ferons une application de cette remarque dans l'étude de la forme des cyclides.

Une conséquence importante et nouvelle résulte encore de la construction précédente. C'est que *les points de contact m, m' ne dépendent que du plan tangent et nullement du point de contact de ce plan.* Il suit de là que l'étude des anallagmatiques équivaut à la théorie d'un mode de transformation dans lequel à un plan variable on fait correspondre les deux sphères de rayon nul passant par l'intersection de ce plan et d'une sphère directrice fixe. Ainsi, à un plan de la première figure correspondent deux points de la seconde; mais à un point de celle-ci ne correspond qu'un seul plan dans la première.

Comme les géomètres sont plus habitués aux transformations dans lesquelles les points correspondent aux points, on pourra substituer à la figure formée par les plans sa polaire réciproque par rapport à la sphère, et alors on obtiendra une transformation qu'on peut définir ainsi qu'il suit :

Étant donné un point μ, à ce point on fait correspondre les deux points m, m', centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et du plan polaire de μ [par rapport à (S)].

On voit que m et m' ne seront réels que si le point μ est à l'intérieur de la sphère (S). Les points m, m', μ seront en ligne droite avec le centre O de (S), et l'on aura

$$Om \cdot Om' = R^2, \quad Om + Om' = \frac{2R^2}{O\mu}$$

Si la sphère (S), tout en ayant son centre O réel, a son rayon de la forme $k\sqrt{-1}$, les points m, m' seront, au contraire, toujours réels, et ils seront de part et d'autre du point O sur la droite $O\mu$. On aura

$$Om \cdot Om' = -k^2, \quad Om + Om' = \frac{-2k^2}{O\mu}.$$

Dans ce mode de transformation, à une surface (B'), lieu du point μ, correspond une surface anallagmatique (Σ), dont la sphère directrice est (S), et dont la déférente est la polaire (B) de (B') par rapport à (S). Le degré de (Σ) sera généralement

double de celui de (B'), à moins que (B') ne passe au centre de la sphère directrice. Nous allons, du reste, donner les formules qui définissent la transformation.

Prenons pour origine des coordonnées le centre O de la sphère directrice. Soit R le rayon de cette sphère, et désignons par x, y, z les coordonnées du point m. Celles du point m' seront, par conséquent,

$$\frac{R^2x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Le plan polaire du point μ doit être le lieu des points à égale distance de m et de m'. En écrivant cette propriété, on a pour l'équation de ce plan

$$2Xx+2Yy+2Zz=R^2+x^2+y^2+z^2.$$

Si donc on appelle x', y', z' les coordonnées du point μ, les formules qui définissent la transformation sont

$$(14)\quad \begin{cases} x'=\dfrac{2R^2x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \quad y'=\dfrac{2R^2y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \\ z'=\dfrac{2R^2z}{x^2+y^2+z^2+R^2}. \end{cases}$$

Ces formules avaient été indiquées dans un travail de l'auteur (*Annales de l'École Normale,* 1864). En posant

$$(14')\quad \Omega=R^2-x'^2-y'^2-z'^2=R^2\left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right)^2,$$

on en déduit

$$(14'')\quad \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=\frac{R}{R\pm\sqrt{\Omega}}.$$

On voit que, si le point μ (x', y', z') décrit un plan, les points m, m' décriront une sphère, nécessairement orthogonale à la sphère directrice : cela résulte de l'identité

$$(15)\quad \begin{cases} mx'+ny'+pz'+q \\ =\dfrac{2R^2(mx+ny+pz+q)+q(x^2+y^2+z^2-R^2)}{x^2+y^2+z^2+R^2}. \end{cases}$$

La sphère correspondante à un plan (P) sera donc déterminée par la double condition d'être orthogonale à (S) et de passer par l'intersection de (S) et de (P). Elle se réduira à un plan quand le plan (P) passera au centre de (S), à un point-sphère quand le plan (P) sera tangent à (S).

L'identité (15) équivaut à une formule qui permet de transformer les équations des courbes et des surfaces. Soient en effet

P la distance du point μ au plan (P),

T la tangente menée de m à la sphère (T) correspondante au plan (P),

α l'angle sous lequel le plan (P) coupe (S).

L'identité (15) pourra s'écrire

$$P = \frac{R\cos\alpha \cdot T^2}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}, \tag{16}$$

et il résulte de cette formule la règle suivante :

Si une surface (B') est définie par une équation *homogène* entre les distances P, P', P'', ... d'un de ses points à plusieurs plans fixes, pour avoir l'équation de l'anallagmatique (Σ) correspondante, il suffit de remplacer P, P', P'', ... par les carrés des tangentes à des sphères orthogonales à la sphère directrice, correspondantes aux plans fixes, ces carrés étant multipliés par des constantes, que la formule (16) apprend à déterminer.

Deux cas particuliers doivent être signalés : 1° si le plan (P) est tangent à la sphère en un point a, P doit être remplacé par le carré de la distance au point a; 2° si (P) passe par le centre de (S), il se correspond à lui-même, et l'on ne doit pas modifier le facteur P, ou plutôt on doit le multiplier par 2R.

45.

D'un mode de transformation déduit de la théorie des anallagmatiques.

Les formules précédentes (15) et (16) nous montrent qu'en désignant par *première figure* le lieu des points μ et *deuxième*

figure le lieu des points m, m', à un point m de la deuxième figure correspond un seul point μ de la première; mais que, au contraire, à un point μ correspondent deux points m, m'. Il y a un cas particulier remarquable : c'est celui où le point μ coïncide avec le centre O de la sphère directrice. A ce point O correspondent tous les points à l'infini. C'est ce qui résulte et de la construction et des formules. Car si, dans les équations (14), $x^2 + y^2 + z^2$ devient infini, x', y', z' deviennent nuls.

Ainsi, à un point μ coïncidant avec O correspondent deux points m, m', l'un au point O, l'autre quelconque à l'infini.

A un point μ, situé sur le cône asymptote de la sphère directrice, correspondent deux points, l'un à l'infini sur le cercle et sur la droite $O\mu$, l'autre au milieu de $O\mu$, etc.

A une courbe de degré n de la première figure correspond, dans la seconde, une courbe de degré double $2n$, coupant le cercle de l'infini en $2n$ points. Cependant, si α branches de la courbe passent en O, le degré de la courbe correspondante diminue de α, ainsi que le nombre de points communs avec le cercle de l'infini.

A une surface de la première figure d'ordre n, ayant en O un point multiple d'ordre p, correspond une anallagmatique d'ordre $2n-p$.

Mais le fait essentiel est le suivant :

Si une courbe est tangente en a à la sphère (S), la courbe anallagmatique correspondante a un point double en a.

Si une surface est tangente en a à la sphère (S), la surface anallagmatique correspondante a un point conique en a.

Si une surface est tangente à (S) en tous les points d'une ligne (L), celle-ci est ligne double de l'anallagmatique correspondante.

Faisons quelques applications.

A une droite δ correspond un cercle, situé dans le plan de O et de δ, coupant (S) à angles droits, et passant par l'intersection de (S) et de δ. Si δ devient tangente à (S) en a, le cercle a

son rayon nul, et se décompose en deux droites se coupant en a, situées dans le plan (O, δ), et allant rencontrer le cercle de l'infini.

A un plan correspond une sphère, qui se réduit, quand le plan devient tangent à (S), au point de contact de ce plan.

A une conique correspond une courbe sphérique du 4e ordre, allant rencontrer le cercle de l'infini en quatre points, c'est-à-dire une cyclique. Cette cyclique acquiert deux points doubles, c'est-à-dire se décompose en deux cercles, si la conique correspondante est doublement tangente à (S).

A une quadrique correspond une cyclide du 3e ou du 4e ordre, suivant que la quadrique passe ou ne passe pas au point O; etc.

Soient une surface (B') et l'anallagmatique correspondante (Σ). Les focales de (Σ) se déterminent de la manière suivante : Circonscrivons à (B') et à (S) une développable (Δ), et soit (F) la courbe de contact de cette développable (Δ) et de (S). Les plans de (Δ) ont pour correspondants les points-sphères ayant leurs centres sur (F). Donc la surface (Δ') correspondante à (Δ) sera l'enveloppe d'une suite de sphères de rayon nul, et par conséquent sera une développable focale. Ses génératrices correspondront par couples à celles de (Δ); elle aura une courbe double de plus que (Δ), la courbe (F).

Appliquons les remarques précédentes à l'étude des cyclides. La cyclide sera l'anallagmatique correspondante à une surface (A') du second degré, et ayant pour déférente la polaire réciproque (A) de (A') par rapport à (S). A la développable $\boxed{(A')(S)}$ correspond la développable focale circonscrite à la cyclide. On voit que cette développable aura cinq lignes doubles : 1° la courbe de contact sur (S) de $\boxed{(A')(S)}$; 2° les quatre courbes cycliques correspondantes aux quatre lignes de striction de la même développable. Les plans de ces quatre lignes étant conjugués, les sphères correspondantes, qui sont orthogonales à (S) seront orthogonales entre elles. Au système de quadriques inscrites dans la développable $\boxed{(A')(S)}$ correspondront les cyclides homofocales; etc.

L'équation de toute surface pouvant être mise sous la forme

$$f(P, P', P'', P''') = 0,$$

f désignant une fonction homogène, l'anallagmatique correspondante aura pour équation

$$f(aS, bS', cS'', dS''') = 0;$$

d'où il suit que *toute équation homogène par rapport aux quatre quantités* S, S', S'', S''', *puissances d'un point par rapport à quatre sphères, représente une surface anallagmatique par rapport à la sphère radicale ou orthogonale de ces quatre sphères.*

Par exemple, l'équation d'une cyclide peut se mettre, et d'une infinité de manières, sous les formes

$$SS' = k \cdot S''S''',$$
$$AS^2 + A'S'^2 + A''S''^2 + A'''S'''^2 = 0,$$

correspondantes à des formes connues de l'équation d'une quadrique.

A des cercles de la seconde figure correspondent dans la première soit des droites, soit des coniques doublement tangentes à (S). Il suit de là qu'une anallagmatique (Σ) ne pourra être engendrée par un cercle que si la surface (B') correspondante est réglée ou est engendrée par des coniques doublement tangentes à (S).

Par exemple, si (B') est une quadrique, 1° ses droites donneront une série double de sections circulaires de la cyclide; 2° elle peut aussi être engendrée de quatre manières différentes par des coniques doublement tangentes à (S), et les plans de ces coniques enveloppent l'un des quatre cônes passant par l'intersection de (B') et de (S). A ces quatre séries de coniques correspondront quatre nouvelles séries doubles de sections circulaires de la cyclide. On aura donc les cinq séries doubles de sections circulaires de la cyclide.

46.

De la forme générale des cyclides, du nombre de leurs focales et de leurs sections circulaires réelles.

Nous pouvons maintenant nous faire une idée assez nette des différentes formes des cyclides. Il suffit de discuter les équations (6), (7), (8), qui déterminent les différents modes de génération de la surface.

D'abord, nous avons vu que l'équation (6) en λ a au moins trois racines réelles. Dans chacun des intervalles des quantités $A, A', A'', +\infty$, il y a une ou trois racines réelles (art. 40).

A toute racine comprise entre A et A' correspond une déférente, qui est un hyperboloïde à deux nappes;

A toute racine comprise entre A' et A'', un hyperboloïde à une nappe;

A toute racine supérieure à A'', un ellipsoïde réel;

A toute racine inférieure à A, un ellipsoïde imaginaire.

Il y a donc, parmi les surfaces déférentes, trois quadriques réelles au moins : un ellipsoïde réel, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes. Je dis, de plus, qu'à la racine unique comprise dans chacun des intervalles de $A, A', A'', +\infty$, ou à la plus petite et à la plus grande des racines, s'il y en a trois dans cet intervalle, correspond toujours une sphère directrice de centre et de rayon réels.

En effet, nous avons vu (art. 40) que le rayon de la sphère directrice est $\sqrt{-L'}$, L' désignant la dérivée de L. Lorsque λ varie dans un des intervalles considérés, la fonction L est d'abord positive. La dérivée L' sera donc négative pour toutes les racines d'ordre impair contenues dans cet intervalle. Donc, s'il y a trois racines, la plus petite et la plus grande donneront un rayon réel. Au contraire, pour la racine moyenne, le carré du rayon sera négatif.

Nous pouvons donc conclure que, dans tous les cas, trois

des cinq modes de génération de la cyclide seront formés avec des quadriques et des sphères réelles.

Si l'équation en λ a ses cinq racines réelles, les deux derniers modes de génération seront formés avec deux surfaces qui pourront être deux ellipsoïdes imaginaires, mais qui seront toujours de même espèce. Des deux sphères correspondantes qui ont leurs centres réels, l'une sera réelle; mais, pour l'autre, le carré du rayon sera négatif.

Les résultats obtenus ici sont d'accord avec ceux de l'article 19, où nous avons examiné le nombre des focales réelles des courbes cycliques.

Si l'équation en λ a deux racines imaginaires, trois seulement des sphères contenant les focales sont réelles. Nous avons vu que, dans ce cas, les trois focales correspondantes sont réelles et se composent d'un seul trait.

Si l'équation en λ a ses cinq racines réelles, quatre des sphères sont réelles; mais deux seulement des focales sont réelles, et se composent chacune de deux traits distincts (1).

Dans le cas où l'équation en λ a ses cinq racines réelles, il y a un mode de génération qui caractérise la cyclide : c'est celui qui correspond à la sphère de centre réel, mais de rayon imaginaire. Cela posé, nous pouvons reconnaître la forme générale de la cyclide.

1° L'équation en λ a deux racines imaginaires. Soit un des trois modes de génération formé avec l'ellipsoïde réel (A) et la sphère réelle (S). La développable $\boxed{(S)(A)}$ est réelle, et se compose d'une seule nappe (de même que la focale se compose d'un seul trait). La courbe de contact de cette développable avec l'ellipsoïde (A) partage cette quadrique en deux régions : l'une d'elles donne tous les points réels de la cyclide (art. 42).

---

(1) Les cinq focales ne sauraient être toutes imaginaires, puisque, les équations de l'une d'elles au moins étant réelles, les foyers de cette courbe seront réels. Or l'un de ces foyers est un point d'une autre focale, qui, ayant un point réel, est réelle.

Comme cette région est à connexion simple, on voit que la cyclide sera ici une *surface toujours réelle, formée d'une seule nappe à connexion simple*. Elle aura une seule série double de sections circulaires réelles, puisque une seule des trois déférentes est réglée.

2° L'équation en λ a toutes ses racines réelles. La surface déférente (A), correspondante à la sphère de rayon $k\sqrt{-1}$, est un ellipsoïde imaginaire. La cyclide *est imaginaire*.

3° L'ellipsoïde déférent du même mode de génération est réel. Alors toute droite passant par le centre O de (S) coupe la cyclide en quatre points toujours réels, correspondants aux deux plans tangents de l'ellipsoïde perpendiculaires à cette droite. La cyclide se compose *de deux nappes enveloppant le point* O, *et à l'intérieur l'une de l'autre. Elles sont à connexion simple.*

Trois des surfaces déférentes sont des ellipsoïdes réels, il y a une seule série de sections circulaires réelles.

4° L'équation en λ ayant toujours ses racines réelles, la surface déférente du même mode de génération est un hyperboloïde à deux nappes.

Alors le cône doublement tangent à la cyclide ayant le point O pour sommet est réel, la cyclide est à l'intérieur de ce cône (art. 43). Elle se compose donc de *deux nappes opposées situées à l'intérieur de chacune des deux nappes du cône et à connexion simple*. Trois des déférentes sont des hyperboloïdes à deux nappes, il n'y a encore qu'une seule série double de sections circulaires réelles.

5° La déférente du même mode de génération est un hyperboloïde à une nappe. Le cône doublement tangent à la cyclide est toujours réel, mais la surface est à l'extérieur de ce cône. Elle se compose d'*une seule nappe à connexion triple, semblable à un tore ordinaire*. Il suffit de concevoir que les deux séries de sections circulaires, confondues dans le tore, se dédoublent, par exemple qu'on fasse varier d'une quantité suffisamment petite les coefficients des coordonnées dans l'équation d'un tore rapportée à des axes quelconques.

Dans ce cas trois des déférentes étant des hyperboloïdes réglés, il y a six séries de sections circulaires réelles disposées à peu près comme celles d'un tore, après qu'on aurait dédoublé par une déformation les sections méridiennes et les sections parallèles qui représentent deux séries confondues.

On voit qu'il existe quatre espèces distinctes de cyclides réelles du 4e ordre. Les cyclides du 3e ordre se déduisant des précédentes au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques auront seulement trois formes distinctes.

47.

Du système des cyclides homofocales.

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une cyclide, on obtient une nouvelle cyclide dont les focales sont les transformées des focales de la précédente. En particulier, si l'on prend le pôle de transformation au point de rencontre de trois des sphères directrices (il y a un ou quatre de ces points qui sont réels), trois des focales deviendront planes, les trois sphères directrices se changeront en trois plans rectangulaires, et les sphères doublement tangentes de la cyclique, qui étaient orthogonales à ces sphères directrices, auront leurs centres dans les plans correspondants. La nouvelle cyclide aura trois plans de symétrie. On peut donc affirmer que le système le plus général de cyclides homofocales est le transformé par la méthode des rayons vecteurs réciproques de celui des cyclides homofocales à trois plans de symétrie.

Ces dernières cyclides homofocales ont été étudiées d'une manière détaillée par l'auteur dans un travail présenté comme thèse en 1866 à la Faculté des Sciences de Paris, et qui a été inséré dans les *Annales de l'École Normale* (même année).

Aussi allons-nous examiner de préférence ici le système le plus général de cyclides homofocales, et donner des équations

symétriques représentant les cyclides les plus générales du 3e et du 4e ordre.

A cet effet, étant donnée une sphère (S), définie par l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,$$

nous allons chercher l'équation des quadriques inscrites dans une développable circonscrite à cette sphère; puis, en soumettant ces quadriques à la transformation indiquée (art. 44), nous obtiendrons l'équation générale des cyclides homofocales.

Soient

$$(17) \quad P_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' + d_i R\sqrt{-1} = 0, \quad (i = 1,2,3,4)$$

les équations des quatre faces du tétraèdre conjugué commun à toutes les quadriques et à la sphère (S), et supposons que les coefficients aient été choisis de telle manière que l'on ait identiquement

$$(18) \quad \sum_1^4 P_i^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2.$$

On aura, entre les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i, les relations qui conviennent à toute substitution linéaire orthogonale, et en particulier celles-ci,

$$(19) \quad a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 = 1,$$

$$(20) \quad a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j + d_i d = 0.$$

L'équation

$$(21) \quad \frac{a-a_1}{\lambda-a_1} P_1^2 + \frac{a-a_2}{\lambda-a_2} P_2^2 + \frac{a-a_3}{\lambda-a_3} P_3^2 + \frac{a-a_4}{\lambda-a_4} P_4^2 = 0$$

représentera des quadriques inscrites dans une développable Δ, et d'ailleurs cette développable sera circonscrite à la sphère (S); car il suffit, pour obtenir l'équation de cette sphère, de faire $\lambda = a$ dans l'équation précédente. D'ailleurs, cette équation peut encore s'écrire

$$\sum \frac{a-\lambda}{\lambda-a_i} P_i^2 + \sum P_i^2 = 0.$$

ou, en tenant compte de l'identité (18),

$$(22)\qquad \frac{R^2-x'^2-y'^2-z'^2}{\lambda-a}+\frac{P_1^2}{\lambda-a_1}+\frac{P_2^2}{\lambda-a_2}+\frac{P_3^2}{\lambda-a_3}+\frac{P_4^2}{\lambda-a_4}=0.$$

Telle est la forme qu'on peut donner à l'équation des quadriques considérées, et il est bon de remarquer que cette équation n'est qu'en apparence du 4e degré en λ. Après qu'on aura chassé les dénominateurs, le coefficient de λ^4 sera nul identiquement, en vertu de l'équation (18).

Cela posé, soumettons nos quadriques au mode de transformation défini par les formules (14) (art. 44), et nous obtiendrons les cyclides homofocales. Voyons ce que devient l'équation (22). On a

$$(23)\qquad P_i=\frac{2R^2a_ix+2R^2b_iy+2R^2c_iz+d_iR\sqrt{-1}\,(x^2+y^2+z^2+R^2)}{x^2+y^2+z^2+R^2}.$$

Le plan $P_i=0$ se transforme donc en une sphère (S_i), orthogonale à la proposée. Appelons R_i le rayon de cette sphère. On aura

$$R_i^2=-\frac{R^2a_i^2}{d_i^2}-\frac{R^2b_i^2}{d_i^2}-\frac{R^2c_i^2}{d_i^2}-R^2,$$

ou, en vertu des formules (19);

$$R_i^2=-\frac{R^2}{d_i^2},\qquad R_i=\frac{R}{d_i\sqrt{-1}}.$$

Donc, si nous appelons S_i la puissance d'un point par rapport à la sphère (S_i), on aura

$$(24)\qquad P_i=\frac{R^2S_i}{R_i\,(x^2+y^2+z^2+R^2)}.$$

Enfin, si l'on tient compte de l'équation (14), on pourra transformer le premier terme de l'équation (22), et l'on aura

$$R^2-x'^2-y'^2-z'^2=R^2\left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right)=\frac{R^2S^2}{(x^2+y^2+z^2+R^2)^2},$$

S désignant la puissance du point (x, y, z) par rapport à la

sphère (S). En réunissant tous ces résultats, l'équation (22) se transformera dans la suivante,

$$\frac{\left(\frac{S}{R}\right)^2}{\lambda-a}+\frac{\left(\frac{S_1}{R_1}\right)^2}{\lambda-a_1}+\frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{\lambda-a_2}+\frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda-a_3}+\frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda-a_4}=0.$$

Cette équation représente les cyclides homofocales, et, d'après une remarque déjà faite, elle n'est qu'en apparence du 4e degré. De plus, il suit des formules (20) et (23) que les quatre sphères (S_i), qui sont orthogonales à (S), sont aussi orthogonales entre elles. Donc, si, pour plus de symétrie, au lieu de S nous mettons S_0 dans la formule précédente, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

L'équation

$$\sum_{1}^{5}\frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda-a_i}=0 \tag{25}$$

où les cinq quantités S_i *sont les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales, représente un quelconque des systèmes de cyclides homofocales ayant les cinq sphères* (S_i) *pour sphères directrices.*

Le coefficient de λ^4 étant nul dans l'équation précédente, après qu'on aura chassé les dénominateurs, *il y a entre les cinq puissances* S_i *d'un point quelconque, par rapport aux cinq sphères orthogonales, la relation identique*

$$\sum_{1}^{5}\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2=0. \tag{26}$$

Nous allons étudier successivement les cinq sphères orthogonales et les cyclides homofocales; mais auparavant nous ferons remarquer que, si l'une des cinq sphères se réduisait à un plan, il suffirait de remplacer la quantité $\frac{S_i}{R_i}$ correspondante par le double de la distance au plan qui remplace la sphère. Cela résulte de la formule (23).

48.

Du système de cinq sphères orthogonales.

Soient

$$(27)\quad S_i = x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + 2\gamma_i z + \delta_i = 0, \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

les équations de cinq sphères orthogonales. On aura, entre les coefficients $\alpha_i, \ldots, \delta_i$, les relations comprises dans le type suivant :

$$(28)\qquad \alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j - \delta_i - \delta_j = 0, \quad (i \gtrless j)$$

qui expriment l'orthogonalité dès sphères. Les rayons R_i de ces sphères sont donnés par les formules

$$(29)\qquad R_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - \delta_i,$$

et l'on aura les identités

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S_i}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial S_j}{\partial x} + \dfrac{\partial S_i}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial S_j}{\partial y} + \dfrac{\partial S_i}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial S_j}{\partial z} = 2(S_i + S_j), \\ \left(\dfrac{\partial S_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_i}{\partial z}\right)^2 = 4S_i + 4R_i^2. \end{cases}$$

La théorie des sphères orthogonales est d'ailleurs comprise dans l'identité fondamentale déjà obtenue

$$\sum\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0.$$

On déduit de cette identité les relations suivantes entre les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$,

$$(31)\quad \begin{cases} \sum\dfrac{1}{R_i^2} = 0, \quad \sum\dfrac{\alpha_i}{R_i^2} = 0, \quad \sum\dfrac{\alpha_i\beta_i}{R_i^2} = 0, \\ \ldots, \quad \sum\dfrac{\alpha_i\delta_i}{R_i} = 0, \quad \sum\dfrac{\delta_i^2}{R_i^2} = 0, \end{cases}$$

et les suivantes

$$(32)\qquad \sum \frac{\alpha_i^2}{R_i^2}=\sum \frac{\beta_i^2}{R_i^2}=\sum \frac{\gamma_i^2}{R_i^2}=1\,,\qquad \sum \frac{\delta_i}{R_i^2}=-2\,.$$

Ces relations nous seront très utiles.

On peut d'ailleurs déduire de l'identité (26),

$$\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2=0\,,$$

plusieurs propriétés des sphères orthogonales. Par exemple, l'équation

$$S_5=0$$

peut s'écrire, en vertu de cette identité,

$$\left(\frac{S_1-S_5}{R_1}\right)^2+\left(\frac{S_2-S_5}{R_2}\right)^2+\left(\frac{S_3-S_5}{R_3}\right)^2+\left(\frac{S_4-S_5}{R_4}\right)^2=0\,,$$

et la forme nouvelle de l'équation nous montre que la sphère S_5 coupe les quatre autres suivant quatre cercles dont les plans forment un tétraèdre conjugué par rapport à S_5, ce qui est une des plus importantes propriétés des sphères orthogonales.

De même, l'équation

$$\left(\frac{S_5}{R_5}\right)^2+\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2=0\,,$$

qui se décompose en deux facteurs, représente deux points-sphères, ayant pour centres les points d'intersection des trois autres sphères, etc.

Rappelons qu'il y a deux systèmes remarquables de sphères orthogonales, l'un pour lequel deux sphères ont leurs centres et leurs rayons imaginaires conjugués, l'autre pour lequel les cinq centres sont réels, l'une des sphères ayant le carré de son rayon négatif.

Enfin, de l'identité fondamentale on déduit encore que, dès que l'on connaîtra un système de sphères orthogonales, on aura tous les autres en soumettant à une substitution linéaire orthogonale les cinq quantités $\frac{S_i}{R_i}$.

Or on peut prendre pour ces quantités

$$2x,\ 2y,\ 2z,\ \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R\sqrt{-1}},\ \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R},$$

où R^2 peut être de l'une des deux formes

$$K,\quad K\sqrt{-1},$$

et, en soumettant ces cinq quantités à la substitution indiquée, on aura l'équation la plus générale d'un système de cinq sphères orthogonales.

49.

Des cyclides homofocales.

Nous allons maintenant démontrer que le système des cyclides homofocales, dont l'équation a déjà été donnée, est un système triple orthogonal, c'est-à-dire que, par chaque point de l'espace, il passe trois cyclides du système, se coupant à angle droit. Pour cela, nous nous proposerons d'abord la question suivante :

Étant données deux équations homogènes par rapport aux cinq quantités S_i,

$$\varphi(S_1, S_2, \ldots, S_5) = 0,\quad \psi(S_1, S_2, \ldots, S_5) = 0,$$

exprimer qu'elles représentent deux surfaces orthogonales.

Appelons (a, b) l'expression

$$\frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{\partial b}{\partial z}.$$

On aura évidemment

$$(\varphi, \psi)=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial S_i}\frac{\partial\Psi}{\partial S_j}(S_i, S_j),$$

équation où il faut donner à i et à j toutes les valeurs 1, 2, 3,

4, 5. Mais, d'après les identités (30), l'équation précédente pourra être écrite ainsi,

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} (\varphi,\psi) = 2\left(\sum S_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial S_i}\right)\left(\sum \dfrac{\partial\psi}{\partial S_i}\right) \\ \qquad + 2\left(\sum S_i \dfrac{\partial\psi}{\partial S_i}\right)\left(\sum \dfrac{\partial\varphi}{\partial S_i}\right) + 4\sum R_i^2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial S_i}\dfrac{\partial\psi}{\partial S_i}. \end{array}\right.$$

Comme les deux premiers termes du second membre sont nuls, en vertu de l'équation homogène des deux surfaces, on voit que la relation d'orthogonalité prend la forme simple

$$\sum R_i^2 \frac{\partial\varphi}{\partial S_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial S_i} = 0,$$

ou

$$\sum \frac{\partial\varphi}{\partial\left(\dfrac{S_i}{R_i}\right)}\frac{\partial\psi}{\partial\left(\dfrac{S_i}{R_i}\right)} = 0.$$

Cette relation est exactement semblable à celle qu'on obtient avec les coordonnées ordinaires; il y a seulement deux variables de plus.

L'équation précédente sera évidemment vérifiée, si l'on prend deux cyclides appartenant au système défini par l'équation

$$(34)\qquad \sum_1^5 \frac{\left(\dfrac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0.$$

Deux cyclides homofocales se coupent donc à angle droit en tous les points de leur courbe d'intersection.

Il reste à démontrer qu'il en passe toujours trois qui sont réelles, par un point quelconque de l'espace.

Supposons d'abord que, des cinq sphères (S_i), une seule ait son rayon imaginaire. Les cinq quantités S_i seront réelles; mais, parmi les cinq quantités R_i, une, R_5 par exemple, sera de la forme $+ K\sqrt{-1}$. Alors l'équation du système sera

$$\frac{\left(\dfrac{S_1}{R_1}\right)^2}{\lambda - a_1} + \frac{\left(\dfrac{S_2}{R_2}\right)^2}{\lambda - a_2} + \frac{\left(\dfrac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda - a_3} + \frac{\left(\dfrac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda - a_4} - \frac{\left(\dfrac{S_5}{K_5}\right)^2}{\lambda - a_5} = 0.$$

Quand on y considère λ comme l'inconnue, elle donne trois racines réelles, l'une entre a_1 et a_2, les deux autres entre a_2 et a_3, a_3 et a_4.

Ajoutons que les cyclides correspondantes à ces trois racines sont réelles, et *toujours des trois formes distinctes signalées à l'art. 46 pour le cas où l'équation a ses cinq racines réelles.*

On verrait, de même, si deux des sphères orthogonales étaient imaginaires conjuguées, qu'il passe toujours trois cyclides réelles par un point quelconque de l'espace.

Nous avons reconnu (art. 45) que toute équation homogène

$$\varphi(S_1, S_2, S_3, S_4) = 0$$

représente une surface anallagmatique par rapport à la sphère orthogonale aux quatre sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4). Comme de l'équation (34) on peut éliminer, au moyen de l'identité (26) qui relie les cinq quantités S_i^2, une quelconque de ces quantités, on reconnaît immédiatement que la cyclide sera anallagmatique par rapport aux cinq sphères (S_i). La même conclusion s'appliquerait à toute équation homogène

$$\varphi(S_1^2, \ldots, S_5^2) = 0,$$

qui représente, quelle que soit la forme de la fonction φ, une surface anallagmatique par rapport aux cinq sphères (S_i).

Revenons aux cyclides. Quand on fait, dans l'équation (34), $\lambda = a_i$, la surface se réduit à une sphère double (S_i), ou plutôt à la portion de cette sphère, limitée par la focale. Quand λ s'approche de a_1, par exemple, l'intersection de la cyclide et de la sphère (S_i) s'approche de la courbe limite

$$(35) \qquad \begin{cases} S_1 = 0, \\ \dfrac{\left(\dfrac{S_2}{R_2}\right)^2}{a_1 - a_2} + \dfrac{\left(\dfrac{S_3}{R_3}\right)^2}{a_1 - a_3} + \dfrac{\left(\dfrac{S_4}{R_4}\right)^2}{a_1 - a_4} + \dfrac{\left(\dfrac{S_5}{R_5}\right)^2}{a_1 - a_5} = 0. \end{cases}$$

On aurait de même les cinq autres focales.

50.

Du système de coordonnées curvilignes formé avec les cyclides homofocales et orthogonales.

Il résulte, des remarques précédentes et du théorème de M. Dupin, que les lignes de courbure d'une cyclide quelconque sont algébriques et se trouvent à l'intersection de cette surface avec les cyclides homofocales. On saura donc déterminer les lignes de courbure des cyclides les plus générales.

Parmi les cyclides du système orthogonal (34), il y en a trois qui sont seulement du 3e degré. En effet, dans l'équation (34), le coefficient de $(x^2+y^2+z^2)^2$ est

$$\sum \frac{1}{R_i^2(\lambda-a_i)}.$$

Il sera nul pour les trois valeurs de λ satisfaisant à l'équation

$$\sum \frac{1}{R_i^2(\lambda-a_i)}=0.$$

On saura donc déterminer les lignes de courbure des cyclides du 3e ordre.

Le système des cyclides homofocales donne naissance à un système de coordonnées curvilignes, analogue à celui des coordonnées elliptiques, dont Lamé, Jacobi, Liouville ont fait un si heureux emploi. On sait que Lamé a démontré le premier que le système des coordonnées elliptiques est le seul qui se compose de trois séries de systèmes isothermes. Le système que nous allons étudier ne possède donc pas cette propriété ; mais il se rapproche par toutes les autres du système des coordonnées elliptiques.

Appelons ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des trois cyclides homofocales passant en un point de l'espace. Ces paramètres seront des racines de l'équation

$$\sum \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda-a_i}=0.$$

Si, après avoir chassé les dénominateurs, on appelle M le coefficient de λ^3 dans l'équation précédente, on aura l'identité

$$(36)\qquad \sum \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = \frac{M(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)}{(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)(\lambda-a_5)}.$$

Posons, pour abréger,

$$(37)\qquad f(\lambda) = (\lambda-a_1)\dots(\lambda-a_5).$$

Si nous décomposons le second membre en fractions rationnelles, et que nous égalions les coefficients des termes semblables dans les deux membres, nous obtiendrons

$$(38)\qquad \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = \frac{M(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}.$$

Posons encore,

$$(39)\qquad H_i = \sqrt{\frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}}$$

et l'équation (38) pourra s'écrire

$$(40)\qquad \frac{S_i}{H_i} = \sqrt{M}\,.\,H_i.$$

Ces équations donnent bien les quantités S_i, ou plutôt leurs rapports; mais il faut en déduire les coordonnées ordinaires x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2.

A cet effet, nous remarquerons que les formules (31), (32) conduisent aux suivantes,

$$(41)\qquad \begin{cases} \sum \frac{\alpha_i S_i}{R_i^2} = x, \quad \sum \frac{\beta_i S_i}{R_i^2} = y, \quad \sum \frac{\gamma_i S_i}{R_i^2} = z, \\ -2 = \sum \frac{S_i}{R_i^2}, \quad -2(x^2+y^2+z^2) = \sum \frac{\delta_i S_i}{R_i^2}, \end{cases}$$

qui donneront x, y, z, quand les rapports des quantités S_i seront connus.

On en déduit ici

$$(42)\qquad \begin{cases} x = \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{\alpha_i H_i}{R_i}, \\ y = \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{\beta_i H_i}{R_i}, \\ z = \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{\gamma_i H_i}{R_i}, \\ -2 = \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{H_i}{R_i}. \end{cases}$$

La dernière de ces équations fera connaître $\sqrt{M}$, et les autres détermineront ensuite x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2.

Notons aussi la formule

$$(43)\qquad x^2+y^2+z^2 = -\frac{\sqrt{M}}{2}\sum_1^5 \frac{\delta_i H_i}{R_i},$$

qui donne le carré de la distance à l'origine des coordonnées, et qu'on déduit de la dernière des équations (41).

Après avoir trouvé les expressions des quantités S_i et des coordonnées ordinaires x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, nous allons donner la formule relative à la distance de deux points infiniment voisins.

Cette formule, calculée par les procédés connus, est la suivante,

$$(44)\qquad \begin{cases} \frac{4ds^2}{-M} = \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}d\rho_1^2 \\ \qquad\qquad + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}d\rho_2^2. \end{cases}$$

On voit qu'elle ne diffère de l'équation analogue relative aux coordonnées elliptiques que par le degré de la fonction $f(\lambda)$ et

par la présence du facteur M, dont nous avons déjà donné la valeur. Les formules principales étant établies, nous pouvons passer aux applications.

51.

Applications aux cyclides homofocales.

Les surfaces composant le système s'obtiennent en donnant à l'un des paramètres une valeur constante. Les cinq valeurs remarquables $\rho = a_i$ donneront les cinq sphères orthogonales. Pour $\rho = a_i$, S_i étant nul, d'après les formules (40), on obtiendra tous les points de la sphère (S_i).

Donnons à ρ_1, par exemple, une valeur constante α, nous obtiendrons une cyclide quelconque, et la formule (44) deviendra

$$(45) \qquad \frac{4ds^2}{-M} = (\rho - \rho_1)\left[\frac{d\rho^2(\rho-\alpha)}{f(\rho)} + \frac{d\rho_1^2(\alpha-\rho_1)}{f(\rho_1)}\right].$$

La forme même de cette expression de ds^2 nous apprend que *les cyclides peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure*. En d'autres termes, les lignes de courbure forment un système de lignes isothermes orthogonales (1).

Il suit encore de la forme de l'équation précédente qu'on saura déterminer les lignes de longueur nulle tracées sur la cyclide. Leur équation est

$$(46) \qquad \int \sqrt{\frac{\rho-\alpha}{f(\rho)}}\,d\rho \pm \sqrt{-1}\int \sqrt{\frac{\alpha-\rho_1}{f(\rho_1)}}\,d\rho_1 = \text{const.}$$

(1) M. O. Bonnet a proposé d'appeler tous les systèmes de lignes jouissant de cette propriété des systèmes *isométriques*. Il me paraît préférable de leur conserver le nom de lignes *isothermes*. J'ai démontré, dans le cours que j'ai eu l'honneur de faire en 1866 comme suppléant de M. Bertrand au Collége de France, que, si l'on étudie la distribution de la chaleur en tous les points d'une surface infiniment mince, supposée partout de même épaisseur, les systèmes de lignes précédents sont effectivement des systèmes isothermes.

La développable focale, enveloppe du système, est le lieu des points de l'espace pour lesquels deux des trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 deviennent égaux. Faisons, par exemple,

$$\rho_1 = \rho_2 .$$

La formule (44) nous donnera, pour tous les points de la développable focale,

$$ds^2 = -\frac{M}{4}\frac{(\rho-\rho_1)^2}{f(\rho)}\,d\rho^2 . \tag{47}$$

La forme de ds^2 est bien celle qui a été indiquée dans la *Première Partie* (art. 5).

Cette développable coupe chaque cyclide du système suivant 16 droites et la touche suivant une ligne de courbure exceptionnelle. En effet, considérons la cyclide $\rho_2 = \alpha$. Elle aura avec la développable enveloppe deux séries distinctes de points communs : 1° ceux qu'on obtiendra en faisant $\rho = \rho_1$; 2° ceux qui correspondent à la valeur de ρ (ou de ρ_1)

$$\rho = \alpha .$$

Ces derniers points sont évidemment sur la courbe limite, ligne de courbure singulière, intersection de la cyclide avec la surface infiniment voisine du système. Quant aux premiers points, je dis qu'ils sont sur 16 droites.

En effet faisons $\rho = \rho_1$, $\rho_2 = \alpha$ dans les formules qui donnent H_i ; on aura

$$H_i = \frac{\pm (a_i - \rho)\sqrt{a_i - \alpha}}{\sqrt{f(a)}} .$$

Les cinq quantités H_i deviendront, par conséquent, des fonctions linéaires de ρ, et, par suite, on obtiendra, pour les coordonnées ordinaires x, y, z, des valeurs de la forme

$$x = \frac{\alpha + \beta\rho}{\alpha' + \beta'\rho}, \text{ etc.}$$

Lorsque ρ variera dans ces formules, elles donneront tous les points d'une ligne droite. *Il y aura* 16 *droites correspon-*

dantes aux différentes combinaisons des signes des radicaux H_i. Ces 16 droites sont évidemment les enveloppes des lignes de courbure.

Cependant, si α était égale à une des quantités a_i, la cyclide se réduirait à la sphère (S_i); un des radicaux H_i serait nul, et on ne trouverait plus que 8 droites. Ces 8 droites sont les enveloppes des courbes cycliques homofocales suivant lesquelles la sphère (S_i) est coupée par les surfaces du système.

La développable focale coupe donc la sphère (S_i) : 1° suivant le cercle de l'infini, qui est une ligne octuple de la développable; 2° suivant 8 droites; 3° suivant la focale située sur (S_i), qui est une des courbes doubles de la développable.

Enfin, l'arête de rebroussement de la développable focale est le lieu des points de l'espace pour lesquels les trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 prennent une même valeur ρ. On aura donc, pour tous les points de cette courbe,

$$\left[\frac{S_i}{R_i}\sqrt{f'(a_i)}\right]^{\frac{2}{3}} = M^{\frac{1}{3}}(a_i - \rho);$$

et si entre les cinq équations que comprend cette formule, on élimine

$$M^{\frac{1}{3}}, \quad \rho M^{\frac{1}{3}},$$

on trouvera trois équations de la forme

$$\sum k_i \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^{\frac{2}{3}} = 0, \tag{48}$$

et convenant à tous les points de l'arête de rebroussement. Nous voyons d'ailleurs, d'après la formule qui donne ds^2, que l'arc élémentaire de cette courbe est nul, ce qui est conforme aux résultats de la *Première Partie* (art. 5).

On pourrait déduire des calculs précédents les équations de la développée sphérique d'une cyclique. En effet, on a vu (art. 5) que le cône ayant pour sommet le centre d'une

sphère (S) et pour base la courbe de rebroussement (R) d'une développable focale (F) coupe la sphère (S) suivant la développée sphérique de l'intersection de (F) et de (S). En appliquant ce résultat à chacune des sphères directrices, on aura les développées sphériques des cinq focales.

Bien que les calculs soient des plus simples, nous nous dispenserons de les développer.

52.

Application des formules relatives aux cyclides à la surface générale du 3e ordre, et à la surface du 4e ordre à conique double.

Les formules (42), où x, y, z représentent les coordonnées ordinaires d'un point, peuvent être rendues plus symétriques par l'introduction des coordonnées homogènes. Posons

$$x=\frac{X}{T},\quad y=\frac{Y}{T},\quad z=\frac{Z}{T},\quad T=\frac{1}{\sqrt{M}};$$

elles deviendront

$$X=\sum_{1}^{5}\frac{\alpha_i H_i}{R_i},$$

$$Y=\sum_{1}^{5}\frac{\beta_i H_i}{R_i},$$

$$Z=\sum_{1}^{5}\frac{\gamma_i H_i}{R_i},$$

$$T=-\frac{1}{2}\sum_{1}^{5}\frac{H_i}{R_i}.$$

Si l'on donne à ρ_5 une valeur quelconque, on obtient des formules du type suivant,

$$(49)\qquad \begin{cases} X = \sum_1^5 A_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}\,, \\ Y = \sum_1^5 B_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}\,, \\ Z = \sum_1^5 C_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}\,, \\ T = \sum_1^5 D_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}\,, \end{cases}$$

qui donnent les coordonnées homogènes d'un point de la cyclide en fonction de deux paramètres ρ, ρ_1. Les coefficients A_i, B_i, C_i, D_i ne sont pas quelconques, et sont liés par de nombreuses relations. Mais, si l'on effectue sur la cyclide la transformation homographique la plus générale, les formules précédentes conserveront leur forme, et il n'y aura plus aucune relation à établir entre les constantes qui y figurent. Donc

Les formules (49) *déterminent en fonction de deux paramètres les coordonnées homogènes d'un point quelconque d'une surface générale du 3e ordre ou d'une surface du 4e ordre à conique double.*

Bien que l'homographie introduise 16 constantes, et que les formules primitives en contiennent plus de 4, il peut paraître douteux que les formules (49) ne conviennent pas à une surface plus générale que la surface du 4e ordre à conique double. La démonstration directe suivante lève toutes les difficultés.

Désignons par X_i le radical $\sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}$. Les cinq radicaux ainsi obtenus satisfont évidemment à deux équations de la forme

$$(50)\qquad \sum_1^5 A_i X_i^2 = 0\,, \qquad \sum_1^5 B_i X_i^2 = 0\,.$$

Cela posé, introduisons une inconnue auxiliaire λ, de la forme

$$\lambda = \Sigma E_i X_i .$$

De cette dernière équation et des formules (49) on déduira, pour les quantités X_i, des expressions de la forme

$$X_i = P_i + m_i \lambda , \tag{51}$$

où P_i désigne une fonction linéaire de X, Y, Z, T, et m_i une constante. En portant ces valeurs dans les identités (50), on obtiendra deux équations de la forme

$$u_2 + u_1 \lambda + \lambda^2 = 0 , \quad v_2 + v_1 \lambda + \lambda_2 = 0 \tag{52}$$

où u_2, v_2, u_1, v_1 sont des fonctions homogènes du second et du premier degré en X, Y, Z, T. Il reste à éliminer λ entre ces deux équations, ce qui conduit évidemment à l'équation d'une surface du 4e ordre à conique double (1).

Revenons aux formules (49). A cause des doubles signes des radicaux, à chaque système de valeurs de ρ, ρ_1 correspondent 16 points de la surface dans le cas de la cyclide. Ces 16 points forment un polyèdre anallagmatique par rapport aux cinq sphères directrices.

Pour faire disparaître l'ambiguité provenant de ces doubles signes, on peut adopter le moyen suivant.

Introduisons, au lieu de ρ, ρ_1, les variables définies par les équations

$$\frac{\rho d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = du_1 , \quad \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = du ;$$

ρ et ρ_1 seront des fonctions ultraelliptiques de u, u_1, et l'on reconnaît dans chacun des radicaux qui figurent dans les formules (49) les fonctions Al de M. Weierstrass. Ces fonc-

(1) Un mode semblable de démonstration, appliqué au cas où les formules contiennent n radicaux au lieu de 5, montrerait que la surface correspondante est, en général, de l'ordre 2^{n-2}.

tions sont uniformes et remplacent les sin *am*, cos *am*, Δam de la théorie des fonctions elliptiques. Nous allons d'abord montrer l'analogie des formules précédentes avec celles qui ont été trouvées pour les courbes du 3e ordre par M. Aronhold, et qui ont permis à M. Clebsch d'établir un lien entre la théorie des fonctions elliptiques et celle des courbes du 3e ordre.

En effet, il résulte de tout ce qui précède que, si dans les formules (49) on donne à ρ_1 une valeur annulant un des radicaux, a_s par exemple, les formules qu'on obtient conviennent à la transformée homographique d'une cyclique, c'est-à-dire soit à une courbe plane générale du 4e degré à deux points doubles ou du 3e degré, soit à l'intersection de deux quadriques. Or ces formules sont de la forme

$$(53)\qquad \begin{cases} X = \sum_1^4 A_i \sqrt{a_i - \rho}, \\ Y = \sum_1^4 B_i \sqrt{a_i - \rho}, \\ Z = \sum_1^4 C_i \sqrt{a_i - \rho}, \\ T = \sum_1^4 D_i \sqrt{a_i - \rho}. \end{cases}$$

On peut évidemment, par une substitution de la forme

$$\frac{a_2 - \rho}{a_1 - \rho} = K\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2, \qquad \frac{a_3 - \rho}{a_1 - \rho} = K'\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2,$$

rendre rationnels trois des radicaux, et ramener les formules (53) à la forme

$$(54)\qquad \begin{cases} X = A + B\lambda + C\lambda^2 + D\sqrt{\Delta}, \\ Y = A' + B'\lambda + C'\lambda^2 + D'\sqrt{\Delta}, \\ Z = A'' + B''\lambda + C''\lambda^2 + D''\sqrt{\Delta}, \\ T = A''' + B'''\lambda + C'''\lambda^2 + D'''\sqrt{\Delta}, \end{cases}$$

où Δ désigne un polynome du 4e degré en λ, et qui a été employée par MM. Aronhold et Clebsch (1).

Les formules (53) et (54) sont évidemment équivalentes; mais, sous leur première forme, ces équations ont une analogie manifeste avec celles que nous avons données pour les cyclides, et que nous avons étendues, notamment à toute surface du 3e ordre. On doit donc penser qu'il y a entre la théorie des fonctions ultraelliptiques et celle des surfaces du 3e ordre un lien tout à fait semblable à celui qui existe entre les courbes du 3e degré et les fonctions elliptiques. Dans un autre travail, l'auteur se propose de développer quelques résultats qu'il a obtenus dans l'étude de ces relations.

Enfin nous remarquerons aussi que les formules (49) mettent en évidence 16 droites de la surface. Si l'on y fait $\rho = \rho_1$, les radicaux deviennent des carrés parfaits, et les coordonnées deviennent des fonctions linéaires de ρ, qui peuvent prendre 16 formes différentes, par suite des doubles signes des radicaux. Nous démontrerons d'ailleurs que les cyclides du 4e ordre n'ont pas plus de 16 droites.

---

1 *Clebsch* : Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. *Journal de Borchardt*, t. LXIII, p 94.

CINQUIÈME PARTIE.

Étude géométrique des cyclides

53.

Des focales singulières et des sections circulaires.

Nous nous proposons d'étudier ici, en tenant compte pour plus de rapidité de quelques résultats déjà établis, les propriétés géométriques des cyclides. Nous démontrerons les propositions dues à MM. Moutard, Laguerre, de la Gournerie, et nous ajouterons quelques propriétés qui nous paraissent nouvelles.

Nous avons vu que la cyclide peut être considérée comme l'enveloppe des sphères, ayant leur centre sur une quadrique (A) et coupant à angle droit une sphère (S). Pour avoir les points de contact de l'une des sphères variables, de centre M, avec la cyclide, il faut (art. 42) abaisser du centre de (S) une perpendiculaire sur le plan tangent en M à (A). Cette droite coupe la sphère, de centre M, en deux points m, m', qui sont les deux points de la cyclide correspondants au point M. Les droites mM, m'M sont donc les normales de la cyclide en m, m'.

Cette définition des cyclides donne immédiatement leurs focales ordinaires, mais elle fait connaître aussi, comme l'ont montré MM. Laguerre et de la Gournerie, les focales singulières de la cyclide.

Soit en effet m un point de la cyclide situé sur le cercle de l'infini, et soit M le point de la déférente (A) auquel il corres-

pond. Le plan tangent à (A) en M doit être perpendiculaire à Om ; il contiendra donc la tangente en m au cercle de l'infini.

D'ailleurs, ce plan, tangent en M à la déférente, sera aussi tangent en m à la cyclide, puisqu'il est perpendiculaire à la droite Mm, qui doit être normale en m à la cyclide. On a donc le résultat suivant :

Les plans tangents à la cyclide en tous les points du cercle de l'infini sont aussi tangents à la déférente. En d'autres termes, *les focales singulières de la cyclide sont les focales ordinaires de la déférente.* Cela explique pourquoi, dans les cinq modes de génération, les cinq déférentes ont les mêmes focales. La proposition précédente s'étend d'ailleurs à toutes les anallagmatiques.

On peut rendre compte aussi d'une manière très simple, comme l'a fait M. Moutard, de l'existence des sections circulaires. En effet, toutes les sphères orthogonales à (S) et ayant leurs centres sur une même génératrice rectiligne de (A) contiendront toutes un même cercle, appartenant à la cyclide. Ce cercle est dans un plan mené par le pôle O perpendiculairement à la génératrice rectiligne, et, comme il y a une deuxième génératrice perpendiculaire à ce plan, il coupera la cyclide suivant deux cercles. L'enveloppe de tous les plans tangents doubles d'une même série est un cône supplémentaire du cône asymptote de la surface (A).

54.

Des relations entre les cinq modes de génération des cyclides.

Proposons-nous le problème suivant : Étant donné un des modes de génération, c'est-à-dire une surface (A) et la sphère (S) correspondante, déterminer les autres surfaces déférentes et les sphères directrices qui leur sont associées.

Nous remarquerons d'abord que, si l'on construit la développable $\boxed{(A)(S)}$, la courbe de contact de cette développable et de la sphère appartient évidemment à la cyclide, et celle-ci

coupe normalement la sphère en tous les points de cette courbe. La développable précédente a pour lignes de striction quatre coniques (K_1), (K_2), (K_3), (K_4), qui sont dans les faces du tétraèdre conjugué commun à (A) et à (S).

Soit (K_i) l'une de ces coniques, et a un de ses points. Deux génératrices de la développable viennent passer en a, savoir, at, at', tangentes en t et t' à la sphère (S). La sphère de centre a et de rayon $at=at'$ sera donc normale en t, t' à la sphère (S), et tangente à la cyclide en ces deux points.

Il suit de là que toutes les sphères décrites des différents points de (K_i) comme centres et orthogonales à (S) seront des sphères doublement tangentes à la cyclide, et, comme elles forment une suite continue, elles feront partie d'une des séries inconnues de sphères doublement tangentes. Donc, il y aura quatre surfaces (A_i) homofocales à (A) et contenant chacune une des coniques de striction (K_i) de la développable $\boxed{(A)\,(S)}$. *Ces quatre surfaces sont les déférentes cherchées.*

Il reste à déterminer la sphère directrice correspondante à chaque surface. Or, les sphères, ayant leur centre sur la conique (K_i), et coupant (S) à angle droit, coupent aussi à angle droit la sphère (S_i), décrite du pôle de ce plan comme centre et orthogonale à (S).

Cette sphère est la seule qui soit en même temps orthogonale à (S) et aux sphères ayant leur centre sur (K_i). C'est donc la sphère directrice. Ainsi

Les quatre sphères directrices (S_i) *ont pour centres les sommets du tétraèdre conjugué aux deux surfaces* (A), (S). *La sphère correspondante à la conique* (K_i) *a son centre au pôle du plan de* (K_i).

On peut encore déterminer les sphères de la manière suivante :

Soit (A_i) la surface passant par (K_i), et (S_i) la sphère correspondante. Le plan radical de (S) et de (S_i) est le plan de la conique (K_i). On voit que ce plan coupe (A_i) suivant une conique (K_i), telle que les trois surfaces

$$(K_i),\ (A),\ (S)$$

soient inscrites dans une même développable. De même, eu égard à la symétrie des deux modes de génération, il coupera (A) suivant une conique (H), telle que les trois surfaces

$$(H)\ ,\ (A_i)\ ,\ (S_i)$$

soient inscrites dans une même développable.

Il suit de là qu'il y aura une sphère inscrite dans la développable $\boxed{(H)\,(A_i)}$, et cette sphère sera (S_i), qu'il s'agissait de déterminer.

Ces belles relations sont dues à M. Laguerre [1], qui les a données sans démonstration.

55.

Classification des cyclides.

La classification des cyclides s'effectue sans difficulté, d'après la nature des focales ordinaires et singulières.

1° Si la surface déférente est une sphère, on a la surface de révolution engendrée par les ovales de Descartes tournant autour de leur axe focal. Le cercle de l'infini est cercle de rebroussement.

2° Si la surface déférente est dépourvue de centre, une des focales singulières est rejetée à l'infini. Nous verrons que, dans ce cas, la cyclide est du 3e degré.

3° Si la déférente est de révolution, la focale ordinaire est doublement tangente au cercle de l'infini. Nous l'avons appelée cartésienne; nous conserverons le même nom à la cyclide.

4° Si la déférente est tangente à la sphère directrice, ou si cette sphère se réduit à un point (nous verrons que ces deux cas se confondent), la focale ordinaire a un point double, qui

---

[1] Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques *Bulletin de la Société Philomathique*, 1868.

est un point conique de la cyclique. Celle-ci est une podaire ou réciproque de cette quadrique.

5° Si la déférente est doublement tangente à la sphère, la cyclide est, en général, la réciproque d'un cône et a deux points doubles.

6° Si le cône du second degré est de révolution, la cyclide réciproque a généralement quatre points doubles. C'est la cyclide à lignes de courbure circulaires de M. Dupin.

Telles sont les divisions principales. Les trois premières sont établies d'après la nature des focales singulières, les dernières d'après celle des focales ordinaires. Nous allons rapidement passer en revue ces différentes classes.

Quand la déférente (A) est une sphère, la cyclide est de révolution; elle est engendrée par les ovales de Descartes tournant autour de leur axe focal. Tout plan la coupe suivant des ovales de Descartes, toute sphère suivant une cartésienne.

Les sphères inscrites dans la surface couperont toute sphère sécante suivant des cercles doublement tangents à la section (1).

56.

De la cyclide du 3e degré.

Si la surface du second degré est dépourvue de centre, les résultats que nous avons établis subissent quelques modifications, que nous allons étudier. D'abord, la cyclide est seulement du 3e degré.

En effet, prenons une des deux séries de plans parallèles coupant la déférente suivant une seule droite. A chacune de ces droites correspond un cercle situé dans un plan perpendi-

(1) On pourra consulter un article de l'auteur (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864), où se trouvent quelques théorèmes relatifs à cette surface.

culaire à la droite, et les plans de tous ces cercles se coupent suivant une droite δ, perpendiculaire à la série de plans parallèles coupant la déférente suivant une seule génératrice. La droite δ, contenant une infinité de points de la cyclide, fera partie de la surface. La cyclide passe donc par le pôle, et contient deux droites δ, δ', perpendiculaires aux plans directeurs de la déférente. Le plan de ces deux droites coupe la cyclide suivant une troisième droite rejetée à l'infini, et tous les plans passant par l'une ou l'autre des droites δ, δ' coupent la surface suivant un cercle. La cyclide est donc du 3e degré, et nous pouvons énoncer, sans insister davantage, les propositions suivantes :

Quand la cyclide est du 3e degré, elle contient une droite dans le plan de l'infini, on mène les cinq plans tangents triples qui passent par cette droite; les points de contact de ces plans tangents sont les cinq pôles de la surface. En chacun de ces pôles se croisent deux droites de la surface, en tout 10 droites, par lesquelles passent tous les plans coupant la cyclide suivant des cercles.

La cyclide contiendra en outre une série de sections coniques situées dans des plans parallèles, qui contiennent la droite à l'infini sur la surface.

On sait que toute surface du 3e degré a 27 droites. Nous trouvons les 16 qui nous manquent, et qui appartiennent à toute cyclide, même du 4e ordre.

57.

Des podaires ou réciproques de quadriques.

Considérons maintenant le cas où la déférente (A) est tangente à la sphère (S). Le tétraèdre conjugué commun a deux sommets réunis au point de contact des deux surfaces. Les deux sphères directrices correspondantes se réduisent à un point; leur centre commun est le point de contact de (A) et de (S). Ainsi, *une des sphères directrices se réduit à un point* O.

Soit (A_1) la déférente associée à ce point-sphère. La cyclide sera l'enveloppe des sphères ayant leur centre sur (A_1) et passant par le point O. Elle sera donc le lieu des symétriques du point O par rapport aux plans tangents de (A_1). Le lieu ainsi formé est évidemment homothétique à la podaire de (A_1) par rapport au point O. Donc

La cyclide est une podaire de quadrique.

On sait d'ailleurs que les podaires de quadriques sont aussi les transformées par rayons vecteurs réciproques d'autres quadriques.

Appliquons notre règle générale pour obtenir les différents modes de génération.

Les quatre lignes doubles de la développable $\boxed{(A_1)(S)}$ deviennent ici : 1° la courbe de contact du cône circonscrit à (A_1) et de sommet O ; 2° les trois couples de focales de ce cône. Les cinq modes de génération seront formés :

1°, 2° Avec (A_1) et le point-sphère O, ce mode comptant pour 2 ;

3°, 4°, 5° Avec chacune des trois surfaces homofocales à (A_1) passant par O ; les sphères directrices seront tangentes en O à la déférente qui leur est associée, et auront leur centre dans le plan polaire de O par rapport à (A_1).

Analytiquement le cas actuel correspond à une racine double de l'équation en λ de l'article 43.

Si la quadrique (A) se réduit à une conique infiniment aplatie, située dans un plan (P), alors les sphères ayant leurs centres sur cette conique passeront par deux points fixes symétriques par rapport au plan de la conique, et seront tangentes à la cyclide en tous les points d'un cercle. L'hypothèse que nous examinons est évidemment la seule dans laquelle les sphères soient inscrites à la cyclide suivant un cercle. Car le lieu des centres d'une telle suite de sphères doit être une courbe, et par conséquent une conique. Et d'ailleurs, si elles coupent à angle droit une sphère quelconque (S), elles coupent aussi à angle droit toutes les sphères passant par l'intersection

de (S) et du plan des centres, c'est-à-dire qu'elles contiennent toujours deux points réels ou imaginaires. Ces deux points sont des points coniques de la cyclide. En transformant la cyclide par rayons vecteurs réciproques et mettant le pôle en un de ces deux points, on aura une quadrique à point double, c'est-à-dire un cône général du second degré. Donc

Les cyclides à deux points doubles sont les réciproques des cônes du second degré.

Remarquons toutefois que la transformation par laquelle on déduit le cône de la cyclide n'est pas nécessairement réelle.

Soit (A) la conique déférente, O le point commun à toutes les sphères, et O_1 le symétrique de O par rapport au plan de (A). Les trois nouvelles déférentes seront les surfaces ayant (A) pour focale, et passant en O , O_1. Les sphères directrices seront tangentes en O , O_1 à la déférente qui leur est associée, et auront leur centre dans le plan de (A); elles couperont par conséquent leur déférente suivant deux cercles. Ainsi les focales de la cyclide seront les six cercles ayant leurs centres dans le plan de (A) et appartenant aux trois surfaces homofocales qui passent en O , O_1. Ce fait donne lieu à la remarque suivante.

La cyclide étant la réciproque d'un cône, les focales de la cyclide sont les transformées des 6 droites focales du cône. Ce sont par conséquent des cercles; mais, comme les focales du cône sont situées trois à trois dans quatre plans tangents au cercle de l'infini, nous voyons que les six cercles focaux de la cyclide sont trois à trois sur quatre sphères de rayon nul. En rapprochant ce résultat du précédent, nous obtenons la proposition qui suit :

Les six cercles de trois quadriques homofocales qui passent par un point commun et qui ont leurs centres dans le même plan principal sont situés trois à trois sur quatre sphères de rayon nul. Ces quatre sphères sont des points de la focale située dans le plan principal considéré.

Il est à remarquer que les tangentes à la cyclide en un des points coniques O, O_1 forment un cône supplémentaire du cône de même sommet, ayant la conique déférente (A) pour base. Ce dernier cône est donc supplémentaire du cône réciproque de la cyclide à deux points doubles (1).

58.

De la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points coniques.

Parmi les réciproques de cônes du second degré se trouvent le tore et la cyclide de M. Dupin, qui sont les réciproques des cônes de révolution du second degré. Ceci nous conduit à préciser les conditions dans lesquelles on obtiendra la cyclide de M. Dupin.

Supposons qu'on prenne une conique déférente quelconque (A), mais que la sphère directrice (S) soit tangente en

---

(1) Dans la classe que nous étudions, et qui est caractérisée par cette propriété, que la déférente et la sphère directrice soient doublement tangentes, il existe une espèce remarquable de cyclides que, dans cette étude générale, nous laissons de côté. Ce sont les cyclides de révolution qui peuvent être considérées comme ayant pour déférente une surface de révolution, et pour sphère directrice une quelconque des sphères coupant suivant deux cercles parallèles cette surface de révolution. La directrice et la déférente sont bien doublement tangentes, mais en deux points sur le cercle de l'infini. Quand les cyclides à deux points doubles considérées dans le texte ont ces deux points doubles imaginaires, le cercle lieu des points à distance nulle des deux points doubles est réel, et en mettant le pôle de transformation en un point quelconque de ce cercle, la cyclide se transforme en une cyclide de révolution.

Toutes les cyclides réciproques de cônes ou de cyclides de révolution sont définies par une équation de la forme

$$at + a't' + a''t'' = 0 ,$$

entre les tangentes menées à trois quelconques des sphères inscrites. Quatre de ces sphères se réduisent à des points réels ou imaginaires, qui sont sur le cercle déjà considéré, lieu des points à distance nulle des deux points doubles.

deux points a, a' à la conique (A). Les deux points-sphères O, O_1 de l'article précédent étant doublement tangents en a, a' à (A), seront des points de la focale (A_1) de (A); le cône de sommet O et de base (A) sera de révolution, et par suite, d'après les résultats de l'article précédent, la cyclide sera une réciproque de cône de révolution.

Donc, *la cyclide de M. Dupin est l'enveloppe des sphères dont les centres décrivent une conique quelconque* (A) *et qui passent par un point de la focale* (A_1) *de cette conique, ou, plus généralement, qui sont orthogonales à une sphère quelconque doublement tangente à* (A).

Cette cyclide a évidemment quatre points doubles O, O_1, a, a', dont deux au moins sont imaginaires, mais qui peuvent l'être tous : O, O_1 et a, a' sont alors deux à deux imaginaires conjugués. Le cône de sommet O et de base (A) étant de révolution, la cyclide sera la réciproque d'un cône de révolution; mais la transformation ne pourra pas toujours se faire d'une manière réelle. Voyons ce que deviennent ici les cinq modes de génération de toute cyclide. On a

1°, 2° Conique déférente (A), sphère directrice réduite à un point O ou O_1, ou toute sphère tangente en a, a' à (A). Ce mode compte pour deux;

3°, 4° (A_1) Conique focale de (A) déférente, sphère directrice réduite à un point a ou a', ou toute sphère tangente en O, O_1 à (A_1). Ce mode compte aussi pour deux;

5° Déférente, la quadrique ayant (A) et (A_1) pour focale, et passant en O, O_1, a, a', qui sont des ombilics de cette surface; sphère directrice, la sphère tangente en O, O_1, a, a' à cette qnadrique et la coupant suivant les 4 droites Oa, Oa', O_1a, O_1a'.

Ainsi, la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points doubles, admet deux séries de sphères inscrites dont les centres décrivent deux coniques focales l'une de l'autre; elle a quatre points doubles, situés par couples sur ces deux focales O, O et a, a' et contient les quatre droites de longueur nulle qui joignent O, O_1 à a, a'.

De plus, elle admet une série de sphères doublement tangentes, dont les centres décrivent une quadrique quelconque, et qui sont orthogonales à une sphère fixe. Cette sphère est tangente à la quadrique en deux de ses ombilics, et par conséquent la coupe suivant quatre droites qui forment un quadrilatère dont les sommets sont les quatre points doubles de la cyclide.

Nous avons vu que la cyclide est la réciproque d'un cône, et cette propriété rend, pour ainsi dire, évidentes toutes les propositions relatives à cette surface. Mais on peut aussi, comme l'a fait M. Mannheim (1), considérer la cyclide comme la transformée d'un tore. Nous savons qu'un au moins des couples O, O_1 et a, a' de points coniques de la cyclide est imaginaire. Si a et a' par exemple sont imaginaires, le cercle lieu des points à distance nulle de a, a' sera réel. En prenant le pôle en un point de ce cercle, la transformée de la cyclide sera un tore, car les cercles qui passaient en a, a' auront après la transformation leurs plans parallèles. Donc,

Pour transformer la cyclide en un tore, il faut placer le pôle de transformation sur un des deux cercles lieux des points à distance nulle soit de O et de O_1, soit de a et de a'. Ces deux cercles peuvent être réels tous les deux (quand les quatre points doubles sont imaginaires). Il y en aura toujours au moins un qui sera réel.

Ainsi, on peut toujours déduire la cyclide du tore par une transformation réelle.

Nous n'étudierons pas la cyclide d'une manière plus détaillée, et nous indiquerons seulement la proposition suivante :

Il y a une cyclide à trois plans de symétrie.

Étant donné un cône de révolution, transformons-le par rayons vecteurs réciproques, et prenons le pôle O de transformation dans le plan principal perpendiculaire à l'axe. La

(1) MANNHEIM : Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois surfaces données. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860, p. 67.)

de (S) et du plan des centres, c'est-à-dire qu'elles contiennent toujours deux points réels ou imaginaires. Ces deux points sont des points coniques de la cyclide. En transformant la cyclide par rayons vecteurs réciproques et mettant le pôle en un de ces deux points, on aura une quadrique à point double, c'est-à-dire un cône général du second degré. Donc

Les cyclides à deux points doubles sont les réciproques des cônes du second degré.

Remarquons toutefois que la transformation par laquelle on déduit le cône de la cyclide n'est pas nécessairement réelle.

Soit (A) la conique déférente, O le point commun à toutes les sphères, et O_1 le symétrique de O par rapport au plan de (A). Les trois nouvelles déférentes seront les surfaces ayant (A) pour focale, et passant en O , O_1. Les sphères directrices seront tangentes en O , O_1 à la déférente qui leur est associée, et auront leur centre dans le plan de (A); elles couperont par conséquent leur déférente suivant deux cercles. Ainsi les focales de la cyclide seront les six cercles ayant leurs centres dans le plan de (A) et appartenant aux trois surfaces homofocales qui passent en O , O_1. Ce fait donne lieu à la remarque suivante.

La cyclide étant la réciproque d'un cône, les focales de la cyclide sont les transformées des 6 droites focales du cône. Ce sont par conséquent des cercles; mais, comme les focales du cône sont situées trois à trois dans quatre plans tangents au cercle de l'infini, nous voyons que les six cercles focaux de la cyclide sont trois à trois sur quatre sphères de rayon nul. En rapprochant ce résultat du précédent, nous obtenons la proposition qui suit :

Les six cercles de trois quadriques homofocales qui passent par un point commun et qui ont leurs centres dans le même plan principal sont situés trois à trois sur quatre sphères de rayon nul. Ces quatre sphères sont des points de la focale située dans le plan principal considéré.

Il est à remarquer que les tangentes à la cyclide en un des points coniques O, O_1 forment un cône supplémentaire du cône de même sommet, ayant la conique déférente (A) pour base. Ce dernier cône est donc supplémentaire du cône réciproque de la cyclide à deux points doubles (1).

58.

De la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points coniques.

Parmi les réciproques de cônes du second degré se trouvent le tore et la cyclide de M. Dupin, qui sont les réciproques des cônes de révolution du second degré. Ceci nous conduit à préciser les conditions dans lesquelles on obtiendra la cyclide de M. Dupin.

Supposons qu'on prenne une conique déférente quelconque (A), mais que la sphère directrice (S) soit tangente en

---

(1) Dans la classe que nous étudions, et qui est caractérisée par cette propriété, que la déférente et la sphère directrice soient doublement tangentes, il existe une espèce remarquable de cyclides que, dans cette étude générale, nous laissons de côté. Ce sont les cyclides de révolution qui peuvent être considérées comme ayant pour déférente une surface de révolution, et pour sphère directrice une quelconque des sphères coupant suivant deux cercles parallèles cette surface de révolution. La directrice et la déférente sont bien doublement tangentes, mais en deux points sur le cercle de l'infini. Quand les cyclides à deux points doubles considérées dans le texte ont ces deux points doubles imaginaires, le cercle lieu des points à distance nulle des deux points doubles est réel, et en mettant le pôle de transformation en un point quelconque de ce cercle, la cyclide se transforme en une cyclide de révolution.

Toutes les cyclides réciproques de cônes ou de cyclides de révolution sont définies par une équation de la forme

$$at + a't' + a''t'' = 0 ,$$

entre les tangentes menées à trois quelconques des sphères inscrites. Quatre de ces sphères se réduisent à des points réels ou imaginaires, qui sont sur le cercle déjà considéré, lieu des points à distance nulle des deux points doubles.

sont 6 à 6 dans 8 plans. C'est la généralisation d'un théorème connu pour les sections coniques.

Enfin, le problème suivant :

« Construire une quadrique inscrite à (S) et tangente à quatre autres quadriques inscrites à (S), »

se ramène à celui-ci :

Construire une sphère tangente à quatre sphères données.

On pourrait multiplier les exemples; mais nous préférons faire remarquer que le mode de transformation indiqué ici supplée à une lacune que présente la géométrie de l'espace par rapport à la géométrie plane.

En effet, dans le plan, on peut raisonner de la manière suivante :

Soient les sections planes d'une sphère; si on les projette d'un point de la sphère sur le plan, elles deviennent des cercles; si on les projette d'un point extérieur à la sphère, elles se transforment en des coniques doublement tangentes à un cercle. On voit donc, dans le plan, que la théorie des courbes inscrites à une conique et celle des courbes passant par deux points sont identiques l'une à l'autre, et constituent, s'il est permis de le dire, une seule théorie vue sous deux aspects différents, celle des sections planes d'une quadrique.

Comme on n'a pas d'espace à quatre dimensions, les méthodes de projection ne s'étendent pas à la géométrie de l'espace; mais les remarques et les méthodes qui précèdent ont l'avantage de suppléer, d'une manière claire, à celles qui nous font ici défaut.

60.

Des sections planes et sphériques des cyclides.

Cherchons d'abord les droites qui sont placées sur la cyclide, et qui rencontrent le cercle de l'infini. Soit δ l'une de ces droites. Elle sera nécessairement tangente à chacun des cinq cônes doublement tangents à la cyclide, et l'on pourra

par conséquent mener un plan tangent à ce cône par la droite δ.

Ce plan tangent, qui doit couper la surface suivant deux cercles, devra contenir une droite δ' qui, associée à δ, puisse former un cercle de rayon nul. Nous aurons donc *toutes* les droites de la cyclide, en examinant, dans une quelconque des cinq séries doubles de cercles, quels sont ceux de ces cercles qui se décomposent en deux droites.

Les centres de ces cercles doivent évidemment appartenir à la fois à la cyclide et à sa focale. Chaque cyclide est coupée en 8 points par une de ses focales, et par ces 8 points passent 16 droites qui appartiennent à la cyclide.

Ces 16 droites forment 8 cercles de rayon nul, dérivés des génératrices de la déférente qui sont tangentes à la sphère directrice.

Dans un Mémoire déjà cité, M. Clebsch a étudié les dispositions relatives de ces 16 droites; mais nous voyons ici que cette étude se ramène à celle d'un problème connu. Si, en effet, on transforme la cyclide par rayons vecteurs réciproques, en mettant le pôle de transformation sur la surface, elle se transforme en une cyclide du 3e degré. Les droites qui rencontrent le cercle de l'infini se transforment en de nouvelles droites rencontrant le même cercle. Donc

La disposition des 16 droites d'une cyclide est la même que celles des droites d'une surface du 3e degré qui rencontrent une conique de cette surface (1).

Quant aux 11 autres droites de la cyclide cubique, transformée de la cyclide générale, nous les avons déjà étudiées. L'une est à l'infini dans le plan tangent à la première cyclide au pôle. Les 10 autres sont les réciproques des 10 cercles qui passent au pôle.

---

(1) Depuis la présentation de ce Mémoire à l'Académie en 1869, M. Geiser, de Zurich, naturellement sans connaître notre travail, a développé la même méthode dans un Mémoire inséré au *Journal de Borchardt*, t. LXX, p. 249.

Considérons maintenant les sections par des plans et des sphères quelconques. Une remarque générale nous servira de guide dans l'étude de cette question.

Supposons que, étant donnée une sphère directrice, on prenne pour surface déférente une développable quelconque. Aux plans tangents de cette développable correspondent les points d'une courbe anallagmatique (Γ). A toute ligne tracée sur la développable correspondra une surface enveloppe de sphères contenant cette courbe, et chacune des sphères sera, en général, tangente à la courbe en deux points a, a', réciproques l'un de l'autre par rapport à la sphère directrice. A toute ligne double de la développable correspondra au contraire une surface enveloppe de sphères contenant la courbe (Γ_1), et telle que chaque sphère soit tangente à la courbe en quatre points a, a', b, b', réciproques par couples par rapport à la sphère directrice.

Cela posé, soient (Σ), (Σ′) deux anallagmatiques par rapport à la même sphère directrice, et soient (B), (B′) leurs déférentes. Il est clair que, à tout point commun à (Σ), (Σ′), correspondra un plan tangent commun à (B), (B′), et par conséquent les points de la courbe d'intersection des deux anallagmatiques seront dérivés des plans tangents de la développable circonscrite à (B) et à (B′). On pourra appliquer à cette développable toutes les remarques que nous venons de faire.

Si l'une des deux surfaces n'est pas anallagmatique, on pourra lui adjoindre sa réciproque par rapport à (S), et ces deux surfaces constitueront ainsi un système anallagmatique (Σ).

Soit, par exemple, une cyclide définie par la déférente (A), et cherchons son intersection avec une sphère (S′), orthogonale à (S), de centre C. La sphère (S′) est l'anallagmatique dérivée du point C; car tous les plans passant par C donnent des points de (S′). La développable circonscrite aux deux déférentes est donc le cône de sommet C circonscrit à la quadrique (A). Donc

Aux coniques de la déférente correspondent sur la cyclide les sections par des sphères orthogonales à (S), *et ayant leur centre au pôle du plan des coniques par rapport à la déférente.*

Étudions maintenant l'intersection de deux cyclides ayant même sphère directrice (S), et ayant pour déférentes deux quadriques quelconques (A), (A').

Les points communs aux deux cyclides seront dérivés des plans de la développable $\boxed{(A)(A')}$, et aux coniques doubles de cette développable correspondront quatre cyclides à deux points doubles, contenant l'intersection des cyclides données. Nous allons étudier des cas particuliers importants.

Supposons qu'on demande de déterminer l'intersection d'une cyclide et d'une sphère (U), de centre C quelconque. Adjoignons à cette sphère la réciproque (U') par rapport à (S) et de centre C', et les deux sphères constitueront un système anallagmatique, qui admettra pour déférente une surface de révolution (B), ayant pour foyers les centres C, C' des deux sphères, et inscrite à la sphère directrice (art. 59) en tous les points où celle-ci est rencontrée par (U) ou par (U').

Si (A) est la déférente de la cyclide, la développable $\boxed{(A)(B)}$, considérée comme surface déférente, nous donnera les points d'intersection de (U) et de la cyclide. Les quatre coniques doubles de cette développable donneront quatre cyclides enveloppes de sphères, contenant la courbe; et les sphères inscrites dans ces quatre cyclides couperont la sphère sécante suivant quatre séries de cercles doublement tangents à la section cherchée.

On aura donc les élements nécessaires pour déterminer cette cyclide, et l'on voit que les quatre cônes ayant pour sommet le point C et pour bases les quatre lignes doubles sont les lieux des centres des sphères de chaque série doublement tangentes à la courbe de section. Ces cônes sont homofocaux. Quant aux sphères contenant les focales de la section, elles coupent la sphère (S) suivant les mêmes cercles que les plans des lignes doubles correspondantes de la développable

$\boxed{(A)(B)}$. Comme elles sont aussi orthogonales à (U), elles peuvent être considérées comme déterminées.

Comme application de ces constructions, cherchons la condition pour que la sphère sécante coupe suivant une courbe située sur un cylindre. Il faudra que l'une des focales soit plane, c'est-à-dire que le plan de l'une des lignes doubles de la développable $\boxed{(A)(B)}$ passe au point C. Car, dans ce cas, le cône qui avait pour base la ligne double contenue dans ce plan, et qui contenait les centres des sphères tangentes doubles d'une série, se réduira à un plan. Ainsi il passera par le point C, 1, 2, 3 des faces du tétraèdre conjugué à (A) et à (B), suivant que la courbe sera sur 1, 2 ou 3 cylindres. Cherchons d'abord la condition pour qu'un seul cylindre contienne la courbe.

Soit (P) le plan passant par C et ayant même pôle par rapport à (B) et à (A). Comme C est le foyer de (B), ce pôle devra être sur une perpendiculaire élevée à (P) en C. Or, il n'y a que trois plans passant par le point C et ayant leurs pôles par rapport à (A) sur une droite perpendiculaire. Ce sont les trois plans de symétrie du cône de sommet C, circonscrit à (A). Ces plans une fois connus, le reste de la construction ne présente aucune difficulté.

Une application plus intéressante consiste dans la détermination des coniques sphériques qui se trouvent sur la cyclide. Alors le point C, foyer de la surface (B) et centre de la sphère sécante, devra avoir même plan polaire par rapport à (B) et à (A). Son plan polaire par rapport à (A) devra donc être perpendiculaire à l'axe focal OC de la surface de révolution (B) (O est le centre de la sphère directrice). Ainsi,

Le lieu des centres des sphères coupant la cyclide suivant une conique sphérique est une courbe telle que le plan polaire d'un de ses points C par rapport à (A) soit perpendiculaire à la droite OC.

Cette courbe se rencontre dans la théorie des normales à une quadrique. C'est une cubique gauche passant par le point O, par le centre de (A), ayant pour directions asympto-

tiques les axes de (A), passant par les pieds des normales menées de O à (A), etc.

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Si des centres des cinq sphères directrices on abaisse des normales sur les déférentes correspondantes, on obtient 30 points qui avec les 5 centres des sphères directrices sont sur une cubique gauche ayant pour directions asymptotiques les axes de symétrie des déférentes, et passant par leur centre. Cette cubique gauche est le lieu des centres des sphères coupant la surface suivant des coniques sphériques.

A chaque point C de la cubique correspond une seule sphère (U), qu'on déterminera ainsi. Soit (P) le plan polaire de C, perpendiculaire à OC. La surface de révolution inscrite à (S), ayant C pour foyer, (P) pour plan directeur correspondant, sera la déférente de (U); (U) passera donc par le cercle de contact de cette surface, et, comme elle a son centre en C, elle est déterminée.

Parmi les sphères coupant suivant des coniques sphériques, il y en a plusieurs qui sont remarquables.

1° Les cinq sphères concentriques aux sphères directrices, mais ayant pour rayons ceux de ces sphères multipliées par $\sqrt{-1}$.

2° Celles qui ont leurs centres aux pieds des normales abaissées des centres des sphères directrices sur les déférentes correspondantes. *Ces sphères coupent la cyclide suivant deux de leurs grands cercles.* La droite d'intersection des plans de ces cercles est donc une normale double de la cyclide.

Il y a donc cinq groupes de six normales doubles de la cyclide.

Il est utile de savoir déterminer les points à l'infini de toute section sphérique de la cyclide. On peut construire ces points de la manière suivante :

Soit (U) une sphère sécante de centre C'.

Les points à l'infini de la section sont ceux du cercle de l'infini pour lesquels la sphère et la cyclide seront tangentes.

Les plans tangents en ces points devront passer par le centre de la sphère et être tangents à la développable circonscrite à la cyclide sur le cercle de l'infini, c'est-à-dire à la développable focale (art. 53) circonscrite aux cinq déférentes.

Donc les points à l'infini de la section sphérique sont les points de contact avec le cercle de l'infini des quatre plans déterminant par leurs intersections les focales du cône de sommet C circonscrit à (A). Ces points de contact sont évidemment sur les plans perpendiculaires aux focales de ce cône.

On voit que les points à l'infini de la cyclique ne dépendent que du centre, et non du rayon de la sphère sécante.

Pour qu'ils viennent se réunir par groupes de deux, c'est-à-dire *pour que la cyclique devienne une cartésienne, il faut et il suffit que la sphère sécante ait son centre sur une des focales des déférentes.*

Si le centre de la sphère s'éloigne à l'infini sur la focale, elle se transforme en un plan perpendiculaire à l'asymptote de la focale, et ce plan coupe suivant des ovales de Descartes.

Il y a donc six séries de sections parallèles donnant des ovales de Descartes. Deux de ces séries seulement sont réelles.

On peut encore établir ce résultat de la manière suivante :

Les deux nappes de la cyclide qui se croisent au cercle de l'infini sont tangentes l'une à l'autre en quatre points, qui sont les points de contact avec le cercle de l'infini des quatre génératrices suivant lesquelles la développable circonscrite aux déférentes (A_i) est coupée par le plan de l'infini. Donc tous les plans passant par deux de ces quatre points couperont la cyclide suivant une courbe ayant deux rebroussements à l'infini; ce sera donc une cartésienne plane.

Les directions de ces sections cartésiennes sont aussi celles des sections circulaires des quadriques (V) de l'article 41 inscrites dans la cyclide.

Dans le cas où la cyclide aurait pour déférente une surface de révolution, c'est-à-dire serait une cartésienne (art. 55), les

deux séries d'ovales de Descartes réelles viendraient se confondre en une seule. Les cyclides cartésiennes correspondent donc aux surfaces de révolution de la théorie des quadriques.

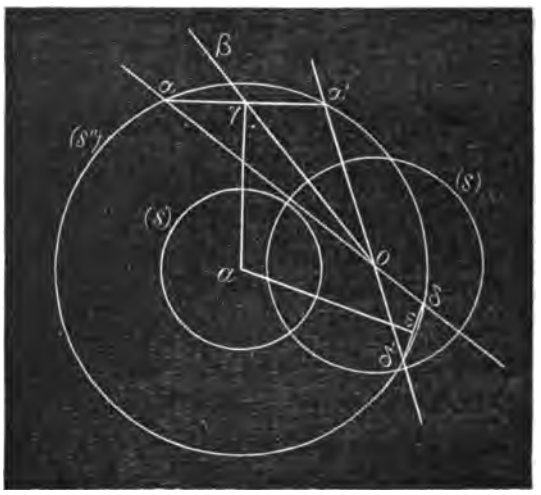
Toute cyclide peut d'ailleurs être transformée en cartésienne par la méthode des rayons vecteurs réciproques. Il suffira (art. 24) de placer le pôle en un point quelconque de l'une des cinq focales.

En terminant, nous nous proposerons une question en quelque sorte réciproque des précédentes : Étant donnée une cyclique, peut-on la placer sur une cyclide d'une espèce donnée, par exemple sur un tore?

Soit (D) le cône de sommet a coupant la sphère (S) de centre O suivant la cyclique donnée. Les sphères doublement tangentes d'une même série seront toutes orthogonales à une sphère (S′) de centre a, orthogonale à (S), et elles auront leurs centres sur un cône (E) de sommet O, supplémentaire du cône (D) (art. 19). Pour que la cyclique soit sur un tore, il faudra que les sphères doublement tangentes de même rayon aient leurs centres sur un ou plusieurs cercles. Or toutes celles de ces sphères qui ont le même rayon auront leurs centres à l'intersection du cône (E) et d'une sphère (S″) concentrique à (S′), c'est-à-dire sur une cyclique. Ces sphères enveloppent en général une surface du 8^e ordre; mais cette surface se décompose en deux tores, si la cyclique des centres se décompose en deux cercles. Il faudra donc qu'une sphère (S″), concentrique à (S′), coupe le cône (E) suivant deux cercles, et, pour cela, la première condition est que le centre a de (S″) soit dans un plan principal de (E), ou, comme (E) et (D) sont supplémentaires, qu'un plan de symétrie de (D) passe au centre O de (S). Il faut donc que la cyclique, intersection de (S) et de (D), ait un plan de symétrie. Cette condition, qui était évidente *a priori*, est d'ailleurs suffisante.

Soient, en effet, $O\alpha$, $O\alpha'$ les génératrices du cône (E) situées dans le plan principal; et soit $O\beta$ le diamètre conjugué

à l'une des deux séries de sections circulaires de ce cône, qui sont perpendiculaires au plan principal. Si du point a on



abaisse la perpendiculaire $a\gamma$ sur la direction de la section circulaire, elle rencontre le diamètre $O\beta$ en un point γ, et il est clair que la section circulaire de diamètre $\alpha\alpha'$, dont le plan passe en γ, sera sur une sphère de centre a, coupant le cône suivant deux cercles $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$. A ces deux cercles correspondent deux tores, qui contiennent la cyclique, et dont les axes sont les droites $a\gamma$, $a\varepsilon$, focales du cône (D). Aux deux autres cônes passant par la courbe correspondent quatre nouveaux tores. Donc,

Quand une cyclique a un plan de symétrie, elle peut être placée sur six tores, dont les axes sont les focales situées dans le plan de symétrie des trois cônes passant par la courbe.

On voit par la construction précédente que, *si la cyclique est une cartésienne, il n'y a pas de tore contenant la courbe.* Les droites $a\gamma$, $O\gamma$ sont parallèles, et les tores se réduisent aux trois cônes contenant la cyclique. Cette remarque sépare les cartésiennes des autres cycliques à plans de symétrie.

La question précédente a été traitée pour les cycliques planes par M. de la Gournerie dans son Mémoire, déjà cité, sur les lignes spiriques.

La détermination des cyclides à quatre points doubles contenant une cyclique ne présenterait aucune difficulté. Les points doubles de ces cyclides décrivent les focales; les coniques déférentes sont sur un des cônes contenant les focales, et leurs plans enveloppent un autre cône contenant la même focale, etc.

61.

Du système orthogonal formé par les cyclides homofocales, et des propriétés d'une méthode de transformation déjà définie.

Nous avons vu (art. 44) comment le mode de génération des surfaces anallagmatiques, proposé par M. Moutard, revient à un procédé de transformation des figures, dans lequel à un point μ de la *première* figure correspondent, dans la *deuxième* figure, deux points m, m', par la construction suivante.

Soit (P) le plan polaire de μ par rapport à la sphère (S). Les points m, m' sont les centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de (P) et de (S).

Quand le point μ décrit une surface (A), le plan (P) enveloppe une surface (A'), et les deux points m, m' décrivent une surface anallagmatique ayant (A') pour déférente, (S) pour sphère directrice.

Le plan P est tangent en un point M à (A'), et comme Mm, Mm' sont les normales en m, m' à l'anallagmatique, nous concluons que

Les plans tangents en m, m' à l'anallagmatique et le plan tangent en μ à (A) *vont se couper suivant une même droite située dans le plan* (P), *et qui est la polaire du point* M *par rapport au cercle, intersection de* (S) *et de* (P).

De cette importante proposition, qui donne la construction des plans tangents et qui s'applique évidemment aux tangentes à deux courbes correspondantes, nous allons déduire un principe général, tout à fait analogue à celui de la conservation

des angles dans la transformation par rayons vecteurs réciproques. A cet effet, nous rappellerons quelques définitions.

Plusieurs géomètres, et en premier lieu M. Cayley, en vue de généraliser les déterminations métriques de la géométrie, ont substitué au cercle de l'infini, dans la définition des angles, une quadrique quelconque (Q). Étant donnés deux plans (P), (P'), si par leur intersection on mène deux plans tangents (T), (T') à la quadrique (Q), on peut appeler angle des deux plans la fonction V définie par l'équation

$$e^{2iV} = R, \quad V = \frac{1}{2i} \log R,$$

R désignant le rapport anharmonique des quatre plans (P), (P'), (T), (T'). Si les deux plans (P), (P') sont conjugués dans la quadrique, l'angle V est droit, le rapport anharmonique R étant égal à -1.

De même, on appelle angle de deux droites une fonction V' définie par l'équation

$$e^{2iV'} = R', \quad V' = \frac{1}{2i} \log R',$$

R' étant le rapport anharmonique des deux droites et des tangentes menées dans leur plan et de leur point de rencontre à la quadrique (Q). Il est clair que, si les deux droites sont conjuguées dans la quadrique, leur angle ainsi défini est droit.

Les définitions précédentes concordent avec les définitions habituelles, quand la quadrique (Q) devient le cercle de l'infini. Pour distinguer les angles tels que nous venons de les définir, nous les appellerons angles par rapport à la quadrique (Q).

Cela posé, la transformation que nous étudions possède une propriété fondamentale : elle conserve les angles, c'est-à-dire que les angles de la première figure, mesurés par rapport à la sphère (S), sont égaux aux angles ordinaires de la seconde.

Soient, en effet, μt, $\mu t'$ les tangentes à deux courbes pas-

sant en μ et allant rencontrer en deux points t, t' le plan polaire (P) de μ. Les tangentes en m aux deux courbes anallagmatiques correspondantes iront rencontrer les premières tangentes aux deux points t, t'. D'ailleurs la droite tt' coupe la sphère en deux points a, a', et il est clair que les deux faisceaux de quatre droites

$$\begin{matrix} mt, & mt', & ma, & ma', \\ \mu t, & \mu t', & \mu a, & \mu a' \end{matrix}$$

ont le même rapport anharmonique R.

Mais les deux droites $\mu a, \mu a'$ sont des tangentes à la sphère, puisque μ est le pôle du plan (P) contenant a, a'. L'angle V [dans la sphère (S)] des droites $\mu t, \mu t'$ est donc égal à

$$\frac{1}{2i} \log R.$$

De même, puisque m est le centre d'une sphère de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (P) et, par conséquent, par a, a'; ma, ma' sont des droites allant rencontrer le cercle de l'infini, et par suite l'angle *ordinaire* des droites mt, mt' est aussi égal à

$$\frac{1}{2i} \log R.$$

La proposition est donc démontrée pour l'angle de deux courbes; elle subsiste d'ailleurs pour l'angle de deux surfaces, ou pour l'angle d'une surface et d'une courbe.

Les conséquences les plus importantes de ce principe de la conservation des angles se rapportent au cas où les angles sont droits, et, en nous souvenant que les directions à angle droit dans la sphère sont celles qui sont conjuguées dans cette surface, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Si les tangentes à deux courbes de la première figure en leurs points communs sont conjuguées dans la sphère, les courbes anallagmatiques correspondantes se coupent à angle droit.

Si deux surfaces de la première figure se coupent en des

points pour lesquels les plans tangents sont conjugués dans la sphère (S), les surfaces anallagmatiques correspondantes se coupent à angle droit.

Si l'on a, dans la première figure, un système triple formé de surfaces telles que, en tous les points communs à deux surfaces, les plans tangents soient conjugués dans la sphère, le système triple d'anallagmatiques correspondant sera formé de surfaces orthogonales.

Plus généralement,

Toutes les fois qu'on aura un système triple de surfaces telles que, en tous les points communs à deux d'entre elles, les plans tangents soient conjugués dans une quadrique fixe (Q), on pourra déduire de ce système un système triple orthogonal.

Il suffira, en effet, de transformer par l'homographie le système entier de manière que (Q) devienne une sphère, et d'appliquer alors la proposition précédente. On peut encore, en tenant compte des définitions qui précèdent, énoncer ainsi le théorème :

De tout système triple orthogonal par rapport à une quadrique, on peut déduire un système triple orthogonal ordinaire, et réciproquement.

L'existence du système triple orthogonal formé par les cyclides homofocales est une conséquence directe des propositions précédentes.

Soient, en effet, une suite de quadriques inscrites dans une même développable circonscrite à la sphère (S). Nous avons vu (art. 47) que les cyclides correspondantes sont homofocales; et d'ailleurs, comme il passe trois quadriques réelles du système par tout point intérieur à la sphère (S), il passera trois cyclides homofocales, toujours réelles, par tout point réel de l'espace. Comme les plans tangents à deux quadriques en un point commun à ces deux surfaces sont conjugués dans la sphère, les cyclides correspondantes se couperont à angle droit.

62.

Généralisation des notions de normales, de focales et de lignes de courbure.

Étant donnée une surface quelconque, joignons chacun de ses points au pôle du plan tangent à la surface, par rapport à une quadrique fixe que nous pouvons supposer être la sphère (S). On aura ainsi, pour chaque point de la surface considérée, une droite que nous appellerons la normale [par rapport à (S)] de la surface.

Une ligne de courbure sera le lieu des points pour lesquels les normales ainsi définies forment une surface développable.

De même, on appellera focale [par rapport à (S)] de la surface les lignes doubles de la développable circonscrite à (S) et à la focale.

En adoptant ces définitions, qui constituent une extension naturelle de celles qui sont en usage, nous allons voir que notre méthode de transformation, qui conserve les angles, conserve aussi les lignes de courbure et les focales, c'est-à-dire qu'elle transforme les lignes de courbure et les focales, telles que nous venons de les définir, en lignes de courbure et en focales ordinaires de l'anallagmatique. Commençons par les focales.

Nous avons vu (art. 43) que, si l'on circonscrit à une surface (B) et à la sphère une développable (Δ), à (Δ) correspond dans la deuxième figure une développable (Δ'), circonscrite à l'anallagmatique (Σ) correspondante de (B), et au cercle de l'infini. Les lignes doubles de ces développables sont aussi correspondantes, et comme elles sont, par définition et respectivement, les focales de (B) [par rapport à (S)] et les focales ordinaires de l'anallagmatique, on voit que les focales se conservent dans notre transformation. Il importe cependant de faire une exception : la courbe de contact de (Δ) et de (S),

qui n'est pas courbe double de (Δ), est courbe double de (Δ'), et par conséquent focale de (Σ).

Considérons maintenant les lignes de courbure de (B) [par rapport à (S)]. En tous les points d'une telle ligne (Γ), les normales forment une développable (R). A cette courbe (Γ) correspond sur (Σ) une ligne (Γ'), et la développable (R) a pour homologue une surface enveloppe de sphères (R'), dont tous les cercles sont normaux à (Σ) en tous les points de (Γ'), d'après le principe de la conservation des angles. Puisque (Γ') coupe à angle droit tous les cercles de (R'), cette surface admettra (Γ') comme ligne de courbure, et puisque (Σ) et (R') se coupent à angle droit, (Γ') sera aussi ligne de courbure de (Σ), ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les lignes de courbure se correspondent et que les angles se conservent dans notre transformation, on pourra étendre l'important théorème de M. Dupin sur les systèmes orthogonaux aux lignes de courbure généralisées, et donner la proposition suivante :

Un système triple orthogonal par rapport à une quadrique est formé de surfaces se coupant suivant leurs lignes de courbure (par rapport à cette quadrique).

Ce théorème suffit à la détermination des lignes de courbure d'une quadrique (A) par rapport à une quadrique (Q). Ce seront les lignes suivant lesquelles (A) sera coupée par les quadriques inscrites dans la développable $\boxed{(A)\,(Q)}$. Mais on en déduit surtout cette nouvelle définition des lignes de courbure généralisées :

Les lignes de courbure de toute surface par rapport à (Q) sont les lignes passant en un point de la surface, et dont les deux tangentes sont conjuguées à la fois dans l'indicatrice de la surface et dans la quadrique (Q).

On pourrait ajouter à ces exemples l'extension du théorème de Joachimsthal, d'après lequel, si deux surfaces ont une ligne de courbure commune, elles se coupent sous un angle constant. Nous réservons pour le moment toutes ces consé-

quences, ainsi que l'extension très intéressante de la notion de ligne géodésique, et nous allons terminer par quelques applications à la théorie des cyclides.

On sait, par exemple, que, étant données deux quadriques (Q), (Q'), homofocales par rapport à (S) [c'est-à-dire inscrites dans une développable circonscrite à (S)], les droites tangentes à ces deux quadriques se groupent de deux manières différentes, en surfaces développables se coupant à angle droit dans (S) [c'est-à-dire telles que les plans tangents aux deux développables contenant une même droite soient conjugués dans (S)].

Les droites se transformant en cercles orthogonaux à (S), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tous les cercles tangents à deux cyclides homofocales et orthogonaux à une des sphères directrices des cyclides peuvent se grouper de deux manières différentes sur deux séries de surfaces enveloppes de sphères. Ces surfaces se coupent à angle droit et par conséquent tous les cercles sont normaux à un troisième système de surfaces.

Les surfaces enveloppes de sphères sont tangentes à l'une des cyclides et ont leur arête de rebroussement sur l'autre, en sorte que les sphères enveloppées sont normales à l'une des cyclides et tangentes à l'autre.

Nous donnerons encore l'exemple suivant :

Tous les cônes de même sommet circonscrits à des surfaces homofocales [par rapport à (S)] sont homofocaux. Donc

Deux points quelconques réciproques par rapport à (S) peuvent être pris pour sommets d'une série de cyclides à deux points doubles (réciproques de cône), circonscrites à toutes les cyclides homofocales.

Ces cyclides sont homofocales et orthogonales. Leurs focales sont les six cercles orthogonaux à (S) et appartenant aux trois cyclides du système orthogonal passant aux sommets considérés, ces six cercles sont trois à trois sur quatre sphères de rayon nul.

Si les deux sommets sont pris sur une des focales [non située sur (S)], ces cyclides deviennent des cyclides à quatre points doubles.

C'est la généralisation du théorème important sur les cônes de révolution circonscrits aux quadriques homofocales.

NOTES ET ADDITIONS

Note I.

De l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée.

Nous avons indiqué à l'article 6 une méthode nouvelle pour obtenir l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. On peut former cette équation dans le cas général, en employant les paramètres différentiels analogues à ceux de Lamé, et dont la théorie a été développée surtout par M. Beltrami.

Soit

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \tag{1}$$

l'expression de la distance de deux points infiniment voisins, et introduisons les notations suivantes,

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\}.$$

Ces fonctions seront des invariants.

La détermination des lignes géodésiques dépendra de l'intégration de l'équation

$$\Delta_1 \varphi = \text{const.};$$

celle des lignes isothermes, de l'équation

$$\Delta_2 \varphi = 0 .$$

L'équation différentielle des surfaces applicables s'exprime au moyen de ces invariants. En appelant x la coordonnée rectangulaire d'un point de la surface, on trouvera pour x l'équation différentielle du second ordre

$$2\Delta_1(x, \Delta_1 x)\,\Delta_2 x - \Delta_1\Delta_1 x = -4k\,\Delta_1(\Delta_1 - 1) ,$$

k désignant la courbure de la surface.

La méthode que nous avons indiquée dans le texte est susceptible d'applications nombreuses. Pour le moment, nous nous contenterons de montrer comment elle conduit à l'équation différentielle qui détermine le rayon vecteur mené à un point fixe d'un point quelconque de la surface.

Rapportons la surface à des coordonnées polaires ordinaires r, θ, φ. On devra avoir

$$dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 ,$$

et par suite

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 = \frac{1}{r^2}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) - \frac{dr^2}{r^2} .$$

Le premier membre est le ds^2 d'une sphère de rayon égal à l'unité. Il suffira donc d'exprimer que la surface pour laquelle la formule

$$ds^2 = \frac{1}{r^2}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) - \frac{dr^2}{r^2}$$

donne la distance de deux points infiniment voisins a une courbure constante et égale à l'unité, et l'on aura ainsi l'équation différentielle à laquelle satisfait r. Cette équation est du second ordre.

Note III.

Sur une démonstration analytique des théorèmes de Poncelet, et sur un nouveau système de coordonnées dans le plan.

La démonstration des théorèmes de Poncelet donnée à l'article 38 m'a paru mériter d'être développée, parce qu'elle conduit, sans l'emploi des fonctions elliptiques et au moyen d'une transformation analytique des plus simples, à la proposition fondamentale de Poncelet : *Quand un polygone est à la fois inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, il existe une infinité de polygones jouissant des mêmes propriétés.* Depuis, en examinant la méthode employée, j'ai reconnu qu'elle pouvait être présentée d'une manière plus simple et plus directe, et qu'elle conduisait à des théorèmes ayant la plus grande analogie avec ceux de Poncelet et devant être considérés comme des généralisations des propositions de l'illustre géomètre. Quelques-uns des théorèmes contenus dans cette Note ont été déjà énoncés dans un travail *sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre,* inséré au tome I du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* M. Em. Weyr, dans un article inséré au *Journal de Borchardt,* avait aussi rencontré, en étudiant les involutions sur les coniques, des propositions générales relatives à des courbes de degré supérieur, qui sont, au fond, équivalentes à l'un des théorèmes métriques de notre *troisième partie,* et que nous démontrons d'une manière directe dans la Note actuelle.

I.

Considérons une section conique (K), tracée dans le plan, et supposons qu'on obtienne toutes les tangentes à cette conique, en faisant varier le paramètre m dans l'équation

$$\alpha m^2 + \beta m + \gamma = 0 , \tag{1}$$

où α, β, γ désignent des coordonnées trilinéaires ou, si l'on veut, des fonctions linéaires des coordonnées ordinaires du point. L'équation de la conique (K) sera en conséquence

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 , \tag{2}$$

Si la tangente à cette conique doit passer par un point $(\alpha', \beta', \gamma')$, m sera déterminé par l'équation

$$\alpha' m^2 + \beta' m + \gamma' = 0 .$$

Désignons par ρ, ρ_1 les racines de cette équation, on aura

$$\alpha' = \frac{-\beta'}{\rho + \rho_1} = \frac{\gamma'}{\rho\rho_1} , \tag{3}$$

et nous pourrons regarder le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ comme déterminé par les deux quantités ρ, ρ_1, qui seront alors des coordonnées, d'une nature spéciale, du point. Quand ρ, ρ_1 seront connus, les formules (3) détermineront α', β', γ'. On voit que, dans le nouveau système de coordonnées, un point est défini par l'intersection de deux tangentes à la conique (K), et quoique les formules (3) nous permettent de passer très simplement des coordonnées ρ, ρ_1 aux coordonnées ordinaires, nous allons voir que l'emploi des nouvelles coordonnées variables peut être utile dans un grand nombre de questions.

Dans le nouveau système, l'équation de la conique (K) de base prend la forme

$$(\rho - \rho_1)^2 = 0 ; \tag{4}$$

son premier membre devient un carré parfait. Cette propriété permet de décomposer les équations de certaines courbes.

Par exemple, toute conique doublement tangente à la courbe de base (K) a une équation de la forme

$$K = P^2$$

Dans le nouveau système, cette équation deviendra

$$d^2(\rho - \rho_1)^2 = [a\rho\rho_1 + b(\rho + \rho_1) + c]^2 ,$$

a, b, c, d désignant quatre constantes; ou, en extrayant la racine carrée,

$$d(\rho - \rho_1) = a\rho\rho_1 + b(\rho + \rho_1) + c,$$

équation de la forme

$$A\rho\rho_1 + B\rho + C\rho_1 + D = 0.$$

Ainsi, une équation de cette forme représente une conique doublement tangente à la conique (K), et cette conique se réduit à une droite, si $B = C$.

II.

Cela posé, soit une courbe déterminée par une équation algébrique en ρ, ρ_1,

$$f(\rho, \rho_1) = 0, \tag{5}$$

et proposons-nous de déterminer le degré de cette courbe. Il y a deux cas à distinguer, suivant que l'équation est ou n'est pas symétrique par rapport à ρ et à ρ_1.

Supposons d'abord qu'elle ne soit pas symétrique, et qu'elle soit du degré m en ρ et m_1 en ρ_1. Pour trouver l'ordre du lieu qu'elle représente, nous allons chercher le nombre de points de ce lieu situés sur une tangente quelconque à la conique (K). Or, une telle tangente est définie par l'une ou l'autre des équations

$$\rho = a \quad , \quad \rho_1 = a.$$

A l'hypothèse $\rho = a$ correspondent m_1 valeurs de ρ_1, et par suite m_1 points; à la valeur $\rho_1 = a$ correspondent de même m points. On a donc en tout $m + m_1$ points de la courbe sur la tangente, et par suite la courbe est du degré $m + m_1$.

Si, au contraire, l'équation de la courbe est symétrique, elle est nécessairement du même degré m en ρ et en ρ_1. Les deux hypothèses $\rho = a, \rho_1 = a$ donnent les mêmes points; la courbe est seulement du degré m.

J'omets un cas intermédiaire, où le premier membre de l'équation (5) serait décomposable en facteurs, les uns symétriques, les autres non symétriques en ρ, ρ_1, et que nous n'aurons pas à considérer.

Réciproquement toute courbe de degré m est représentée par l'équation la plus générale, symétrique en ρ, ρ_1, et du degré m par rapport à chacune des variables. C'est ce qui résulte des formules (3), et aussi d'un calcul relatif au nombre des coefficients arbitraires. Car on reconnaît que l'équation symétrique la plus générale du degré m en ρ contient $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ arbitraires.

Nous pouvons, à l'aide de ces seules remarques, démontrer plusieurs théorèmes généraux sur les polygones inscrits et circonscrits.

III.

Soit d'abord une courbe d'ordre n, passant par l'intersection de deux faisceaux de n droites $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Son équation générale sera de la forme

$$A_1 A_2 \ldots A_n = k \cdot B_1 B_2 \ldots B_n . \tag{6}$$

Supposons maintenant que les droites A_i, B_i soient toutes tangentes à la conique (K); on pourra poser

$$\begin{cases} A_i = \alpha a_i^2 + \beta a_i + \gamma = \alpha (a_i - \rho)(a_i - \rho_1), \\ B_i = \alpha b_i^2 + \beta b_i + \gamma = \alpha (b_i - \rho)(b_i - \rho_1), \end{cases} \tag{7}$$

et, en adoptant les notations suivantes,

$$\begin{cases} \varphi(\rho) = (\rho - a_1)(\rho - a_2) \ldots (\rho - a_n), \\ \psi(\rho) = \sqrt{k}\,(\rho - b_1)(\rho - b_2) \ldots (\rho - b_n), \end{cases} \tag{8}$$

l'équation de la courbe prendra la forme

$$\varphi(\rho)\varphi(\rho_1) = \psi(\rho)\psi(\rho_1),$$

ou

$$\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)} = \frac{\psi(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)}. \tag{9}$$

Dans cette équation, les variables sont séparées, et, en raisonnant comme à l'article 27, on reconnaîtra qu'on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\Phi(\rho)}{\Psi(\rho)} = \frac{\Psi(\rho_1)}{\Phi(\rho_1)} \tag{10}$$

où l'on a

$$\Phi(u) = m\varphi(u) + n\psi(u),$$
$$\Psi(u) = m\psi(u) + n\varphi(u).$$

La nouvelle équation (10) contient une arbitraire nouvelle, à laquelle on peut donner toutes les valeurs possibles. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si une courbe d'ordre n passe par les n^2 points d'intersection de deux faisceaux de n tangentes à la conique (K), *elle contient une infinité d'autres systèmes de n^2 points formant les intersections de deux faisceaux de n tangentes à la conique* (K).

Par exemple, si une conique contient les quatre sommets d'un quadrilatère circonscrit à une autre conique, elle contient aussi les sommets d'une infinité d'autres quadrilatères circonscrits. Mais nous n'insistons pas sur ces cas particuliers, et nous allons démontrer un deuxième théorème général.

IV.

Considérons les courbes d'ordre n passant par *tous* les points d'intersection de $n+1$ tangentes $A, A_1, \ldots, A_n$ à la conique (K). L'équation de ces courbes peut s'écrire

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0, \tag{11}$$

où $a, a_1, \ldots a_n$ désignent n constantes arbitraires.

Mais, les droites A_i étant des tangentes à la conique (K), on aura

$$A_i = \alpha(b_i - \rho)(b_i - \rho_1),$$

et l'équation (11) pourra s'écrire

$$\sum \frac{a_i}{(b_i - \rho)(b_i - \rho_1)} = 0, \tag{12}$$

ou, en multipliant par $\rho - \rho_1$,

$$\sum \frac{a_i}{b_i - \rho} = \sum \frac{a_i}{b_i - \rho_1}, \tag{13}$$

équation qui est de la forme

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)}, \tag{14}$$

$f(\rho)$ étant un polygone de degré inférieur à celui de $\omega(\rho)$.

Réciproquement, toute équation de la forme précédente pourra être ramenée à la forme (12), et elle représentera une courbe d'ordre n, contenant tous les sommets du polygone circonscrit à la conique (K), et dont les côtés sont définis par l'équation

$$\varphi(\rho) = 0.$$

Mais l'équation (14) peut être écrite

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho) + kf(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1) + kf(\rho_1)},$$

et, cette nouvelle équation étant de même forme que la précédente, la courbe sera circonscrite au polygone dont l'équation est

$$\varphi(\rho) + kf(\rho) = 0.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Quand une courbe d'ordre n contient tous les sommets d'un polygone de $n+1$ côtés, tous tangents à une conique, elle est circonscrite de la même manière à une infinité d'autres polygones de $n+1$ côtés, formés avec d'autres tangentes à la même conique.

Par exemple, quand une courbe du 4e ordre contient tous les sommets d'un pentagone, comme un pentagone est toujours circonscrit à une conique, elle contient aussi tous les sommets d'une infinité d'autres pentagones, tous circonscrits à une même conique. D'où il suit, comme l'a fait remarquer M. Lüroth (*Mathematische Annalen*, t. I), qu'étant donnée une courbe du 4e ordre, on ne peut en général lui inscrire un pentagone dont elle contienne tous les sommets.

La proposition précédente peut être complétée, et nous allons démontrer qu'*étant donnés deux polygones, l'un de m, l'un de n côtés* ($n = m$ ou $< m$), *circonscrits à une même conique, on peut toujours par leurs* $\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ *sommets faire passer au moins une courbe de degré* $m-1$, *qui sera circonscrite de la même manière à une infinité d'autres polygones de m côtés circonscrits à la conique.*

En effet, soient

$$f(\rho) = 0 \quad , \quad \varphi(\rho) = 0$$

les équations de degrés m, n, qui définissent les côtés de ces deux polygones, et soit $\psi(\rho)$ un polynôme quelconque de degré $m-n$. L'équation

$$f(\rho)\varphi(\rho_1)\psi(\rho_1) - f(\rho_1)\varphi(\rho)\psi(\rho) = 0 \tag{16}$$

définira une courbe satisfaisant aux conditions indiquées, dont l'équation se ramènera à la forme (14), et contiendra $m-n$ paramètres arbitraires. La proposition est donc démontrée.

Par exemple, étant donnés deux triangles quelconques circonscrits à une conique, on peut, par leurs 6 sommets, faire passer une conique qui contiendra les sommets d'une infinité d'autres triangles circonscrits à la même conique que les deux premiers.

Étant donnés un triangle et un quadrilatère circonscrits à une conique, on peut par leurs 9 sommets faire passer une infinité de courbes du 3e ordre, circonscrites à une infinité d'autres quadrilatères circonscrits à la même conique, etc.

V.

Les théorèmes de Poncelet sont, dans toute leur généralité, une conséquence directe des propositions précédentes. Car supposons qu'une conique (C) contienne les $n+1$ sommets d'un polygone de $n+1$ côtés, circonscrit à la conique (K), et formé des droites $A, A_1, \ldots, A_n$. Alors on pourra disposer des constantes contenues dans l'équation

$$\frac{a}{A} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0, \tag{17}$$

de telle manière que la courbe représentée par cette équation ait n points nouveaux sur la conique (C); et, comme elle contient aussi les $n+1$ sommets du polygone situés sur la conique (C), cette courbe du degré n aura en tout $2n+1$ points communs avec la conique (C), et par conséquent la contiendra tout entière. Ainsi, avec des valeurs convenables des constantes a_i, l'équation (17) représente une courbe formée de la conique (C) et d'une autre courbe (C') de degré $n-2$. Cette courbe composée (CC') contient d'ailleurs, d'après ce qui précède, les sommets d'une suite continue de polygones tous circonscrits à la conique (K). Par conséquent, la conique (C) sera circonscrite à chacun de ces polygones; elle contiendra sur chaque côté deux sommets de ce polygone. Les théorèmes de Poncelet se trouvent ainsi démontrés.

Quant à la courbe (C'), on démontrera de la manière suivante qu'elle se compose de coniques (et d'une droite dans le cas des polygones d'un nombre pair de côtés).

L'équation particulière de la conique (C) étant de la forme

$$\begin{cases} A(\rho^2 + \rho_1^2) + B\rho\rho_1 + C\rho\rho_1(\rho + \rho_1) + D(\rho + \rho_1) \\ \qquad + E\rho^2\rho_1^2 + F = 0, \end{cases} \tag{18}$$

une tangente $\rho = a$ la coupera en deux points, déterminés par les valeurs ρ', ρ'' de ρ. Ces deux valeurs sont les coordonnées d'un autre sommet du polygone, et comme il y a entre ces

deux racines une relation de même forme que l'équation (18), le nouveau sommet décrira aussi une conique.

En continuant ce raisonnement de proche en proche, on verra que tous les sommets décrivent des coniques, et que la courbe (C') se décompose en coniques. La théorie des équations déduirait, au reste, ce résultat très simplement du fait que l'équation (14), dans le cas qui nous occupe, admet un facteur de la forme (18).

VI.

Avant de continuer ces recherches, je reviens sur un point de l'article précédent, qui est susceptible d'être présenté avec une plus grande simplicité. On peut démontrer d'une manière directe et élémentaire le théorème suivant :

Étant donné un polygone formé de $n+1$ *droites* $A, A_1, \ldots, A_n$, *et inscrit dans une section conique* (C), *pour tout point de la conique, il y aura entre les polynômes* $A, A_1, \ldots, A_n$, *qui, égalés à zéro, représentent les côtés désignés par les mêmes lettres, une relation de la forme*

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0. \tag{19}$$

D'abord, le théorème est connu pour un triangle. On sait que l'équation de la conique (C), circonscrite à ce triangle, est de la forme

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} = 0.$$

Considérons maintenant un quadrilatère $AA_1A_2A_3$, et soit B une diagonale de ce quadrilatère. La conique (C), étant circonscrite à la fois aux deux triangles AA_1B, BA_2A_3 sera représentée par deux équations de la forme :

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \frac{b}{B} = 0, \quad \frac{a_2}{A_2} + \frac{a_3}{A_3} - \frac{b}{B} = 0;$$

et, en ajoutant, on voit que l'équation

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \frac{a_3}{A_3} = 0$$

conviendra à tous les points de la conique (C).

En passant au pentagone, à l'hexagone, etc., et en raisonnant de la même manière, on établirait pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés, $n+1$, l'équation citée plus haut,

$$\frac{a}{A} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0 .$$

C'est la proposition que nous avions établie d'une manière moins élémentaire dans l'article précédent.

VII.

On voit avec quelle simplicité le système de coordonnées employé met en évidence les théorèmes de Poncelet, et même des propositions plus étendues. Nous devons maintenant exposer d'autres remarques, qui nous conduiront à des théorèmes analogues, relatifs surtout aux courbes de degré supérieur.

Un des caractères distinctifs du système actuel de coordonnées consiste en ce que les deux variables au moyen desquelles nous déterminons la position d'un point ne sont pas, en quelque sorte, séparées l'une de l'autre. On ne peut pas les distinguer, comme dans d'autres systèmes de coordonnées; elles sont plus que symétriques, liées, conjuguées l'une à l'autre. D'après cela, l'équation

$$f(\lambda, \rho) = 0 , \tag{20}$$

où λ désigne un paramètre variable, fera connaître pour chaque valeur de λ un certain nombre n de valeurs de ρ. Ces n valeurs de ρ déterminent n tangentes à la conique (K). La

courbe décrite par les points d'intersection de ces tangentes, quand on fait varier λ, aura pour équation le résultat de l'élimination de λ entre les deux équations

$$f(\lambda, \rho) = 0, \quad f(\lambda, \rho_1) = 0. \tag{21}$$

Mais on peut retenir l'équation (20), qui détermine aussi bien les propriétés de la courbe. On voit qu'à chaque valeur de λ correspondra un polygone de n côtés, qui se déplacera en demeurant circonscrit à la conique, ses sommets décrivant la courbe considérée. Cherchons l'ordre de cette courbe.

Supposons que l'équation (20) soit du degré m en λ, et du degré n en ρ. A une valeur a de ρ correspondront m valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de λ; à chacune de ces valeurs correspondront $n-1$ nouvelles valeurs de ρ, c'est-à-dire que la droite $\rho = a$ coupera la courbe en $m(n-1)$ points. Ce dernier nombre est donc l'ordre de la courbe correspondante à l'équation (20).

Si m est égal à 1, l'équation est de la forme

$$f(\rho) + \lambda\varphi(\rho) = 0,$$

et, en éliminant λ entre les deux équations (21), on trouve

$$f(\rho)\varphi(\rho_1) - f(\rho_1)\varphi(\rho) = 0.$$

Ce sont les équations considérées en premier lieu. Nous allons examiner d'autres hypothèses.

VIII.

Si $n = 2$, l'équation (20) est de la forme

$$A\rho^2 + B\rho + C = U = 0, \tag{22}$$

où A, B, C sont des fonctions de λ.

A chaque valeur de λ correspondent deux valeurs de ρ, et un seul point par conséquent de la courbe (U), par les formules

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}. \tag{23}$$

La courbe (U) est donc unicursale; mais la forme précédente d'équation offre l'avantage de conduire presque sans effort à un théorème signalé rapidement par Jacobi dans une lettre à M. Hermite, et qui se rapporte à l'introduction des fonctions ultra-elliptiques dans cette théorie.

C'est un théorème bien connu d'analyse, que, si dans l'équation (22), contenant une des deux variables ρ au second degré, et l'autre λ au degré m, on donne à ρ une valeur quelconque, à cette valeur de ρ correspondent m valeurs, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de λ, telles que la somme des intégrales

$$\int \frac{\varpi(\lambda_i)\, d\lambda_i}{\sqrt{B_i^2 - 4A_iC_i}} \tag{24}$$

[où A_i, B_i, C_i désignent ce que deviennent A, B, C, quand on substitue λ_i à la place de λ, et où $\varpi(\lambda)$ est un polynôme d'un degré inférieur à $(m-1)$], étendue à toutes les racines, soit constante, quelle que soit la valeur donnée à la variable ρ.

En appliquant ce théorème à la question de géométrie que nous avons à étudier, nous voyons que,

Si l'on coupe la courbe unicursale (U) *d'ordre n par les tangentes à une conique quelconque* (K), *la somme des intégrales ultra-elliptiques* (24), *correspondantes aux n points d'intersection de la tangente et de la courbe* (U), *demeure constante quand la tangente se déplace.*

Si les fonctions A, B, C sont du second degré, la courbe (U) sera une conique. La somme des deux intégrales elliptiques, correspondantes aux points où elle est rencontrée par une tangente à la conique (K), demeurera constante. C'est le point de départ de Jacobi dans son Mémoire sur les cercles. Nous ne poursuivrons pas ce mode de démonstration.

IX.

Supposons maintenant que l'équation (20) soit du second

degré en λ, et d'un degré quelconque n en ρ. On pourra l'écrire sous la forme

$$V = A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0, \tag{25}$$

où A, B, C désignent des polynômes du degré n en ρ. Cette équation convient, d'après les remarques faites plus haut, à une courbe (V) de degré $2(n-1)$, et l'on reconnaîtra que, dans le cas général, cette courbe a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles à l'intersection des trois courbes, d'ordre $n-1$,

$$0 = \frac{AB_1 - BA_1}{\rho - \rho_1} = \frac{AC_1 - CA_1}{\rho - \rho_1} = \frac{BC_1 - CB_1}{\rho - \rho_1}.$$

[Dans ces équations A_1, B_1, C_1 désignent ce que deviennent A, B, C, quand on y substitue ρ_1 à ρ.] La courbe (V) est d'ailleurs circonscrite à une suite de polygones de n côtés, dont elle contient tous les sommets, et qui sont circonscrits à la conique (K). Les côtés de ces polygones sont déterminés par les n valeurs de ρ qu'on déduit de l'équation (27) pour chaque valeur de λ. D'ailleurs, ces valeurs de ρ satisfont, d'après le théorème de Jacobi rappelé plus haut, aux $n-1$ équations

$$\int \frac{\varpi(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1C_1}} + \ldots + \int \frac{\varpi(\rho_n)\,d\rho_n}{\sqrt{B_n^2 - A_nC_n}} = \text{const.}, \tag{26}$$

où l'on prend pour $\varpi(\rho)$ successivement $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-2}$. Ces dernières équations (26), si on les différentie, ne sont autres que les équations abéliennes considérées si souvent par Jacobi et par M. Liouville. D'ailleurs les valeurs de ρ, racines de l'équation

$$B^2 - AC = 0,$$

déterminent $2n$ tangentes à la conique (K), qui sont aussi tangentes à la courbe (V), chacune en $n-1$ points.

Nous sommes donc conduits à cette conclusion que, dans notre système de coordonnées, *les équations différentielles ultra-elliptiques* (26) *sont intégrées par des courbes de l'ordre* $2(n-1)$,

tangentes à $2n$ *tangentes fixes de la conique* (K), *et à chacune en* $n-1$ points.

Par exemple, pour $n=2$, les équations (26) se réduisent à une seule,

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{B_1^2-A_1C_1}}+\frac{d\rho_2}{\sqrt{B_2^2-A_2C_2}}=0. \tag{27}$$

C'est l'équation d'Euler, relative aux fonctions elliptiques. On voit qu'elle est intégrée par toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à (K). L'équation de ce quadrilatère est

$$B^2-AC=0. \tag{28}$$

Pour $n=3$, on a la première classe des fonctions ultra-elliptiques. Les équations (26) sont au nombre de deux; les courbes intégrant les deux équations différentielles sont des courbes du 4e ordre, à 1 point double, admettant pour tangentes doubles les 6 côtés fixes d'un hexagone circonscrit à la conique (K), etc.

On obtient d'ailleurs sans difficulté, dans tous les cas, l'équation des courbes (V), c'est-à-dire la relation entre ρ, ρ_1, convenant à tous les points de ces courbes. Il suffira d'exprimer que les deux équations en λ,

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0, \quad A_1\lambda^2+2B_1\lambda+C_1=0,$$

ont une racine commune, ce qui donne

$$(AC_1-CA_1)^2=4(AB_1-BA_1)(BC_1-CB_1).$$

Cette forme met en évidence le facteur à supprimer $(\rho-\rho_1)^2$, qui, égalé à zéro, donne la conique de base (K). La suivante,

$$(2BB_1-AC_1-CA_1)^2-4(B^2-AC)(B_1^2-A_1C_1)=0,$$

conduit à un théorème intéressant.

La courbe d'ordre n, définie par l'équation

$$2BB_1-AC_1-CA_1=0,$$

passe par les $2n^2$ points de contact des $2n$ tangentes multi-

ples avec la courbe (V) et avec la conique (K). Par exemple, pour $n=2$, on a la conique qui contient les 8 points de contact des coniques (K) et (V) avec leur quadrilatère circonscrit commun.

X.

Examinons d'une manière un peu plus détaillée les courbes du 4e ordre à 1 point double (V_4), que nous venons de rencontrer pour $n=3$, et qui ont fait l'objet des recherches récentes de MM. Brioschi et Cremona.

Nous voyons qu'elles sont circonscrites à une suite continue de triangles, dont les côtés sont tangents à la conique (K). Car, l'équation

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0 \tag{29}$$

étant ici du 3e ordre en ρ, à chaque valeur de λ correspondent trois valeurs de ρ, et par conséquent trois tangentes à la conique (K). Ces tangentes forment un triangle dont les sommets décrivent la courbe (V_4). Mais on doit se demander si ce mode de génération donne la courbe la plus générale du 4e ordre à 1 point double, et la réponse est affirmative.

Considérons d'abord une courbe générale du 4e ordre. On sait, depuis les belles recherches de Hesse, de Steiner, etc., que cette courbe peut être engendrée, et de plusieurs manières, comme enveloppe d'une suite de sections coniques, représentées par une équation de la forme

$$H + Dm + Em^2 = 0, \tag{30}$$

où m est un paramètre variable, et H, D, E des polynômes du second degré par rapport aux coordonnées ordinaires. Ces coniques sont telles qu'il en passe deux par un point quelconque du plan. Chacune est tangente à la courbe enveloppe du 4e ordre en 4 points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, variables avec m.

Mais il est clair que toutes les coniques représentées par

l'équation (30) font partie du réseau déterminé par trois d'entre elles, et par conséquent que les cordes de ces coniques $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, ... enveloppent la courbe, en général du 6e ordre et de la 3e classe, qu'on appelle la *cayleyenne* du réseau. Ainsi toutes les tangentes à la cayleyenne coupent la courbe du 4e ordre en quatre points, qui se déterminent par groupes de deux. Cette remarque établit une correspondance digne d'étude entre une courbe de 3e classe, la cayleyenne, et la courbe du 4e ordre.

Dans le cas où la courbe du 4e ordre a un ou plusieurs points doubles, il y a toujours un système au moins de coniques inscrites dans la courbe et contenant toutes un seul des points doubles, que nous appellerons α. Ces coniques déterminent un réseau, et, comme elles passent par un point fixe, la cayleyenne se réduit à une conique (K). Alors chaque conique est tangente à l'enveloppe en trois points seulement α_1, α_2, α_3, et les droites qui joignent ces trois points enveloppent la conique (K). C'est le mode de génération qu'il s'agissait de retrouver.

Nous pouvons d'ailleurs exprimer les coordonnées ordinaires d'un point de la courbe (V_4) en fonction d'une arbitraire, de la manière suivante.

Donnons-nous une des racines $\rho = u$ de l'équation (29). En résolvant cette équation par rapport à λ, λ sera exprimé par une fonction de u, contenant la racine carrée d'un polynôme du 6e degré en u. Mais, si l'on considère λ comme connu, l'équation du 3e ordre en ρ aura trois racines u, ρ, ρ_1. Supprimant la racine u, $\rho\rho_1$ et $\rho + \rho_1$ seront donnés en fonction rationnelle de u et de λ, ou, si l'on veut, en fonction de u et d'un radical carré du 6e degré en u. Or, une fois connus $\rho\rho_1$, $\rho + \rho_1$, on a, par les formules (3), les coordonnées ordinaires d'un point de la courbe.

XI.

Le système de coordonnées examiné ici se prête d'une manière très simple à la résolution de toutes les questions concernant les polygones circonscrits aux coniques. En voici un nouvel exemple.

Supposons qu'on se propose, étant données deux courbes (W), (W_1), de trouver le lieu décrit par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à la conique (K), et dont deux sommets décrivent les courbes (W), (W_1).

Soient

$$W = f(\rho, \rho_1) = 0, \quad W_1 = \varphi(\rho, \rho_1) = 0$$

les équations des deux courbes, et considérons le triangle circonscrit ABC dans une de ses positions. Les coordonnées des trois sommets seront, par exemple,

pour A, ... ρ_1, ρ_2;
pour B, ... $\rho\ , \rho_2$;
pour C, ... $\rho\ , \rho_1$.

Alors, si le point A décrit la courbe (W), on devra avoir

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \text{ou} \quad f(\rho_2, \rho_1) = 0.$$

De même, si B décrit (W_1),

$$\varphi(\rho, \rho_2) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(\rho_2, \rho) = 0.$$

Pour avoir le lieu décrit par le troisième sommet, il faudra donc éliminer ρ_2 entre les deux équations

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \varphi(\rho, \rho_2) = 0, \tag{31}$$

ou entre les deux suivantes,

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \varphi(\rho_2, \rho) = 0. \tag{31'}$$

Ce second système est identique au premier, si les équations sont symétriques. Dans tous les cas, la question est, on le voit, ramenée à une simple élimination.

Par exemple, supposons que (W), (W_1) soient des droites ou des coniques doublement tangentes à (K). On aura à éliminer ρ_2 entre deux équations

$$A\rho_1\rho_2 + B\rho_1 + C\rho_2 + D = 0,$$
$$A'\rho\rho_2 + B'\rho + C'\rho_2 + D' = 0,$$

ce qui conduit évidemment à une relation de même forme entre ρ et ρ_1.

Nous obtenons, par suite, le théorème bien connu suivant :

Si un triangle est circonscrit à une conique (K), *et que deux de ses sommets décrivent des droites ou des coniques doublement tangentes à la proposée, le troisième décrira aussi une conique doublement tangente à la proposée* (K).

Supposons maintenant que les deux courbes (W), (W_1) soient deux coniques, inscrites dans un même quadrilatère circonscrit à (K). Nous avons trouvé l'équation de ces coniques (27). En intégrant cette équation, on voit qu'ici le système (31) sera de la forme

$$F(\rho_1) - F(\rho_2) = \alpha, \quad -F(\rho_2) + F(\rho) = \beta.$$

En éliminant ρ_2, nous trouvons l'équation

$$F(\rho_1) - F(\rho) = \alpha - \beta,$$

qui représente une conique inscrite dans le même quadrilatère que les trois premières. C'est le théorème de Poncelet sous sa forme la plus complète, et la méthode suivie s'étend, on le voit, à d'autres questions.

Au moyen des remarques précédentes, nous pouvons aussi interpréter toute substitution faite sur l'une des variables. Soit

$$V = \varphi(\rho, \rho_1) = 0$$

l'équation d'une courbe (V). Si l'on substitue à ρ_1 la variable ρ_2, liée à la première par l'équation

$$U = f(\rho_1, \rho_2) = 0,$$

le résultat de la substitution définit une courbe nouvelle (V'),

et il est clair que (V′) est le lieu décrit par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à (K), et dont deux sommets décriraient les courbes (V), (U); ou plutôt, c'est, d'après ce qui précède, une des deux courbes dont se compose le lieu complet.

On verra ainsi que toute courbe du 4e ordre à deux points doubles peut être considérée, et d'une infinité de manières, comme le lieu décrit par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique (K), dont un sommet décrit une conique quelconque, et l'autre une conique doublement tangente à (K). J'indique seulement ce mode de génération, dont la démonstration exige quelques développements, qui sont donnés à la fin de cette note.

XII.

Nous avons vu comment l'équation différentielle d'Euler

$$\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = 0 \tag{32}$$

admet pour intégrales générales les coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à (R) et défini par l'équation

$$f(\rho) = 0 . \tag{33}$$

Si ce quadrilatère a pour deux de ses sommets opposés les points circulaires de l'infini, les coniques intégrales seront homofocales à (K).

On doit à M. Chasles deux beaux théorèmes, qu'on n'a pas encore essayé de démontrer par la considération des fonctions elliptiques. L'un de ces théorèmes peut s'énoncer ainsi :

Étant données deux coniques homofocales (C), (K), si de deux points a, a' de l'une (C) on mène des tangentes à l'autre, on forme un quadrilatère, dont les autres couples de sommets opposés b, b', c, c' sont aussi sur des coniques homofocales

aux proposées. Cette importante proposition se démontre sans difficulté de la manière suivante.

Soit la conique (K) et le quadrilatère défini par l'équation (33). Toutes les coniques inscrites dans ce quadrilatère seront représentées par l'équation

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = \alpha , \tag{34}$$

en sorte que, pour deux points (ρ , ρ_1) (ρ', ρ'_1), situés sur une conique, on aura

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = \int \frac{d\rho'}{\sqrt{f(\rho')}} - \int \frac{d\rho'_1}{\sqrt{f(\rho'_1)}} , \tag{35}$$

ce qu'on peut écrire

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - \int \frac{d\rho'}{\sqrt{f(\rho')}} = \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} - \int \frac{d\rho'_1}{\sqrt{f(\rho'_1)}} .$$

Cette dernière équation exprime le théorème qu'il s'agissait de démontrer. Elle signifie que la conique qui passe par le point (ρ , ρ') et qui est inscrite dans le même quadrilatère que les premières, passe aussi par le point (ρ_1 , ρ_1'). Or ces deux points sont deux sommets opposés du quadrilatère formé par les quatre tangentes $\rho , \rho' , \rho_1 , \rho'_1$; ce qui démontre la proposition indiquée.

On peut aussi faire intervenir le théorème d'Abel de la manière suivante.

En vertu de l'équation (35), on devra avoir l'identité

$$(Ax^2 + Bx + C)^2 - f(x) = D(x-\rho)(x-\rho_1)(x-\rho')(x-\rho'_1) , \tag{36}$$

et la symétrie de cette identité prouve immédiatement le théorème. Mais nous allons déduire de l'identité (36) la démonstration d'un autre théorème de M. Chasles.

Posons

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-a')(x-b') ,$$
$$\varpi(x) = D(x-\rho)(x-\rho')(x-\rho_1)(x-\rho'_1) .$$

L'identité (36) pourra s'écrire

$$(37)\quad (Ax^2+Bx+C)^2-\varpi(x)=(x-a)(x-b)(x-a')(x-b'),$$

et cette identité, toute semblable à la précédente, exprime que, dans le quadrilatère

$$\varpi(x)=0,$$

on peut inscrire une conique passant par deux sommets opposés $(a, b), (a', b')$ par exemple, du quadrilatère primitif

$$f(x)=0;$$

d'où le théorème suivant :

Étant données deux coniques (C), (K), si de deux points de (C) on mène des tangentes à la conique (K), elles forment un quadrilatère dans lequel on peut inscrire une conique passant par deux quelconques des sommets opposés du quadrilatère $\boxed{(C)(K)}$.

En transformant par l'homographie, on a le théorème de M. Chasles :

Étant données deux coniques homofocales, si de deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, on forme un quadrilatère circonscriptible à un cercle.

On sait que cette proposition comprend comme cas particulier les propriétés métriques focales.

Les théorèmes de géométrie que nous venons de démontrer s'étendent aux courbes plus générales que nous avons examinées, et qui correspondent aux équations abéliennes. On pourra consulter à ce sujet l'article présenté à la Société Philomathique (séances du 25 mai et du 8 juin 1872).

XIII.

Le système de coordonnées précédent trouve une application intéressante dans l'étude de quelques courbes, et, en particulier, de celles du quatrième ordre à deux points doubles.

Supposons qu'on ait à examiner une équation non symétrique en ρ, ρ_1. Une telle équation pourra toujours se mettre sous la forme

$$f(\rho, \rho_1) + (\rho - \rho_1)\varpi(\rho, \rho_1) = 0, \tag{38}$$

où f et ϖ sont des fonctions symétriques. Elles s'expriment donc en fonction rationnelle des coordonnées ordinaires, tandis que $\rho - \rho_1$ est la racine carrée du premier membre de l'équation de la conique (K). En élevant au carré pour rendre l'équation rationnelle, nous aurons l'équation

$$f^2 - (\rho - \rho_1)^2\varpi^2 = 0, \tag{39}$$

ou

$$P^2 - KQ^2 = 0. \tag{40}$$

La courbe qu'elle représente est tangente à la conique (K) en tous les points où elle la rencontre. Elle a des points doubles à l'intersection des courbes P et Q.

Par exemple, si l'équation (39) est du second degré en ρ et en ρ_1, mais non symétrique, elle représentera une courbe du 4e ordre ayant deux points doubles à l'intersection de la conique $P = 0$ et de la droite $Q = 0$, et cette courbe du 4e ordre sera tangente en quatre points à la conique (K).

Réciproquement, toute courbe du quatrième ordre à deux points doubles peut être représentée, et d'une infinité de manières, par une équation de la forme (38). Car il y a une série de coniques inscrites dans la courbe, et ne passant par aucun des points doubles; soit (K) l'une quelconque de ces coniques. L'équation de la courbe du 4e ordre pourra se mettre sous la forme (40) et par suite sous la forme équivalente (38). Ainsi, il suffit de prendre pour conique de base de notre système une quelconque des coniques tangentes à la courbe en quatre points.

Nous rencontrons ici un fait intéressant dans la théorie des courbes du 4e ordre à deux points doubles, et ce fait

se rattache aux différents modes de génération qu'on a proposés pour les décrire. On sait (en supposant que les deux points doubles soient les points à l'infini sur le cercle) qu'elles sont anallagmatiques par rapport à quatre pôles différents. Par suite, *pour toute droite passant par chacun de ces pôles, l'équation du 4e ordre qui détermine les points d'intersection de la droite et de la courbe se résout par des extractions de racines carrées.*

C'est là un fait analytique remarquable en lui-même. Les recherches précédentes lui donnent une réelle extension; car elles démontrent que la même propriété appartient aussi aux droites tangentes à l'une quelconque des coniques inscrites dans la courbe du 4e ordre.

Soit, en effet,

$$f(\rho, \rho_1) = 0$$

l'équation de la courbe, du second degré, mais non symétrique en ρ, ρ_1.

Une tangente quelconque à la conique (K) sera définie par l'une des équations

$$\rho = a, \qquad \rho_1 = a.$$

En prenant successivement $\rho = a$, $\rho_1 = a$, on aura à résoudre deux équations du second degré, qui donneront chacune deux des quatre points d'intersection de la droite et de la courbe.

Ainsi, étant donnée une courbe du 4e ordre à deux points doubles et une conique inscrite (K), toutes les tangentes à cette conique couperont la courbe en quatre points, se déterminant par des extractions de racines carrées. Quand la conique (K) se réduit à deux droites, ses tangentes viennent passer par le point de rencontre de ces droites, et l'on obtient le mode de génération dû à MM. Salmon et Moutard.

Il suit de là que, étant donnée une droite quelconque dans le plan de la courbe, l'équation du 3e degré qui détermine les trois coniques (K), inscrites dans la courbe et tangentes à la droite, est la résolvante de l'équation du 4e degré, faisant

connaître les points d'intersection de la droite et de la courbe. (Voir l'article 41 pour des remarques analogues relatives aux cyclides.)

Enfin, on peut déduire des remarques qui précèdent un mode de génération des courbes étudiées ici.

Si l'on fait correspondre anharmoniquement les cercles passant par deux points a, a' aux tangentes d'une conique (K), les intersections des cercles avec les tangentes correspondantes décrivent en général une courbe du 5e ordre. Mais, si la droite aa' est tangente à la conique (K), et, en outre, si la droite aa'', considérée comme tangente, correspond au cercle de rayon infini passant par a, a', la courbe du 5e ordre se décompose dans la droite aa' et en une cyclique circonscrite à la conique (K).

En terminant ce qui se rapporte aux courbes du 4e ordre, nous allons démontrer le mode de génération de ces courbes indiqué à l'article 12 de cette Note. Soit

$$f(\rho, \rho_1) = 0 \tag{41}$$

l'équation de la courbe proposée. Cette équation n'est pas symétrique, mais on peut la déduire d'une équation symétrique

$$F(\rho, \rho'_1) = 0, \tag{42}$$

par une substitution de la forme

$$A\rho_1\rho'_1 + B\rho_1 + C\rho'_1 + D = 0. \tag{43}$$

Cette substitution analytique, d'après les remarques faites plus haut, nous montre que la courbe est décrite par le sommet libre d'un triangle circonscrit à la conique (K), dont l'un des sommets décrit une conique quelconque (42), et l'autre une conique (43), inscrite à (K). Ainsi,

La courbe du 8e ordre décrite par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique (K), dont l'un des sommets décrit une conique quelconque (C), l'autre une conique (C') doublement tangente à (K), se compose de deux courbes du

4e ordre à deux points doubles. Réciproquement, toute courbe du 4e ordre à deux points doubles peut être engendrée comme nous venons de l'indiquer.

Notons encore une conséquence de l'équation (41). Si l'on donne à ρ une valeur quelconque, on trouve pour ρ_1 deux valeurs, entre lesquelles il y a une relation symétrique du second degré. Donc,

Étant donnée une courbe du 4e ordre à deux points doubles et une conique (K), inscrite dans la courbe, si des points où une tangente à (K) coupe la courbe on mène de nouvelles tangentes à la conique, ces tangentes forment un quadrilatère dont deux sommets opposés décrivent des coniques.

Note III.

Sur la démonstration directe des théorèmes de géométrie sphérique exposés dans la TROISIÈME PARTIE.

Dans la *Troisième Partie* (art. 33 à 38), nous avons donné quelques propositions de géométrie sphérique, que nous avons déduites des théorèmes analogues déjà démontrés pour les courbes planes (art. 27 à 32). Il ne sera pas inutile de montrer comment l'emploi du système de coordonnées étudié dans la Note précédente peut conduire à une démonstration directe des propositions relatives à la géométrie de la sphère, données dans la *Troisième Partie*. Mais auparavant nous allons exposer quelques remarques relatives à la perspective plane des figures tracées sur la sphère.

I.

Étant donnée une sphère (S) de centre O, projetons ses différents points sur un plan P, par des droites contenant le centre O. Alors à tout point m de la sphère correspondra un seul point M du plan. Mais ce point M aura pour homologues sur la sphère les deux points diamétralement opposés m, m', situés à l'intersection de la sphère (S) et du diamètre OM. On a donc un mode de représentation de la sphère sur un plan qui a été étudié surtout par M. Chasles, et, en dernier lieu, par M. Clebsch. Les points à l'infini de la sphère se projettent suivant ceux d'un cercle (K), intersection du plan de perspective (P) et du cône asymptote de la sphère. Les grands cercles de la sphère se projettent suivant des droites, et les petits cercles suivant des coniques doublement tangentes au cercle (K).

Les génératrices rectilignes de la sphère se projettent suivant les tangentes au cercle (K), et chacune de ces tangentes est la perspective de deux génératrices rectilignes de la sphère (S), qui sont diamétralement opposées et de systèmes différents.

D'après cela, si l'on emploie, pour déterminer les points à la surface de la sphère, le système de coordonnées formé des deux séries de génératrices rectilignes, de telle manière que la première des coordonnées demeure constante pour tous les points d'une génératrice rectiligne de l'un des systèmes, et la seconde pour tous les points d'une génératrice de l'autre système; à ce système de détermination des figures sphériques correspondra, dans le plan qui est la perspective de la sphère, le système de coordonnées qui a été étudié dans la Note précédente, et dans lequel on détermine un point par l'intersection de deux tangentes à la conique (K). Nous allons tout d'abord examiner la liaison entre les deux systèmes de coordonnées.

Soit un point du plan (P), ayant pour coordonnées ρ, ρ_1, définies dans la Note précédente. La tangente T au cercle (K), déterminée par la coordonnée ρ, est la perspective de deux génératrices du premier et du second système de la sphère t, t'. De même la tangente T_1, correspondante à ρ_1, est la projection de deux génératrices rectilignes t_1, t'_1. Donc le point M du plan intersection de T, T_1 est la projection de deux points m, m' de la sphère,

m, intersection de t, t'_1;

m', ... de t', t_1.

Ainsi, notre système de coordonnées symétriques ρ, ρ_1, qui détermine sans ambiguïté un point du plan, ne conserverait pas cette propriété sur la sphère. Pour faire disparaître cette difficulté, nous conviendrons qu'en déterminant le point M par les coordonnées ρ, ρ_1, la tangente définie par la première coordonnée ρ sera toujours la projection d'une génératrice rectiligne du premier système de la sphère; et au contraire, à

la tangente correspondante à ρ_1 on fera correspondre une génératrice rectiligne du second système. Alors à un système (ρ, ρ_1), définissant un seul point M du plan, correspondra aussi un seul point m de la sphère. Mais au système (ρ_1, ρ), définissant le même point M du plan, correspondra le point m' de la sphère, diamétralement opposé au point M.

Étant donnés deux points A, B de la sphère, définis par les coordonnées $\rho, \rho_1; \rho', \rho'_1$, les points associés A', B' auront pour coordonnées $\rho, \rho'_1; \rho', \rho_1$, et les points diamétralement opposés à ces derniers, $\rho'_1, \rho; \rho_1, \rho'$.

II.

Examinons maintenant les propriétés métriques relatives à ces systèmes de coordonnées. Nous allons rappeler les définitions importantes déjà données d'après M. Cayley (art. 61).

Étant donnés deux points dans le plan et la conique (K), appelons *distance* des deux points M, M' la fonction δ définie par l'équation

$$e^{2i\delta} = R,$$

R étant le rapport anharmonique des points M, M' et de ceux où la droite MM' coupe la conique (K).

De même, étant données deux droites, appelons *angle* de ces deux droites la fonction V, définie par l'équation

$$e^{2iV} = R',$$

R' désignant le rapport anharmonique formé avec les deux droites et les deux tangentes menées de leur point de rencontre à la conique (K).

Ces définitions subsistent quand on soumet la figure entière à une transformation homographique; car on sait que l'homographie ne change pas les rapports anharmoniques. Si l'on soumet, au contraire, la figure à une transformation par

polaires réciproques, les angles se changent en distances, les distances en angles.

Ces définitions étant admises, on reconnaît sans peine que deux points m, n de la sphère se projettent suivant deux points M, N du plan, tels que l'arc mn de la sphère soit égal à la distance MN, prise par rapport au cercle (K) et telle que nous venons de la définir. De même, deux grands cercles de la sphère se projettent suivant deux droites faisant le même angle que les deux grands cercles, pourvu qu'on mesure l'angle des droites par rapport au cercle (K).

Ainsi la géométrie de la sphère est identique à cette géométrie plane, dans laquelle on prend le cercle (K) pour *conique absolue,* suivant la définition de M. Cayley.

Il résulte de là que, dans la suite, nous pourrons considérer à volonté soit les figures planes, soit les figures sphériques comme rapportées à notre système de coordonnées, et nous obtiendrons en même temps les propriétés métriques des figures planes dans la géométrie de M. Cayley, et celles des figures sphériques avec les notions ordinaires d'angles et de distances.

III.

Proposons-nous d'abord de déterminer la distance de deux points M, M′ par rapport à une conique (K). Soit, comme dans la Note précédente,

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \tag{1}$$

l'équation de la conique, et $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les coordonnées de M et de M′. Tout point de la droite MM′ aura pour coordonnées $\alpha+\lambda\alpha', \beta+\lambda\beta', \gamma+\lambda\gamma'$, et, en exprimant que ce point satisfait à l'équation (1), on aura

$$\lambda^2(\beta'^2 - 4\alpha'\gamma') + 2\lambda(\beta\beta' - 2\alpha\gamma' - 2\gamma\alpha') + \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0. \tag{2}$$

Cette équation détermine les deux valeurs de λ correspondantes aux deux points d'intersection de la droite MM′ et de

la conique (K), et, d'après les principes connus, le rapport anharmonique de M, M′ et de ces deux points sera égal au rapport des racines de l'équation précédente.

En appelant r ce rapport, on a

$$\frac{(r+1)^2}{4r} = \frac{(\beta\beta' - 2\alpha\gamma' - 2\gamma\alpha')^2}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)(\beta'^2 - 4\alpha'\gamma')}. \tag{3}$$

On déduira de là la valeur de r, puis la distance δ des deux points, par la formule

$$e^{\sqrt{-1}\,\delta} = r. \tag{4}$$

En raisonnant de la même manière, on trouvera que l'angle V des deux droites définies par les équations

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0, \quad m'\alpha + n'\beta + p'\gamma = 0$$

est donné par la formule

$$e^{2\sqrt{-1}\,V} = r', \tag{5}$$

où

$$\frac{(1+r')^2}{r'} = \frac{2nn' - mp' - pm'}{(n^2 - mp)(n'^2 - m'p')}. \tag{6}$$

Voyons maintenant ce que deviennent ces formules dans notre système de coordonnées. Il suffit évidemment, pour avoir la distance des deux points définis par les coordonnées $\rho, \rho_1, \alpha, \alpha_1$, de substituer aux coordonnées ordinaires leurs expressions en fonction de $\rho, \rho_1, \alpha, \alpha_1$, ce qui se fait sans difficulté. On trouve ainsi, presque sans calcul,

$$\sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{(\rho-\alpha)(\rho_1-\alpha_1)}{(\rho-\rho_1)(\alpha-\alpha_1)}, \tag{7}$$

$$\cos^2\frac{\delta}{2} = -\frac{(\rho-\alpha_1)(\rho_1-\alpha)}{(\rho-\rho_1)(\alpha-\alpha_1)}, \tag{8}$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{\delta}{2} = -\frac{(\rho-\alpha)(\rho_1-\alpha_1)}{(\rho-\alpha_1)(\rho_1-\alpha)}. \tag{9}$$

A la surface de la sphère, δ sera l'arc joignant les deux

points; $2\sin\frac{\delta}{2}$ la corde, c'est-à-dire la distance rectiligne des deux points. On voit que les seconds membres de ces formules et leurs inverses sont les six rapports anharmoniques qu'on peut former avec les quantités ρ, ρ_1, α, α_1.

Examinons maintenant un autre problème, et proposons-nous, étant données deux droites, se coupant en un point (ρ, ρ_1) et passant l'une par le point (α, α_1), l'autre par le point (β, β_1), de trouver l'angle qu'elles forment entre elles. Appliquons les formules (5) et (6). Pour la première de ces droites, on a

$$m = \rho + \rho_1 - \alpha - \alpha_1,$$
$$n = \alpha\alpha_1 - \rho\rho_1,$$
$$p = \rho\rho_1(\alpha + \alpha_1) - (\rho + \rho_1)\alpha\alpha_1,$$

et pour la seconde on a des valeurs semblables de m', n', p'. En substituant ces valeurs dans la formule (6), on trouve

$$\frac{(1 + r')^2}{r'} = \frac{(M + M_1)^2}{M M_1}, \tag{10}$$

où

$$M = \frac{(\rho - \beta)(\rho - \beta_1)}{(\rho - \alpha)(\rho - \alpha_1)}, \qquad M_1 = \frac{(\rho_1 - \beta)(\rho_1 - \beta_1)}{(\rho_1 - \alpha)(\rho_1 - \alpha_1)};$$

et, par suite,

$$r' = \frac{M}{M_1} \text{ ou } \frac{M_1}{M}.$$

On a donc

$$V' = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{M}{M_1}. \tag{11}$$

Le double signe correspond aux deux sens dans lesquels on peut considérer l'angle des droites, ou celui des grands cercles de la sphère se projetant suivant les droites.

Nous avons obtenu l'expression de la distance de deux points et de l'angle de deux droites dans notre système de coordonnées. Au moyen de ces expressions, convenant aussi aux figures sphériques, on démontrera sans difficulté les pro-

positions de la *Troisième Partie*. Nous nous contenterons d'établir l'équation fondamentale (69) de l'article 33.

Soit un triangle sphérique ABC, dont les sommets ont pour coordonnées $\alpha, \alpha_1 ; \beta, \beta_1 ; \gamma, \gamma_1$. D'après la formule (11), les angles A, B, C de ce triangle seront donnés par les formules

$$e^{2iA} = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha_1-\beta)(\alpha-\gamma_1)(\alpha_1-\beta_1)}{(\alpha-\beta)(\alpha_1-\gamma)(\alpha-\beta_1)(\alpha_1-\gamma_1)},$$

$$e^{2iB} = \frac{(\beta-\alpha)(\beta_1-\gamma)(\beta-\alpha_1)(\beta_1-\gamma_1)}{(\beta-\gamma)(\beta_1-\alpha)(\beta-\gamma_1)(\beta_1-\alpha_1)},$$

$$e^{2iC} = \frac{(\gamma-\beta)(\gamma_1-\alpha)(\gamma-\beta_1)(\gamma_1-\alpha_1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma_1-\beta)(\gamma-\alpha_1)(\gamma_1-\beta_1)},$$

d'où il suit, en multipliant membre à membre, et en appelant S l'aire du triangle ABC,

$$e^{2iS} = \frac{(\alpha-\gamma_1)^2(\gamma-\beta_1)^2(\beta-\alpha_1)^2}{(\alpha_1-\gamma)^2(\gamma_1-\beta)^2(\beta_1-\alpha)^2}.$$

Or, soient M, M′ deux points de la sphère, de coordonnées γ_1, β pour M, et β_1, γ pour M′; et soient δ, δ' les arcs AM, AM′. D'après les formules (7), on aura

$$e^{2iS} = \frac{\sin^4\frac{\delta}{2}}{\sin^4\frac{\delta'}{2}}, \tag{12}$$

et par suite

$$e^{\frac{iS}{2}} = \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta'}{2}}.$$

Les points B′, C′, associés à B, C, ont pour coordonnées $\beta, \gamma_1 ; \gamma, \beta_1$; les points M, M′ sont donc diamétralement opposés à B′, C′, et nous retrouvons la formule de l'article 33.

Il est à remarquer qu'en extrayant la racine quatrième des deux membres de l'équation (12), nous avons choisi une racine

particulière du second. Ce choix se justifie; il suffit de supposer que le troisième sommet C du triangle vienne se placer sur l'arc AB. Les deux membres deviennent alors égaux à l'unité.

IV.

On peut encore appliquer les remarques précédentes à l'interprétation de certaines équations considérées soit dans le plan, soit sur la sphère.

Nous avons vu, dans la Note précédente, que l'équation

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)} \tag{13}$$

peut représenter, dans certains cas, des coniques inscrites dans un même quadrilatère circonscrit à la conique (K). La même équation représentera alors sur la sphère des coniques homofocales.

Supposons que, dans l'équation (13), $f(\rho)$ et $\varphi(\rho)$ soient de degré $2n$. Alors les coniques planes seront circonscrites à un polygone formé de $2n$ tangentes à (K), et se partageront tous les sommets de ce polygone. Les coniques sphériques seront circonscrites à un polygone formé de $2n$ génératrices rectilignes. Si l'on désigne, par exemple, ces génératrices par les nombres $1, 2, 3, \ldots, 2n$, la première conique contiendra les sommets $(1\ 2), (2\ 3), \ldots$; la seconde, $(1\ 3), (2\ 4), (3\ 5), \ldots$; la troisième, $(1\ 4), (2\ 5), \ldots$. Or l'équation (13) peut s'écrire

$$\prod_{i=1}^{i=n} \frac{(\rho - a_i)(\rho - a'_i)}{(\rho - b_i)(\rho - b'_i)} \cdot \frac{(\rho_1 - a_i)(\rho_1 - a'_i)}{(\rho_1 - b_i)(\rho_1 - b'_i)} = 1,$$

et, si l'on tient compte de la formule (11), on voit que l'équation précédente exprime la propriété suivante.

Formons les n segments dont les extrémités sont les points (a_i, a'_i) et (b_i, b'_i). La somme des angles sous lesquels on

voit ces segments d'un point de la courbe est égale à un multiple de π.

Nous avons donc le théorème suivant :

Soit une conique (C), circonscrite à une série de polygones d'un nombre pair de sommets, circonscrits à une conique (K). Soient $A_1, \ldots, A_n$, n sommets, pris de deux en deux, de l'un de ces polygones; $B_1, \ldots, B_n$, n sommets, choisis de la même manière, d'un autre de ces polygones. La somme des angles [par rapport à (K)] sous lesquels on voit d'un point de la courbe les segments $A_1B_1 \ldots, A_nB_n$, est égale à un multiple de π.

On peut généraliser ce théorème en prenant tous les sommets, et alors il s'applique aux polygones d'un nombre impair de côtés. Mais il est surtout utile sous la forme précédente.

Si nous nous proposons d'appliquer cette proposition aux coniques sphériques, nous voyons tout d'abord que, si une conique sphérique est circonscrite à un polygone formé de $2n$ génératrices rectilignes de la sphère, n sommets au plus de ce polygone peuvent être réels. En joignant ces sommets réels aux sommets correspondants de tout autre polygone inscrit, on formera des segments qui seront vus de tout point de la conique sphérique sous des angles dont la somme sera un multiple de π. Le lieu complet des points tels que la somme de ces angles soit un multiple de π se composera de cette conique et d'autres coniques homofocales.

Enfin, une application de ce même théorème peut être faite à la théorie de certaines surfaces du second degré, qu'on définit de la manière suivante.

Soit une quadrique (Q), coupant le cercle de l'infini suivant une conique (C), et supposons, ce qui n'a pas lieu en général, que la conique (C) soit circonscrite à une série de polygones d'un nombre pair $2n$ de côtés, circonscrits au cercle de l'infini, que nous appellerons ici (K). Soient deux polygones inscrits à (C) et circonscrits à (K), et formons avec leurs sommets les n segments $A, B_1, \ldots, A_nB_n$, définis précédem-

ment. Les extrémités de ces segments sont sur la conique (C), et par chacune de ces extrémités A_i, B_i on peut faire passer une génératrice rectiligne de (Q), d'un système donné. Appelons ces génératrices α_i, β_i, etc. Alors la génératrice d'un système opposé, passant par un point M de (C), rencontrera toutes les droites fixes α_i, β_i, et les plans passant par cette génératrice et par les droites α_i, β_i auront pour traces sur le plan de l'infini les droites MA_i, MB_i. Donc l'angle des plans $(M, \alpha_i), (M, \beta_i)$ est le même que celui des droites MA_i, MB_i, mesuré par rapport au cercle de l'infini. En appliquant donc le théorème déjà donné, nous avons la proposition suivante :

Quand une quadrique est circonscrite à un polygone de $2n$ sommets circonscrit au cercle de l'infini, on peut, et d'une infinité de manières, choisir sur cette quadrique deux groupes de n génératrices d'un même système, tels que les plans passant par un point de la surface et les génératrices du premier groupe forment avec les plans passant par le même point et les génératrices du second groupe des angles dont la somme soit égale à un multiple de π.

Par exemple, les hyperboloïdes étudiés par M. Chasles (*Journal de Liouville*, 1re série, t. I, p. 324), lieux des points tels que le rapport de leurs distances à deux droites fixes soit constant, sont circonscrits à une série de quadrilatères circonscrits eux-mêmes au cercle de l'infini. Ils ont un axe de symétrie perpendiculaire aux deux droites fixes, et, si l'on prend deux de leurs génératrices quelconques d'un même système, l'angle sous lequel on verra ces droites d'un point variable de la surface est égal à celui sous lequel on voit leurs symétriques par rapport à l'axe de symétrie, qui est perpendiculaire aux deux droites fixes.

Note IV.

Sur quelques surfaces remarquables du second degré et sur les cyclides correspondantes.

I.

Les résultats obtenus dans la *Troisième Partie* sont fondés sur une propriété importante de la fonction qui exprime le carré de la distance de deux points, en géométrie plane. Cette fonction, quand les deux points sont dans un plan, se décompose en un produit de deux facteurs linéaires. Une telle décomposition ne peut plus se faire quand les deux points que l'on considère sont situés d'une manière quelconque dans l'espace. Mais nous allons voir qu'elle subsiste quand on considère les distances des points de l'espace à des droites.

Soient, en effet,

$$(1)\qquad \begin{cases} P = Ax + By + Cz + D = 0, \\ P' = A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

les équations d'une ligne droite. En appliquant les méthodes de la géométrie analytique, on trouvera la formule suivante, qui donne la distance δ d'un point (x, y, z) à la droite,

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta^2 = \dfrac{(A'P - AP')^2 + (B'P - BP')^2 + (C'P - CP')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2} \\ = \dfrac{(A^2 + B^2 + C^2)P'^2 + (A'^2 + B'^2 + C'^2)P^2 - 2(AA' + BB' + CC')PP'}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2}. \end{cases}$$

Cela posé, supposons qu'on ait choisi, pour déterminer la droite, les deux plans qu'on peut mener par la droite tangentiellement au cercle de l'infini. Ces plans sont distincts, tant

que la droite ne rencontre pas le cercle de l'infini. Supposons que ce soient les plans (P), (P'). On aura alors

$$A^2 + B^2 + C^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2 = 0 , \tag{3}$$

et la formule (2) deviendra

$$\delta^2 = \frac{2PP'}{AA' + BB' + CC'} . \tag{4}$$

On voit que le carré de la distance d'un point à une droite fixe se décompose en deux facteurs linéaires par rapport aux coordonnées du point. Ces facteurs sont évidemment imaginaires.

Réciproquement, étant donnés deux plans quelconques (P), (P'), tangents au cercle de l'infini, le produit PP' des premiers membres de leurs équations représente, d'après la formule (4), une quantité proportionnelle au carré de la distance à leur droite d'intersection.

Soient δ, δ' deux droites définies, l'une par les plans P, P', l'autre par les plans Q, Q', ces quatre plans étant tangents au cercle de l'infini. Les plans P, Q ; P', Q' déterminent deux droites δ'', δ'', qui forment un couple associé au premier. De même, les combinaisons P, Q' ; Q, P', déterminent deux nouvelles droites δ''', δ''', formant un nouveau couple. Ces six droites forment les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre circonscrit au cercle de l'infini, et ces droites associées donnent lieu à plusieurs propriétés.

Par exemple, on a, en désignant par δ_i la distance d'un point de l'espace à la droite correspondante,

$$\delta^2\delta'^2 = k\,PP'QQ' , \quad \delta'^2\delta''^2 = k_1\,PP'QQ' ,$$

k, k_1 étant des constantes que la formule (4) apprend à déterminer.

Donc

$$\delta'\delta'' = h\,\delta\delta' , \tag{5}$$

et nous sommes conduits au théorème suivant :

Étant données deux droites quelconques de l'espace, si par

ces droites on mène les plans tangents au cercle de l'infini, on forme un tétraèdre tel que les produits des distances d'un point aux trois couples d'arêtes opposés conservent des rapports constants quand le point se déplace dans l'espace.

Étudions ces plans tangents au cercle de l'infini. Voici comment on peut former leur équation la plus générale. Soient (P), (P′) deux plans rectangulaires quelconques, et désignons par p, p' les distances d'un point de l'espace à ces plans. On aura des équations de la forme

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - h,$$

où

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

et de même,

$$p' = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' - h'.$$

D'ailleurs

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Cela posé, l'équation d'un plan (P) tangent au cercle de l'infini est

$$\mathrm{P} = \lambda(p + ip'), \tag{6}$$

où λ est une constante réelle. Celle du plan conjugué P′ est

$$\mathrm{P}' = \lambda(p - ip'). \tag{7}$$

Appelons maintenant δ la distance du point (x, y, z) à la droite (p, p') ou (P, P′), et ω l'angle que fait avec le plan (p) le plan passant par ce point et par la droite. On a

$$p = \delta\cos\omega, \quad p' = \delta\sin\omega,$$

et par suite

$$\mathrm{P} = \lambda\delta e^{i\omega}, \quad \mathrm{P}' = \lambda\delta e^{-i\omega}, \tag{8}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = e^{2i\omega}, \quad \mathrm{P}\mathrm{P}' = \lambda^2\delta^2, \tag{9}$$

formules dont la première seule n'avait pas été établie plus haut.

Si, pour un second point (x_1, y_1, z_1) les fonctions P, P′ prennent les valeurs P_1, P'_1, et δ, ω les valeurs δ_1, ω_1, on a

$$\frac{P'}{P'_1} = e^{2i\omega_1},$$

et par suite,

$$\frac{P}{P'} : \frac{P_1}{P'_1} = e^{2i(\omega-\omega_1)}, \tag{10}$$

$\omega - \omega_1$ est l'angle sous lequel se coupent les deux plans passant par la droite (P, P′) et par les deux points considérés. L'équation précédente exprime un théorème connu.

Associons à la droite (P, P′) une seconde droite (Q, Q′), définie de la même manière. On aura ici

$$e^{2i\omega'} = \frac{Q}{Q'},$$

et par suite

$$e^{2i(\omega+\omega')} = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

Les droites (P, Q), (P′, Q′) forment un couple associé aux deux premières. Nous avons dans le second membre, à un facteur constant près, le rapport des carrés des distances du point (x, y, z) à ces droites.

Donc si l'on a deux droites δ, δ', et un couple de droites associées δ'', δ''', le rapport des distances d'un point quelconque de l'espace aux deux droites δ, δ' est une fonction $ke^{i(\omega+\omega')}$ de la quantité $\omega + \omega'$. Ces angles ω, ω' sont ceux que font les plans passant par le point variable et les droites δ'', δ''', respectivement avec des plans fixes passant par ces deux droites.

Si δ et δ' deviennent imaginaires conjuguées, un des couples associés sera formé de droites réelles, et l'on pourra remplacer le rapport des distances à deux droites imaginaires par une fonction imaginaire des éléments géométriques réels ω, ω'.

D'après cela, étant donnée une surface telle que le produit des distances d'un de ses points à n droites $\delta_1, \ldots, \delta_n$ soit

voit ces segments d'un point de la courbe est égale à un multiple de π.

Nous avons donc le théorème suivant :

Soit une conique (C), circonscrite à une série de polygones d'un nombre pair de sommets, circonscrits à une conique (K). Soient $A_1, \ldots, A_n$, n sommets, pris de deux en deux, de l'un de ces polygones; $B_1, \ldots, B_n$, n sommets, choisis de la même manière, d'un autre de ces polygones. La somme des angles [par rapport à (K)] sous lesquels on voit d'un point de la courbe les segments $A_1B_1 \ldots, A_nB_n$, est égale à un multiple de π.

On peut généraliser ce théorème en prenant tous les sommets, et alors il s'applique aux polygones d'un nombre impair de côtés. Mais il est surtout utile sous la forme précédente.

Si nous nous proposons d'appliquer cette proposition aux coniques sphériques, nous voyons tout d'abord que, si une conique sphérique est circonscrite à un polygone formé de $2n$ génératrices rectilignes de la sphère, n sommets au plus de ce polygone peuvent être réels. En joignant ces sommets réels aux sommets correspondants de tout autre polygone inscrit, on formera des segments qui seront vus de tout point de la conique sphérique sous des angles dont la somme sera un multiple de π. Le lieu complet des points tels que la somme de ces angles soit un multiple de π se composera de cette conique et d'autres coniques homofocales.

Enfin, une application de ce même théorème peut être faite à la théorie de certaines surfaces du second degré, qu'on définit de la manière suivante.

Soit une quadrique (Q), coupant le cercle de l'infini suivant une conique (C), et supposons, ce qui n'a pas lieu en général, que la conique (C) soit circonscrite à une série de polygones d'un nombre pair $2n$ de côtés, circonscrits au cercle de l'infini, que nous appellerons ici (K). Soient deux polygones inscrits à (C) et circonscrits à (K), et formons avec leurs sommets les n segments $A, B_1, \ldots, A_nB_n$, définis précédem-

ment. Les extrémités de ces segments sont sur la conique (C), et par chacune de ces extrémités A_i, B_i on peut faire passer une génératrice rectiligne de (Q), d'un système donné. Appelons ces génératrices α_i, β_i, etc. Alors la génératrice d'un système opposé, passant par un point M de (C), rencontrera toutes les droites fixes α_i, β_i, et les plans passant par cette génératrice et par les droites α_i, β_i auront pour traces sur le plan de l'infini les droites MA_i, MB_i. Donc l'angle des plans $(M, \alpha_i), (M, \beta_i)$ est le même que celui des droites MA_i, MB_i, mesuré par rapport au cercle de l'infini. En appliquant donc le théorème déjà donné, nous avons la proposition suivante :

Quand une quadrique est circonscrite à un polygone de $2n$ sommets circonscrit au cercle de l'infini, on peut, et d'une infinité de manières, choisir sur cette quadrique deux groupes de n génératrices d'un même système, tels que les plans passant par un point de la surface et les génératrices du premier groupe forment avec les plans passant par le même point et les génératrices du second groupe des angles dont la somme soit égale à un multiple de π.

Par exemple, les hyperboloïdes étudiés par M. Chasles (*Journal de Liouville*, 1re série, t. I, p. 324), lieux des points tels que le rapport de leurs distances à deux droites fixes soit constant, sont circonscrits à une série de quadrilatères circonscrits eux-mêmes au cercle de l'infini. Ils ont un axe de symétrie perpendiculaire aux deux droites fixes, et, si l'on prend deux de leurs génératrices quelconques d'un même système, l'angle sous lequel on verra ces droites d'un point variable de la surface est égal à celui sous lequel on voit leurs symétriques par rapport à l'axe de symétrie, qui est perpendiculaire aux deux droites fixes.

Soient (Q'), (Q''), ... les quadriques ainsi définies; la dernière sera un plan, si n est impair.

Cela posé, menons par chacun des côtés p_i, p'_i des plans tangents à la quadrique (Q), se coupant consécutivement suivant des génératrices rectilignes de (Q) passant aux points $p_1p'_1$, p'_1p_2, ...

Soient P_i, P'_i les plans ainsi obtenus. L'équation

$$P_1P_2 \dots P_n = k_1 . P'_1P'_2 \dots P'_n \tag{12}$$

représente une surface ayant avec la quadrique $2n$ droites communes, celles qui passent par les $2n$ sommets. De plus, on peut disposer de k_1 de telle manière que, si l'on coupe par le plan de (C), l'équation (12) se réduise à l'équation (11), et par conséquent le lieu représenté par cette équation aura, avec la quadrique (Q), $2n$ droites et une conique communes. Il devra donc contenir la quadrique (Q). Pour la même raison, il contiendra les quadriques (Q'), (Q''), ..., inscrites dans la développable $\boxed{(C)\ (Q)}$ et déjà définies.

Nous avons donc le théorème suivant, équivalent à celui de l'article 38 :

Le lieu représenté par l'équation

$$P_1P_2 \dots P_n = k . P'_1P'_2 \dots P'_n \tag{13}$$

peut se décomposer en quadriques, toutes inscrites dans une même développable, et alors l'ensemble de ces quadriques peut, d'une infinité de manières, être représenté par une équation de la forme précédente. Tous les plans P_i, P'_i *demeurent tangents à toutes les quadriques.*

Si n est impair, l'une de ces quadriques se réduit à un plan.

Nous allons faire deux applications intéressantes de ce théorème.

1° Supposons que dans la développable $\boxed{(C)\ (Q)}$ on puisse inscrire une sphère; les plans P_i, P'_i, dans toutes les équations de la forme précédente, demeureront tangents à la sphère. L'anallagmatique dérivée du lieu représenté par

l'équation (13) aura donc, d'après les résultats de l'article 44, une infinité d'équations de la forme

$$R_1 R_2 \dots R_n = k.R'_1 R'_2 \dots R'_n .$$

D'ailleurs, elle se décompose en cyclides homofocales, correspondantes aux différentes quadriques faisant partie du lieu représenté par l'équation (13). Nous avons donc la proposition suivante, déjà énoncée, pour le cas particulier de quatre pôles, par M. Moutard :

L'équation

$$R_1 R_2 \dots R_n = k.r_1 r_2 \dots r_n \tag{14}$$

peut convenir à tous les points d'une cyclide. Il suffit qu'on puisse inscrire dans la focale un polygone formé de $2n$ génératrices de la déférente, et alors l'équation (14) *représentera, en même temps que la cyclide, d'autres cyclides homofocales.*

L'une de ces cyclides se réduit à l'une des sphères principales, si n est impair.

2° Supposons qu'on puisse circonscrire au cercle de l'infini un polygone de $4n$ côtés, inscrit dans (Q). Alors l'équation de la quadrique (Q) pourra s'écrire

$$P_1 P_2 \dots P_{2n} = k.P'_1 P'_2 \dots P'^n_2 , \tag{15}$$

et P_i, P'_i sont des plans tangents au cercle de l'infini. Cette équation exprime donc qu'il y a un rapport constant entre les produits des distances d'un point de la surface à deux séries de n droites,

$$P_1, P_2 ; P_3, P_4 ; \dots ; P_{2n-1}, P_{2n} ,$$

d'une part, et les droites

$$P'_1, P'_2 ; P'_3, P'_4 ; \dots ; P'_{2n-1}, P'_{2n}$$

pour le second groupe. Donc,

Si une quadrique est circonscrite à un polygone de $4n$ sommets circonscrit au cercle de l'infini, on peut choisir, et d'une infinité de manières, deux séries de n droites, telles que, pour tout point de la quadrique, il y ait un rapport constant entre les produits des

distances aux deux séries de droites. Le lieu complet des points jouissant de cette propriété se compose de plusieurs quadriques homofocales.

C'est la généralisation des théorèmes de M. Chasles sur l'hyperboloïde, lieu des points dont les distances à deux droites ont un rapport constant. Cet hyperboloïde est la plus simple des surfaces considérées ici, et les théorèmes généraux de cette Note et de la précédente conduiraient à plusieurs propriétés nouvelles de cette surface. Mais nous terminerons ici, sans insister davantage, notre étude des diverses formes et des applications des théorèmes relatifs aux polygones inscrits et circonscrits.

Note V.

Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la géométrie de M. Cayley.

I.

Dans les articles 61 et 62 du texte et dans la Note III, nous avons essayé de donner une idée des rapports que M. Cayley a établis entre la géométrie des relations métriques et celle du rapport anharmonique. Les théories de l'illustre géomètre anglais ont été résumées dans l'ouvrage de M. Fiedler *sur les formes binaires*. Dans ces derniers temps, elles ont été développées dans un Mémoire important de M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. IV).

Une fois définies les notions d'angles et de distances, les autres définitions de la géométrie métrique ordinaire subsistent, et peuvent être introduites sans aucune difficulté. C'est ainsi que, dans l'article 62, nous avons généralisé les notions de focales et de lignes de courbure. Nous allons nous occuper maintenant des lignes géodésiques.

Étant donnée une figure dans l'espace, prenons pour *surface absolue* la sphère représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \tag{1}$$

Alors la distance de deux points déterminés par les coordonnées (x, y, z), (x', y', z') sera donnée par la formule

$$\cos^2\delta = \frac{(xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}, \tag{2}$$

tout à fait analogue à la formule (3) de la Note III. On aura aussi

$$(3)\quad \sin^2\delta = \frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)-(xx'+yy'+zz'-R^2)^2}{(x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)}.$$

Pour deux points intérieurs à la sphère, le second membre de cette équation est négatif; la distance δ de deux points sera donc une quantité imaginaire de la forme Ai.

Si le point (x', y', z') est voisin du point (x, y, z), on fera

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz,$$

et la formule (3), en y remplaçant $\sin^2\delta$ par δ^2 ou $d\sigma^2$, donnera

$$(4)\quad d\sigma^2 = \frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(xdx+ydy+zdz)^2}{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2}.$$

Telle est l'expression de la distance $d\sigma$ de deux points infiniment voisins.

Nous allons maintenant chercher les lignes géodésiques d'une surface définie par l'équation

$$(5)\qquad f(x, y, z) = 0.$$

Je dis que ces lignes géodésiques sont caractérisées par cette propriété, que leur plan osculateur est normal au plan tangent (c'est-à-dire passe par le pôle de ce plan). On voit que cette proposition est la généralisation de la propriété fondamentale des lignes géodésiques ordinaires.

A cet effet, prenons, pour plus de symétrie, une variable indépendante quelconque t, et soient x', y', z' les dérivées de x, y, z par rapport à t.

Nous avons

$$(6)\qquad d\sigma = \sqrt{F}.dt,$$

$$(7)\qquad F = \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{x^2+y^2+z^2-R^2} - \left(\frac{xx'+yy'+zz'}{x^2+y^2+z^2-R^2}\right)^2,$$

et l'intégrale à rendre minimum est

$$(8)\qquad \int \sqrt{F}.dt,$$

les variables x, y, z étant liées par l'équation de la surface. D'après les principes du calcul des variations, les équations différentielles de la ligne géodésique sont

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial\sqrt{\mathrm{F}}}{\partial x'}=\frac{\partial\sqrt{\mathrm{F}}}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{9}$$

et les deux équations analogues en y et z.

Il reste à vérifier que le plan osculateur de la ligne définie par ces équations est conjugué du plan tangent par rapport à la sphère. Or, pour que deux plans ayant pour équations

$$mx+ny+pz+q=0, \qquad m'x+n'y+p'z+q=0$$

soient conjugués ou normaux (par rapport à la sphère), il faut que l'on ait

$$\mathrm{R}^2(mm'+nn'+pp')-qq'=0.$$

Appliquons cette relation au plan osculateur et au plan tangent; il faudra qu'en appelant x'', y'', z'' les dérivées secondes de x, y, z, on ait

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z} \\ x & y & z & \mathrm{R}^2 \\ x' & y' & z' & 0 \\ x'' & y'' & z'' & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Or les formules (9), développées, nous donnent des expressions de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{A}x+\mathrm{B}x'+\mathrm{C}x'', \\ \frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{A}y+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}y'', \\ \frac{\partial f}{\partial z}=\mathrm{A}z+\mathrm{B}z'+\mathrm{C}z'', \end{cases} \tag{11}$$

et l'équation à vérifier prend alors la forme

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-\mathrm{A}\mathrm{R}^2=0,$$

ou, en substituant les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$,

$$(12) \quad \begin{cases} A(x^2+y^2+z^2-R^2) + B(xx'+yy'+zz') \\ \qquad + C(xx''+yy''+zz'') = 0 ; \end{cases}$$

et l'on reconnaîtra, en substituant les valeurs de A, B, C, que cette dernière équation se vérifie identiquement.

Notre théorème est donc démontré : ***Les lignes géodésiques ont leur plan osculateur normal au plan tangent.***

Il résulte de ce théorème que la ligne la plus courte entre deux points de l'espace est, dans la géométrie de M. Cayley, la ligne droite qui joint ces deux points. Car la ligne la plus courte réunissant deux points de l'espace sera géodésique sur toutes les surfaces qui la contiendront, et par conséquent devra avoir son plan osculateur indéterminé. Ainsi,

Dans la géométrie de M. Cayley, les lignes droites sont les lignes les plus courtes entre deux points.

On suppose toutefois qu'en allant d'un point à l'autre on ne rencontre pas la sphère; car alors il y aurait discontinuité, la distance devenant infinie. Ainsi, les deux points doivent être à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère.

Il suit du théorème précédent qu'on saura déterminer les lignes géodésiques sur toute surface du second degré (Q). Car soit (S) la sphère absolue; la surface développable ayant son arête de rebroussement sur (Q) et tangente à une quadrique quelconque (Q') inscrite dans la développable $\boxed{(S)\ (Q)}$ aura précisément pour arête de rebroussement une ligne géodésique de (Q). Il y a, entre ces lignes et les lignes ordinaires, une relation qui est bien exprimée par le théorème suivant :

Une ligne géodésique ordinaire d'une quadrique (Q) ***est aussi ligne géodésique en prenant pour absolu toute quadrique homofocale à*** (Q).

De nouvelles conséquences peuvent être déduites, si l'on emploie la méthode de transformation définie à l'article 44 du texte. Nous avons vu que cette transformation conserve les

angles, les focales, les lignes de courbure (art. 62). Si l'on se sert des formules 14 de l'article 44, et que l'on appelle X, Y, Z les coordonnées du point correspondant au point (x, y, z), on trouvera

$$d\sigma^2 = \frac{-4R^4(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}{(X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2)^2}. \tag{13}$$

Ainsi, l'arc $d\sigma$ défini précédemment se ramène, dans la figure anallagmatique correspondante, en négligeant un facteur constant, et en posant

$$dS = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2},$$

à

$$\frac{dS}{X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2}.$$

Donc, du théorème relatif aux lignes les plus courtes indiqué plus haut, et des notions acquises (art. 44 et 62) sur la transformation considérée, nous concluons les propositions suivantes :

Les lignes rendant minimum entre deux points de l'espace l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2} \tag{14}$$

sont des cercles orthogonaux à la sphère définie par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0. \tag{15}$$

Les lignes tracées sur une surface et rendant minimum la même intégrale sont celles pour lesquelles il y a une sphère passant par trois points consécutifs, normale à la surface et à la sphère fixe (15).

On peut déterminer ces lignes pour les cyclides. Elles correspondent aux lignes géodésiques de la surface du second degré homologue de la cyclide. Leur propriété géométrique est la suivante : La sphère passant par trois points consécutifs et normale à la surface est tangente à une cyclide homofocale à la proposée.

II.

Les lignes de courbure dans la géométrie de M. Cayley peuvent être définies (art. 62) de la manière suivante. Ce sont les courbes telles que les normales à la surface en tous leurs points forment une surface développable. On sait que les normales sont les droites joignant le point de contact du plan tangent au pôle de ce plan. Mais ici le principe de dualité exige que nous introduisions une autre droite, que nous appellerons *seconde normale,* et qui sera l'intersection du plan tangent avec le plan polaire du point de contact. La première et la seconde normale sont des droites polaires l'une de l'autre. Quand on prend la polaire réciproque de la surface par rapport à la sphère, la première normale se transforme en la seconde, et réciproquement.

Puisque l'on a introduit une seconde normale, on peut se demander quel sera le lieu des points de la surface pour lesquels les secondes normales forment une surface développable. On aurait ainsi des lignes de seconde courbure, mais ces lignes coïncident avec les lignes déjà définies; car, si les premières normales forment une surface développable, il en est de même des secondes normales, qui sont leurs droites polaires, et réciproquement.

Ainsi, sur toute surface, il y a un double système de lignes dont les tangentes sont conjuguées dans l'indicatrice et dans la sphère, et qui sont telles que, pour chacune de ces lignes, soit les premières, soit les secondes normales forment une surface développable.

Il suit de cette réciprocité entre les deux séries de normales, et de la remarque, faite plus haut, que ces normales se changent l'une dans l'autre, que, si l'on remplace une surface (F) par sa polaire réciproque (F_1), prise par rapport à la sphère absolue, les lignes de courbure se correspondent. Ainsi,

Une transformation par la méthode des polaires réciproques

(la surface directrice étant la sphère absolue) conserve les lignes de courbure.

Si maintenant on prend les deux surfaces (F), (F_1) pour déférentes de deux anallagmatiques (Σ), (Σ_1), nous voyons qu'il y aura correspondance entre ces deux surfaces, de telle manière qu'à une ligne de courbure (ordinaire) de l'une corresponde une ligne de courbure (ordinaire) de l'autre. Nous avons donc une transformation de surfaces avec conservation des lignes de courbure. Voici comment on peut définir cette transformation.

Si d'un point *m* de (F), comme centre, on décrit une sphère orthogonale à la sphère directrice (S), et la coupant suivant un cercle situé dans le plan (P), ce plan (P) sera le plan polaire de *m* et touchera en m_1 la polaire réciproque (F_1) de (F). D'ailleurs, en considérant (F_1) comme déférente, au plan (P) correspondent deux points de l'anallagmatique (Σ_1), qui seront les sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (P). En réunissant tous ces résultats, nous avons la proposition suivante :

Étant donnée une surface (Σ), *on lui mène des sphères tangentes, orthogonales à une sphère fixe* (S). *Le lieu des sphères de rayon nul, passant par l'intersection de ces sphères tangentes et de* (S), *est une surface* (Σ_1), *dont les lignes de courbure sont les transformées des lignes de courbure de* (Σ). *La relation entre* (Σ) *et* (Σ_1) *est réciproque. Elles admettent pour surfaces déférentes deux surfaces polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à* (S).

Il est à remarquer que (Σ) n'est pas nécessairement anallagmatique par rapport à (S).

La transformation précédente équivaut, quand la sphère (S) est réelle et qu'on la change par une inversion en un plan, à une transformation déjà donnée par M. O. Bonnet [1], et qu'on peut définir ainsi :

---

[1] O. Bonnet : *Note sur un genre particulier de surfaces réciproques.* Comptes rendus, t. XLII, p. 485-487.

On mène à une surface les sphères tangentes ayant leurs centres dans un plan donné (P). Le lieu des sphères de rayon nul passant par l'intersection de ces sphères et du plan (P) est la surface correspondante à la première.

Cette dernière transformation fait correspondre à un point réel de l'une des surfaces un point imaginaire de l'autre. La transformation sphérique n'a pas nécessairement cet inconvénient; il suffit que le rayon R de la sphère soit de la forme $K\sqrt{-1}$ pour qu'à un point réel de l'une des surfaces corresponde un point réel de l'autre. Dans la Note IX nous généraliserons d'ailleurs ce mode de transformation.

Nous indiquons ici l'ensemble des théorèmes sur les lignes de courbure que nous avons démontrés ou qui résultent immédiatement des remarques précédentes.

Les lignes de courbure forment deux systèmes de lignes orthogonales, et conjuguées par rapport à l'indicatrice de chaque point.

Les normales en tous les points d'une ligne de courbure forment une développable, dont l'arête de rebroussement est ligne géodésique de la surface des centres de courbure.

Si l'on a un système triple orthogonal, deux surfaces de système différent se coupent suivant une ligne de courbure commune.

Si deux surfaces se coupent sous un angle constant, leur ligne d'intersection ne peut être ligne de courbure d'une surface sans l'être en même temps de l'autre.

Dans une étude plus complète de la géométrie cayleyenne, il faudrait considérer, en même temps que les lignes géodésiques, leurs polaires réciproques, qn'on peut définir ainsi :

Étant donnés deux plans tangents à une surface, en suivant l'une de ces lignes, qui va d'un point de contact à l'autre, le plan tangent effectue la moindre rotation possible. Dans la géométrie ordinaire, ces lignes, qu'on pourrait appeler de *moindre rotation*, sont celles pour lesquelles la normale à la surface demeure parallèle à un plan fixe. Dans la géométrie

cayleyenne, leur détermination exige l'intégration d'une équation du second ordre. Je me contenterai de donner le théorème suivant :

Étant données deux quadriques (Q), (Q'), toute ligne tracée sur (Q) et dont les tangentes sont aussi tangentes à (Q'), est géodésique par rapport à toute quadrique inscrite dans la développable $\boxed{(Q)(Q')}$, et ligne de moindre rotation par rapport à toute quadrique passant par l'intersection de (Q) et de (Q').

Nous avons vu que, étant donnée une cyclide, on sait en trouver les lignes de courbure, qui sont algébriques, et les lignes de longueur nulle, qui sont transcendantes. Plus généralement, étant donnée une surface du 4e ordre à conique double (B), on saura résoudre les deux mêmes problèmes, trouver les lignes de courbure et les lignes de longueur nulle, en prenant pour absolu une quelconque des quadriques (S) qui lui sont inscrites. Car supposons que (S) soit une sphère, ce qu'on peut toujours réaliser par une transformation homographique, et considérons (B) comme déférente, (S) comme sphère directrice. L'anallagmatique correspondante se composera de deux cyclides, et les lignes de courbure et de longueur nulle de (B) par rapport à (S) correspondront point par point aux lignes de même définition de l'une des deux cyclides. Ces deux cyclides sont transformées par rayons vecteurs réciproques l'une de l'autre.

Note VI.

Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et la théorie des pôles secondaires des cyclides.

Dans ses études sur la théorie des cyclides, M. Moutard a considéré, en même temps que les points nommés par lui *pôles principaux* et qui sont les centres des cinq sphères directrices, d'autres points qu'il a appelés *pôles secondaires*, et qui possèdent la propriété suivante. Si l'on transforme la cyclide par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant en un de ces points, et le module étant convenablement choisi, on obtient une surface symétrique de la première par rapport à un plan.

Si nous n'avons pas donné place à cette théorie des pôles secondaires dans notre travail, c'est qu'elle nous paraît exprimer des propriétés, non des cyclides, mais de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. C'est ce que nous allons montrer.

Les auteurs qui ont écrit sur la transformation par rayons vecteurs réciproques ont dû sentir le besoin d'un nom plus court pour désigner cette transformation. Nous l'appellerons, à l'exemple des géomètres anglais, *inversion*.

Une inversion est définie par la sphère, lieu des points qui se correspondent à eux-mêmes. Le centre de cette sphère sera le *pôle;* le rayon, le *module* de l'inversion. Voici comment on peut définir, étant donnée la sphère d'inversion (S), les couples de points correspondants A, A'.

Si l'on considère l'un de ces points, A par exemple, comme le centre d'une sphère de rayon nul (A), par l'intersection de (A) et de (S) passera une deuxième sphère de rayon nul (A'), dont le centre sera le point A'.

Ainsi, deux points correspondants sont les centres des deux sphères de rayon nul passant par un même cercle de la sphère d'inversion. Ce cercle est imaginaire quand les points sont réels.

Quand le point A décrit une surface (Σ), le point A′ décrit une surface (Σ′). Le système (Σ, Σ′) est anallagmatique par rapport à la sphère d'inversion, et la déférente est l'enveloppe des plans perpendiculaires sur le milieu de AA′.

Si la sphère d'inversion se réduit à un plan (P), alors à un point A correspond le point symétrique A′ par rapport à (P). Les points A, A′ sont, comme dans le cas général, les centres de deux sphères de rayon nul passant par un même cercle du plan d'inversion.

Nous avons donc deux espèces principales d'inversions : l'*inversion plane*, qui transforme une figure en sa symétrique par rapport au plan d'inversion, et l'*inversion sphérique*.

Il suit, de la définition que nous venons de donner, que, si deux figures (F), (F′) sont les inverses l'une de l'autre par rapport à la sphère d'inversion (S), on peut soumettre le système à une inversion. Les figures (F), (F′) se transformeront en (F_1), (F'_1), la sphère (S) en (S_1), et les deux figures (F_1), (F'_1) seront *inverses* ou réciproques par rapport à (S_1). Si la sphère (S) se transformait en un plan, les deux figures (F_1), (F'_1) seraient symétriques par rapport à ce plan.

Nous allons nous servir de ces remarques pour résoudre la question suivante :

Une figure étant soumise successivement à deux inversions I, I′, *trouver tous les couples d'inversion produisant le même effet que les deux précédentes.*

Nous commencerons par supposer que les deux inversions I, I′ soient planes, et définies par les plans P, P′. Alors, si une figure (F) est soumise à ces transformations, il faudra prendre sa symétrique par rapport au plan P, puis la symétrique de la figure obtenue par rapport au plan P′. *Ces deux opérations équivalent à une rotation autour de la droite* PP′, *rotation d'un angle double de celui des plans* P, P′.

Ainsi, une rotation est l'équivalent de deux inversions planes, et par conséquent tout déplacement d'une figure dans l'espace équivaut à quatre inversions planes.

Nous voyons que l'effet de nos deux inversions I, I′ ne sera pas changé si aux deux plans P, P′ on substitue deux autres plans Q, Q′, se coupant suivant la même droite que les premiers, et faisant le même angle dans le même sens.

Si les deux inversions I, I′ sont sphériques, en les soumettant à une même inversion convenablement choisie, on peut les transformer en inversions planes, et, en leur appliquant la proposition précédente, on est conduit au théorème suivant :

Étant données deux inversions définies par les sphères (S), (S′), *on peut toujours les remplacer par deux nouvelles inversions. Les deux sphères* (S_1), (S'_1), *qui définissent ces inversions, passent par l'intersection des deux premières, et font le même angle, compté dans le même sens, que les deux premières.*

Les nouvelles inversions ainsi définies sont évidemment les seules qui puissent remplacer les premières.

Parmi ces couples d'inversions, définies par les sphères (S_1), (S'_1), il en est deux qui sont particulièrement remarquables :

1° La sphère (S_1) peut se réduire au plan radical de (S), (S′). Alors la première des deux inversions sera plane. Donc

Deux inversions quelconques opérées sur une figure (F) équivalent à une inversion sur la figure symétrique de (F) par rapport à un plan convenablement choisi.

2° La sphère (S'_1) peut se réduire au plan radical de (S) et (S′). Alors la seconde des inversions sera plane. Donc

Deux inversions quelconques, transformant une figure (F) en (F_1), peuvent toujours être remplacées par une inversion sphérique qui transforme (F) en la figure (F'_1) symétrique de (F_1) par rapport à un plan, et par l'inversion plane qui transforme (F'_1) en (F_1).

Ce dernier résultat a été indiqué par M. Mannheim (*Journal de Liouville*, t. XV, 2e série).

Revenons aux couples d'inversions sphériques qui peuvent remplacer les deux premières (S), (S'). Leurs pôles décrivent une droite fixe, la ligne des centres de (S) et de (S'); ils y déterminent deux divisions homographiques, dont les points doubles sont les points limites, centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (S'), et dont deux points correspondants sont les centres de (S) et de (S'). Il n'y aura donc aucune difficulté dans la construction de tous ces couples d'inversion.

Examinons maintenant ce que devient une figure après un nombre quelconque d'inversions $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Appelons P les inversions planes et S les inversions sphériques. Les inversions I_1, I_2 peuvent se remplacer par une inversion plane P_1, suivie d'une inversion sphérique S_1, ce qu'on peut exprimer par la formule

$$I_1 I_2 = P_1 S_1 .$$

On aura de même

$$S_1 I_2 = P_2 S_2 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{n-1} I_n = P_{n-1} S_n .$$

Donc

$$I_1 \ldots I_n = P_1 P_2 \ldots P_{n-1} S_n . \qquad (1)$$

On démontrerait de même que

$$I_1 \ldots I_n = S'_1 P'_1 \ldots P'_{n-1} . \qquad (2)$$

En d'autres termes, une série d'inversions planes et sphériques peut toujours être remplacée soit par une suite d'inversions planes et une inversion sphérique, soit par une inversion sphérique suivie de plusieurs inversions planes.

J'ajoute qu'on peut toujours supposer que le nombre des inversions planes soit pair. En effet, s'il est impair, considérons par exemple la suite

$$P_1 \ldots P_{n-1} S_n ;$$

au lieu de S_n, définie par la sphère (S_n), de centre O et de

rayon R, prenons l'inversion définie par la sphère (S'_n) de centre O, mais de rayon $R\sqrt{-1}$. Les inversions S_n, S'_n, opérées sur une même figure, donnent deux figures symétriques par rapport au centre O. Or, on déduit une de ces figures de sa symétrique par trois inversions planes, définies par trois plans rectangulaires Q, Q', Q'', se coupant en O. On aura donc

$$S_n = QQ'Q''S'_n, \tag{3}$$

et comme on ajoute trois inversions planes à un nombre impair de ces inversions, le nombre total sera pair.

Or, deux inversions planes équivalent à une rotation, un nombre pair d'inversions équivaut à un déplacement. Donc

Un nombre quelconque d'inversions peut toujours être remplacé soit par un déplacement et une seule inversion, soit par une inversion suivie d'un déplacement.

Deux inversions ne sont pas, en général, échangeables; pour qu'elles possèdent cette propriété, il faut et il suffit que leurs sphères soient orthogonales.

Soient deux sphères orthogonales (S), (S') définissant les deux inversions. Leur plan radical (P) et la sphère (S_1), décrite sur leur cercle d'intersection comme grand cercle, se coupent à angle droit. (P) et (S_1) définissent donc deux inversions pouvant remplacer les deux premières.

En particulier, si une figure est anallagmatique par rapport aux deux premières inversions, on voit que l'inversion définie par la sphère (S_1) la changera en une surface qui sera la symétrique de la première par rapport au plan radical des sphères (S), (S').

Cette proposition entraîne évidemment les propriétés des *pôles secondaires*. J'ajoute que, si, au lieu de l'inversion définie par (S_1), on prend celle qui est définie par la sphère concentrique et orthogonale, elle donnera une surface symétrique de la première par rapport à la ligne des centres des deux sphères primitives (S), (S').

Une cyclide qui a cinq pôles principaux a évidemment des

pôles secondaires, qui sont les pieds des hauteurs des cinq tétraèdres qu'on peut former avec quatre des cinq points.

Les cinq inversions définies par cinq sphères deux à deux orthogonales se détruisent; leur effet est nul sur une figure quelconque.

Supposons, en effet, que trois des cinq sphères se réduisent à des plans rectangulaires Q_1, Q_2, Q_3. Les deux autres S_1, S'_1 auront pour centres le point de rencontre de ces plans, et les carrés de leurs rayons seront égaux et de signes contraires. Or, d'après la formule (3), on a

$$S_1 = Q_1 Q_2 Q_3 S'_1,$$

ou

$$S_1 S'_1 Q_1 Q_2 Q_3 = 1.$$

On passera de ce cas particulier au cas général par une inversion quelconque effectuée sur l'ensemble de la figure (1).

---

(1) On pourrait, en suivant les méthodes indiquées ici, étendre aux inversions les propositions relatives à la symétrie. Par exemple, si deux inversions effectuées sur une figure algébrique la laissent invariable, les sphères définissant ces deux inversions font un angle commensurable.

rayon R, prenons l'inversion définie par la sphère (S'_n) de centre O, mais de rayon $R\sqrt{-1}$. Les inversions S_n, S'_n, opérées sur une même figure, donnent deux figures symétriques par rapport au centre O. Or, on déduit une de ces figures de sa symétrique par trois inversions planes, définies par trois plans rectangulaires Q, Q', Q'', se coupant en O. On aura donc

$$S_n = QQ'Q''S'_n, \tag{3}$$

et comme on ajoute trois inversions planes à un nombre impair de ces inversions, le nombre total sera pair.

Or, deux inversions planes équivalent à une rotation, un nombre pair d'inversions équivaut à un déplacement. Donc

Un nombre quelconque d'inversions peut toujours être remplacé soit par un déplacement et une seule inversion, soit par une inversion suivie d'un déplacement.

Deux inversions ne sont pas, en général, échangeables; pour qu'elles possèdent cette propriété, il faut et il suffit que leurs sphères soient orthogonales.

Soient deux sphères orthogonales (S), (S') définissant les deux inversions. Leur plan radical (P) et la sphère (S_1), décrite sur leur cercle d'intersection comme grand cercle, se coupent à angle droit. (P) et (S_1) définissent donc deux inversions pouvant remplacer les deux premières.

En particulier, si une figure est anallagmatique par rapport aux deux premières inversions, on voit que l'inversion définie par la sphère (S_1) la changera en une surface qui sera la symétrique de la première par rapport au plan radical des sphères (S), (S').

Cette proposition entraîne évidemment les propriétés des *pôles secondaires*. J'ajoute que, si, au lieu de l'inversion définie par (S_1), on prend celle qui est définie par la sphère concentrique et orthogonale, elle donnera une surface symétrique de la première par rapport à la ligne des centres des deux sphères primitives (S), (S').

Une cyclide qui a cinq pôles principaux a évidemment des

pôles secondaires, qui sont les pieds des hauteurs des cinq tétraèdres qu'on peut former avec quatre des cinq points.

Les cinq inversions définies par cinq sphères deux à deux orthogonales se détruisent; leur effet est nul sur une figure quelconque.

Supposons, en effet, que trois des cinq sphères se réduisent à des plans rectangulaires Q_1, Q_2, Q_3. Les deux autres S_1, S'_1 auront pour centres le point de rencontre de ces plans, et les carrés de leurs rayons seront égaux et de signes contraires. Or, d'après la formule (3), on a

$$S_1 = Q_1 Q_2 Q_3 S'_1,$$

ou

$$S_1 S'_1 Q_1 Q_2 Q_3 = 1.$$

On passera de ce cas particulier au cas général par une inversion quelconque effectuée sur l'ensemble de la figure (1).

---

(1) On pourrait, en suivant les méthodes indiquées ici, étendre aux inversions les propositions relatives à la symétrie. Par exemple, si deux inversions effectuées sur une figure algébrique la laissent invariable, les sphères définissant ces deux inversions font un angle commensurable.

Note VII.

Sur les différentes transformations par lesquelles on peut déduire du tore la cyclide de M. Dupin.

Nous avons vu (art. 58) que la cyclide de M. Dupin a quatre points coniques disposés par couples aa', bb', et tels que les points de chaque couple soient à une distance nulle de ceux du second. Les points d'un même couple sont ceux par lesquels passent les sphères inscrites d'une même série. Ils sont réels, ou imaginaires conjugués. Il est clair que les deux couples aa', bb' ne peuvent être réels tous les deux.

Pour que la cyclide soit transformée en un tore par une inversion, il est nécessaire que les sphères d'une même série soient transformées en sphères ayant leurs centres en ligne droite, et il suffit, pour obtenir ce résultat, que l'inversion employée rejette à l'infini deux points doubles conjugués, par exemple a, a'. Le pôle de l'inversion doit donc être sur le cercle lieu des points à une distance nulle de a et de a'. Ainsi,

Le lieu des pôles des inversions transformant la cyclide en tore se compose de deux cercles, intersections des points sphères a, a' et b, b'.

L'un au moins des deux couples aa', bb' étant formé de points imaginaires conjugués, l'un au moins des cercles sera réel. Les deux le seront, quand les quatre points doubles seront imaginaires. Ces deux cercles passent d'ailleurs l'un par aa', l'autre par bb'. Ils sont dans les plans des deux coniques focales, lieux des centres des sphères inscrites, et tangents en bb', aa' respectivement à ces focales.

On peut obtenir les résultats précédents d'une manière plus

élémentaire, en remarquant que la cyclide peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères fixes. Si l'on peut transformer par une inversion ces trois sphères fixes soit en sphères ayant leurs centres en ligne droite, soit en sphères égales, la cyclide se changera en un tore. Nous allons retrouver ainsi les inversions indiquées par M. Mannheim dans son étude sur la cyclide, et nous examinerons dans quel cas elles sont réelles.

Étant données trois sphères (S), (S'), (S''), les pôles des inversions qui les transforment en sphères ayant leurs centres en ligne droite sont sur le cercle orthogonal des trois sphères. Ce cercle sera imaginaire, si les trois sphères se coupent en deux points.

Cherchons maintenant les pôles des inversions qui transforment les sphères en trois sphères égales.

Considérons les deux premières que nous appellerons (S) et (S'). Si des centres de similitude comme centres on décrit des sphères passant par l'intersection des deux premières, ces sphères bissectent les angles formés par les deux sphères données. Il suffit de se rappeler, pour reconnaître ce fait, que toute droite passant par un centre de similitude de (S) et de (S') coupe ces deux sphères sous des angles égaux.

Les deux sphères bissectrices que nous venons de trouver conservent évidemment leur propriété quand on soumet la figure à une inversion, et l'une d'elles ne deviendra un plan que si les deux sphères (S), (S') sont changées en sphères égales. Donc

Le lieu des pôles des inversions transformant deux sphères en sphères égales se compose de deux sphères passant par l'intersection des deux premières, bissectant leur angle, et ayant pour centres leurs centres de similitude.

En appelant S, S' les puissances d'un point par rapport aux sphères données, les deux sphères bissectrices ont pour équations

$$\frac{S}{R} = \pm \frac{S'}{R'},$$

R et R′ étant les deux rayons. Si ces rayons ont un signe, comme cela arrive dans les problèmes de contact, et en particulier dans celui qui nous occupe, le lieu se compose d'une seule de ces sphères.

Considérons maintenant trois sphères (S), (S′), (S″). Ces sphères, prises deux à deux, donneront lieu à trois sphères bissectrices, ayant leurs centres sur l'axe de similitude des trois sphères données, et passant par les cercles d'intersection de ces sphères. Ces trois sphères bissectrices couperont donc à angles droits le cercle orthogonal des trois premières (S), (S′), (S″), et elles se couperont suivant un cercle, intersection des deux sphères de rayon nul dont les centres sont situés à la fois sur le cercle orthogonal et sur l'axe de similitude.

Donc *le lieu des pôles des inversions transformant trois sphères dont les rayons sont affectés de signes en trois sphères de rayons égaux et de mêmes signes est un cercle, intersection de deux points-sphères situés à la fois sur l'axe de similitude et sur le cercle orthogonal des trois proposées.*

On voit que ce cercle sera réel, toutes les fois que le cercle orthogonal sera imaginaire ou ne coupera pas l'axe de similitude.

Nous avons par conséquent deux inversions transformant la cyclide en tore, celle qui remplace les sphères proposées par trois sphères ayant leurs centres en ligne droite, et celle qui les transforme en sphères égales. De ces deux inversions, une au moins sera toujours réelle; car, si le cercle orthogonal devient imaginaire, la première ne pourra être employée, mais la seconde sera certainement réelle. La cyclide est donc, dans tous les cas, la transformée du tore par une inversion réelle.

Dans une étude plus complète que celle-ci sur la cyclide, il serait utile de remarquer une relation de réciprocité à laquelle elle donne lieu.

En général, la polaire réciproque d'une cyclide est une surface du quatrième ordre, ayant une conique double,

quatre points coniques; en un mot, c'est la transformée homographique d'une cyclide à quatre points doubles. ***Mais on peut choisir la quadrique de telle manière que la cyclide ait pour polaire réciproque une cyclide.*** En effet, considérons la sphère (S), passant par les quatre points coniques a, a', b, b' de la cyclide, et qui coupe la déférente (A) correspondante suivant les quatre droites ab, ab', $a'b$, $a'b'$. Les plans tangents doubles de la cyclide passeront par le centre de (S), et envelopperont un cône (D) supplémentaire du cône asymptote de (A). Or, il existe, comme on sait, quatre séries de quadriques homothétiques, ayant pour centre commun le sommet du cône (D), et transformant ce cône dans le cercle de l'infini. La polaire réciproque de la cyclide par rapport à une de ces quadriques sera évidemment encore une cyclide.

Dans cette transformation par polaires réciproques, aux quatre points coniques correspondent les quatre plans tangents singuliers; aux cercles d'une des surfaces, les cônes de révolution circonscrits suivant les cercles de la polaire réciproque, etc. Les quadriques qui servent de base à la transformation ne sont réelles que si la cyclide a deux points doubles réels. La propriété que nous venons de signaler nous paraît néanmoins présenter quelque intérêt, parce qu'elle met en évidence les relations de dualité auxquelles donne lieu la cyclide de M. Dupin.

Note VIII.

De la transformation par rayons vecteurs réciproques des surfaces anallagmatiques.

I.

Une surface anallagmatique (Σ) peut être définie comme l'enveloppe d'une suite de sphères qui demeurent orthogonales à une sphère fixe (S), que nous avons appelée ***sphère directrice***.

Si l'on soumet la surface à une inversion, les sphères doublement tangentes à l'anallagmatique (Σ) se changent en de nouvelles sphères orthogonales à la sphère (S′) inverse de (S). L'inverse de l'anallagmatique (Σ) sera donc une anallagmatique (Σ′), ayant pour sphère directrice la sphère (S′) inverse de (S). Il y a ici un problème à étudier : Quelle relation y a-t-il entre les deux déférentes (B), (B′) des anallagmatiques (Σ), (Σ′)? Nous allons montrer que ces deux déférentes sont homologiques.

A cet effet, soit O_1 le pôle et (S_1) la sphère de l'inversion à laquelle on soumet (Σ). Deux sphères de centres p, q, et angentes à (Σ), se transformeront par l'inversion en deux sphères tangentes à (Σ′), de centres p', q'. Les droites pp', qq' iront évidemment passer par le pôle O_1. Donc les deux déférentes (B), (B′) se correspondent point par point, de telle manière que les droites joignant les points correspondants pp', qq' aillent concourir au pôle O_1. Je dis maintenant que les droites pq, $p'q'$ se coupent en un point situé dans un plan fixe (P), le plan radical commun de (S), (S′) et (S_1).

En effet, par l'intersection des deux sphères tangentes à (Σ) et de centres p, q, faisons passer une sphère orthogonale à (S_1). Cette sphère sera aussi orthogonale à (S); elle aura donc son centre dans le plan radical (P) de (S), (S′) et (S_1).

Comme elle est orthogonale à (S_1), l'inversion la transformera en elle-même, et elle contiendra par conséquent le cercle d'intersection des deux sphères de centres p', q', tangentes à (Σ'). Son centre sera donc aussi sur la droite $p'q'$, et sera l'intersection de pq et $p'q'$. Comme ce centre est dans le plan radical (P) de (S) et de (S_1), la proposition est démontrée.

Ainsi les deux déférentes se correspondent de manière que les droites pp' joignant deux points correspondants aillent passer par un point fixe O_1, et de telle manière que les droites pq d'une figure aillent couper les droites correspondantes $p'q'$ de l'autre en des points situés dans un plan fixe (P). Les déférentes sont donc homologiques; (P) et (O_1) sont le plan et le centre d'homologie. Donc,

Si l'on soumet une anallagmatique (Σ) ***à une inversion définie par la sphère*** (S_1) ***de centre*** O_1, ***elle se change en une anallagmatique*** (Σ). ***Les sphères directrices des deux anallagmatiques sont inverses l'une de l'autre par rapport à*** (S_1). ***Les déférentes sont homologiques,*** O_1 ***étant le centre d'homologie, et le plan d'homologie étant le plan radical commun à*** (S_1) ***et aux deux sphères directrices de*** (Σ) ***et*** (Σ_1) [1].

Ce beau théorème est dû à M. de la Gournerie, qui l'a énoncé pour les anallagmatiques planes dans le Mémoire déjà cité. Il devient illusoire dans le cas suivant :

Si l'on soumet (Σ) à une inversion transformant sa sphère directrice en un plan (P), l'anallagmatique se change en une surface (Σ'), symétrique par rapport au plan (P). Les sphères doublement tangentes se changent en sphères ayant leur centre dans le plan (P), mais dont le rayon n'est plus défini.

---

[1] On peut ajouter que les deux sphères directrices sont aussi homologiques avec le même centre et le même plan d'homologie. Il résulte de cette remarque, par exemple, que les polaires réciproques des déférentes par rapport aux sphères directrices sont aussi homologiques. De plus, puisque les deux sphères directrices sont correspondantes, on connaîtra, en même temps que le centre et le plan d'homologie, le rapport ou module d'homologie.

Nous allons donner des règles simples relatives à ce cas particulier.

II.

Arrivons à l'examen du cas singulier dans lequel l'inversion change l'anallagmatique (Σ) en une surface (Σ') ayant un plan de symétrie. Les sphères tangentes à l'anallagmatique (Σ) se changent en sphères ayant leur centre dans le plan de symétrie, et dont le rayon ne peut plus être déterminé. Les remarques suivantes vont nous permettre de déterminer ces rayons.

Soit, pour plus de simplicité, une cyclide (K) ayant pour déférente la quadrique (B), et pour directrice la sphère (S). Soit (B_1) la polaire réciproque de (B) par rapport à (S). La cyclide (K_1) ayant (B_1) pour déférente correspondra point par point à (K), et les lignes de courbure des deux surfaces seront correspondantes (Note V). Remarquons d'ailleurs que chacune d'elles aura pour focale la section de l'autre par la sphère directrice. Cette relation se conserve si l'on transforme par inversion; et, si les deux cyclides sont changées en cyclides à plans de symétrie, la focale de chacune d'elles sera la section principale de l'autre.

Nous avons donc le théorème suivant :

Étant donnée une cyclide (K) *à plan de symétrie, les sphères doublement tangentes ayant leur centre dans le plan de symétrie peuvent être définies par la propriété suivante : Les sphères de rayon nul passant par leur intersection avec le plan de symétrie décrivent une cyclide* (K_1), *ayant pour focale la section principale, et pour section principale la focale de la première. Les lignes de courbure des deux cyclides* (K), (K_1) *sont des lignes correspondantes.*

Note IX.

Des surfaces qui demeurent invariables quand on les transforme par polaires réciproques, et des méthodes de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure.

I.

Une grande partie de ce travail a été consacrée à l'examen des propriétés des surfaces qui demeurent invariables par une inversion convenablement choisie.

La méthode que nous avons suivie peut servir de guide dans l'étude d'une question plus générale qu'on peut énoncer ainsi :

Trouver les surfaces qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation d'une nature déterminée.

A cet effet, on cherchera les surfaces les plus simples satisfaisant à la condition précédente, et contenant au moins trois paramètres; les surfaces les plus générales répondant à la question pourront être engendrées comme enveloppes des précédentes.

C'est ainsi que, si l'on veut trouver toutes les surfaces qu'une inversion laisse invariables, on remarque que les sphères orthogonales à la sphère d'inversion satisfont à cette condition, et les surfaces anallagmatiques générales sont les enveloppes d'une série simple ou double de ces sphères.

Nous allons ici traiter une question de ce genre, et examiner comment on peut engendrer toutes les surfaces qui coïncident avec leur polaire réciproque par rapport à une quadrique (S). Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que cette quadrique soit une sphère, et nous allons d'abord examiner s'il existe des quadriques qui soient leurs propres polaires réciproques.

Soient (Q) l'une de ces quadriques, et (Q') sa polaire réci-

proque. On sait que (Q') contient la courbe de contact avec (S) de la développable $\boxed{(Q)\ (S)}$. Cette courbe de contact doit donc appartenir aussi à (Q), et par suite (Q) doit être une surface de révolution inscrite dans la sphère.

Cette condition est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. Car soit

$$(1)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)-K(xx'+yy'+zz'-R^2)^2 \\ \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

l'équation d'une surface de révolution inscrite dans (S). La surface polaire réciproque sera bien inscrite suivant la même courbe; elle aura pour équation

$$(2)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)-K'(xx'+yy'+zz'-R^2)^2 \\ \qquad\qquad = 0\,, \end{cases}$$

où

$$(3)\qquad (1-K)(1-K') = 1\,;$$

mais elle ne coïncidera pas avec la première. Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait

$$(4)\qquad K = 2\,.$$

Si l'on se reporte à l'équation (1), on voit que (x', y', z') est le pôle du plan de contact ou d'inscription; nous l'appellerons, avec M. Cayley, *centre d'inscription*. D'un autre côté la formule (2) de la Note V nous montre que, dans la géométrie de M. Cayley, la distance θ d'un point quelconque (x, y, z) de la surface au centre (x', y', z') est constante, et donnée par la formule

$$(5)\qquad \cos^2\theta = \frac{1}{K}\,.$$

Nous appellerons θ le rayon d'inscription, et nous voyons que les surfaces inscrites précédentes jouent dans la géométrie de M. Cayley le même rôle que la sphère dans la géométrie ordinaire. On reconnaîtra sans difficulté que le plan tangent

en tout point de la surface est normal au rayon qui passe au point de contact.

Les surfaces précédentes ont même des propriétés plus étendues que la sphère, qui les rapprochent des petits cercles dans la géométrie sphérique. Elles sont l'enveloppe du plan qui fait avec le plan d'inscription un angle constant Ω, défini par la formule

$$\cos^2\Omega = \frac{1}{K'}. \tag{6}$$

On peut appeler cet angle, angle d'inscription; il est complémentaire de Θ.

Avec ces définitions, le résultat que nous avons trouvé peut s'énoncer ainsi :

Les seules quadriques coïncidant avec leur polaire réciproque sont celles qui sont inscrites, et dont le rayon ou l'angle d'inscription est égal à $\frac{\pi}{4}$.

Cela posé, soit une surface (Σ), qui coïncide avec sa polaire réciproque. A tout point m correspondra un plan polaire tangent en m' à la surface, et le plan polaire de m' sera tangent en m. D'après cela, si l'on construit une quadrique inscrite de la définition précédente, tangente à (Σ) en m, cette quadrique sera aussi tangente en m' à (Σ). Donc

Toute surface identique à sa polaire réciproque est l'enveloppe d'une série de quadriques inscrites dans (S) *avec un rayon égal à* $\frac{\pi}{4}$, *et dont le centre d'inscription décrit soit une ligne, soit une surface.*

Si, au lieu de supposer que le rayon d'inscription soit égal à $\frac{\pi}{4}$, nous admettons qu'il a une valeur constante, mais quelconque, nous obtenons des surfaces remarquables, enveloppes de toutes ces quadriques inscrites de rayon constant. Elles sont tout à fait analogues aux surfaces parallèles dans la géométrie ordinaire, et donnent lieu aux propriétés suivantes.

Soit (H) une surface quelconque, et supposons que, de ses différents points comme centres, on décrive des quadriques inscrites dans la sphère (S) et de même rayon θ. Ces quadriques enveloppent une surface (H_1), que l'on construira comme il suit. Soit M un point de cette surface; il peut être considéré comme l'intersection de trois quadriques infiniment voisines, de centres infiniment voisins m, m', m''. Ces trois centres étant à la même distance du point M, le plan $mm'm''$, tangent en m à (H), à la limite sera normal à la droite Mm. On aura donc la construction suivante.

Sur chaque normale à (H) en un point P, on portera, dans les deux sens, une longueur constante égale à $\overline{\theta}$, ce qui donnera les deux points P_1, P_2, qui seront des points de la surface parallèle (H_1). Les deux plans tangents à cette surface en P_1, P_2 seront normaux à la droite PP_1P_2; ils iront se couper, par conséquent, suivant la polaire de cette droite, ou seconde normale de (H) en P, située dans le plan tangent à (H). De plus, ils feront des angles égaux et constants avec le plan tangent à (H) en P.

Ce sont exactement les propriétés des courbes parallèles sur la sphère. Dans la géométrie cayleyenne, comme dans la géométrie ordinaire, les normales d'une surface sont normales aux surfaces parallèles, et par conséquent les lignes de courbure se correspondent point par point sur les deux surfaces parallèles.

La polaire réciproque (H') de (H) peut être considérée comme parallèle à (H); car un point est à une distance constante égale à un quadrant de tous les points de son plan polaire, et par conséquent la polaire réciproque d'une surface donnée sera la surface parallèle menée à la distance d'un quadrant.

On voit que la surface parallèle menée à la distance de $\frac{\pi}{4}$ se composera de deux nappes conjuguées, qui seront à une distance d'un quadrant l'une de l'autre, et par conséquent seront polaires réciproques l'une de l'autre. La droite qui

joindra deux points correspondants sur les deux nappes sera normale commune aux deux nappes.

Plus généralement, deux surfaces parallèles se succédant à une distance d'un quadrant seront polaires réciproques l'une de l'autre.

II.

Nous allons maintenant montrer comment les propositions précédentes conduisent, dans la géométrie ordinaire, à une méthode de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure ordinaires, plus générale que celle qui a été développée dans la Note V.

Rappelons d'abord que, si l'on prend pour déférente une quadrique (V) inscrite dans la sphère, l'anallagmatique correspondante se compose (art. 59) de deux sphères passant par la ligne de contact de la quadrique (V), et ayant pour centres les deux foyers de cette quadrique. Ces deux sphères coupent sous un même angle φ la sphère directrice (S), et si θ est le rayon d'inscription de la quadrique, on trouve sans difficulté

$$\cos\varphi = \frac{i\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{7}$$

φ demeure donc constant pour toutes les quadriques inscrites de même rayon.

Cela posé, considérons une surface (B) et les surfaces parallèles par rapport à (S), (B_1), (B_2), ... Les lignes de courbure se correspondant sur ces différentes surfaces, si on les prend comme déférentes, les anallagmatiques (Σ), (Σ_1), (Σ_2), ..., ainsi obtenues, se correspondront point par point avec conservation des lignes de courbure ordinaires. Voyons comment on peut définir cette correspondance.

La surface (B_t) parallèle à (B) est l'enveloppe d'une suite de quadriques (V_t) inscrites, de rayon constant, ayant leur centre d'inscription sur (B), et dont les plans d'inscription enveloppent par conséquent la polaire réciproque (B') de (B).

La surface (Σ_i) ayant (B_i) pour déférente sera donc l'enveloppe des couples de sphères correspondantes aux quadriques (V_i) de rayon constant. D'après la remarque précédente, ces sphères coupent la sphère directrice (S) sous un angle constant. Donc,

Étant donnée une surface quelconque (B'), on lui mène des plans tangents, et par leurs intersections avec une sphère fixe (S) on fait passer des sphères coupant (S) sous un angle arbitraire, mais constant α. Soit (Σ_α) la surface enveloppe de ces sphères. Deux surfaces $(\Sigma_\alpha),(\Sigma_\beta)$, obtenues en attribuant à l'angle constant les valeurs α, β, se correspondent point par point avec conservation des lignes de courbure.

Les points correspondants sur les différentes surfaces sont à l'intersection d'un cercle orthogonal à (S), et les coupant toutes à angle droit.

Cette transformation comprend comme cas particulier celle qui a été donnée dans la Note V. Si l'on prend, en effet, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on obtient l'anallagmatique ayant pour déférente la polaire réciproque (B) de (B'). Si l'on fait $\alpha = \infty$, on obtient les points sphères passant par l'intersection de (S) et des plans tangents à (B'), c'est-à-dire l'anallagmatique ayant (B') pour déférente. On a donc les deux anallagmatiques ayant pour déférentes deux surfaces (B), (B'), polaires réciproques par rapport à (S). C'est la transformation de la Note V.

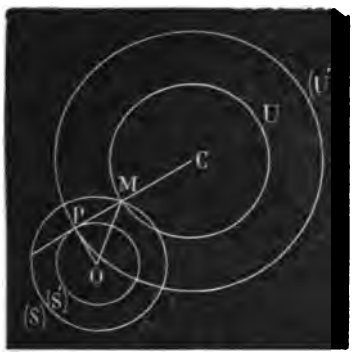
En réunissant les résultats qui précèdent, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une surface (Σ), *on lui adjoint une sphère fixe* (S), *et l'on construit toutes les sphères tangentes à la surface et coupant* (S) *sous un angle constant* α. *Par l'intersection de chacune de ces sphères et de* (S), *on fait passer de nouvelles sphères coupant* (S) *sous un angle* β. *Ces nouvelles sphères enveloppent une surface* (Σ_1), *correspondante point par point à* (Σ), *avec conservation des lignes de courbure.*

Les points correspondants sur les deux surfaces sont sur des

cercles normaux à la fois aux deux surfaces et à la sphère (S) (1).

Nous rencontrons ici des surfaces enveloppes de sphères variables, coupant une sphère fixe (S) sous un angle constant. On ramène leur étude à celle des anallagmatiques ordinaires par la remarque suivante. Soit O le centre de la sphère (S), et C le centre d'une sphère variable (U), coupant (S) sous un angle constant α. Cet angle α est égal à $\widehat{CMO}$, et l'on voit que la sphère (U') de rayon CP coupe la sphère (S') de rayon OP à angles droits. Or $OP = OM \sin\alpha$ est évidemment constant; la sphère (S') est donc invariable. Quant à la sphère (U'), elle a même centre que (U); mais son rayon diffère de celui de (U) d'une quantité constante $PM = OM\cos\alpha$. Les sphères (U) et (U') enveloppe-ront, par conséquent, des surfaces parallèles. Donc



La surface enveloppe des sphères coupant sous un angle constant une sphère (S) *est parallèle à une surface enveloppe de sphères concentriques aux premières, et coupant à angle droit une sphère fixe* (S') *concentrique à* (S).

---

(1) Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante.

Considérons une surface (Σ) enveloppe d'une série de sphères variables (U), coupant sous des angles quelconques la sphère (S). A chacune des sphères (U) coupant (S) sous l'angle φ, on fait correspondre une sphère (U_1), passant par l'intersection de (S) et de (U), et coupant (S) sous un angle φ_1 déterminé par l'équation

$$\frac{\cos\varphi - \cos\varphi_1}{1 - \cos\varphi\cos\varphi} = \alpha .$$

Alors les nouvelles sphères (U_1) enveloppent une surface (Σ_1), qui correspond point par point à (Σ) avec conservation des lignes de courbure. Quand φ reste constant, il en est de même de φ_1, et l'on retrouve le théorème donné dans le texte.

Note X.

Sur un nouveau système de coordonnées et son application à la théorie des cyclides.

I.

Dans la *Quatrième Partie* de ce travail, nous avons été conduit à un nouveau système de détermination des points de l'espace, dont l'étude paraît présenter de grands avantages dans la théorie des cyclides. Les cinq quantités S_i définies dans l'article 49, et qui sont les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales, peuvent être considérées comme des coordonnées d'une nature particulière; mais elles sont en nombre plus que suffisant, et l'on peut les étudier sous deux points de vue essentiellement distincts.

D'abord, les coordonnées S_i, étant au nombre de cinq, ne sont pas indépendantes les unes des autres, et il doit y avoir entre elles deux relations. On trouve, en effet, qu'elles satisfont aux équations

$$\sum\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0\,, \quad \sum\frac{S_i}{R_i^2} = -2\,,$$

qui se déduisent immédiatement des formules de l'article 48. On voit donc, comme cela doit être, que trois seulement des coordonnées S_i peuvent être choisies arbitrairement; les deux autres seront alors déterminées par les équations précédentes.

Mais on peut aussi déterminer un point, non plus par les cinq coordonnées S_i, mais simplement par les rapports mutuels de ces cinq quantités. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_5$ des nombres

proportionnels à $S_1, S_2, \ldots, S_5$. On aura, pour déterminer le point, les équations

$$\frac{S_1}{k_1} = \frac{S_2}{k_2} = \cdots = \frac{S_5}{k_5},$$

ou

$$S_i = \rho k_i,$$

ρ étant une arbitraire inconnue. Les quantités k_i devront satisfaire à l'unique relation

$$\sum \left(\frac{k_i}{R_i}\right)^2 = 0,$$

et, quand on connaîtra les nombres k_i, ρ sera déterminé par l'équation

$$\sum \frac{S_i}{R_i^2} = \rho \sum \frac{k_i}{R_i^2} = -2.$$

Nous adopterons cette seconde manière de déterminer les points, et nous aurons un système de cinq coordonnées homogènes, liées par une seule relation, du second degré par rapport aux coordonnées. Nous allons, du reste, pour donner à notre système de coordonnées toute la généralité qu'il comporte, rattacher le mode de détermination des points dans ce système à celui des sphères et des plans. Nous commençons en rappelant quelques propositions déjà établies.

Soient cinq sphères (S_i), deux à deux orthogonales, et définies par les équations

$$(1) \qquad S_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y - 2\gamma_i z + \delta_i = 0.$$

Le rayon R_i de chacune d'elles est donné par la formule

$$(2) \qquad R_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - \delta_i,$$

et, en exprimant qu'elles sont orthogonales, nous obtenons les équations de condition

$$(3) \qquad \delta_i + \delta_j = 2\alpha_i\alpha_j + 2\beta_i\beta_j + 2\gamma_i\gamma_j.$$

Nous avons vu (art. 48) qu'on a entre les cinq quantités S_i la relation identique

$$(4) \qquad \sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0,$$

qui conduit aux équations données dans l'article cité,

$$(5)\quad \begin{cases} \sum\left(\frac{1}{R_i}\right)^3=0\,, & \sum\frac{\alpha_i}{R_i^3}=0\,, & \sum\frac{\alpha_i\beta_i}{R_i^3}=0\,, \\ \sum\frac{\alpha_i\delta_i}{R_i^3}=0\,, & \sum\frac{\delta_i}{R_i^3}=-2\,, & \sum\frac{\alpha_i^2}{R_i^3}=1\,,\ldots. \end{cases}$$

Cela posé, l'équation de toute sphère (S) peut évidemment se mettre sous la forme

$$(6)\qquad \sum m_i\frac{S_i}{R_i}=0\,;$$

car cette équation contient cinq paramètres variables, les quantités m_i; les rapports mutuels de ces cinq quantités peuvent donc servir à déterminer une sphère; ce sont, en quelque sorte, les coordonnées d'une sphère, et il importe de rechercher d'abord leur signification géométrique.

A cet effet, nous supposerons que l'on remplace dans l'équation (6) les quantités S_i par leurs expressions x, y, z. On aura une identité de la forme

$$\sum m_i\frac{S_i}{R_i}=K(x^2+y^2+z^2)-2Ax-2By-2Cz+D\,.$$

L'équation de la sphère (S) en coordonnées ordinaires sera donc

$$K(x^2+y^2+z^2)-2Ax-2By-2Cz+D=0\,,$$

et l'on aura

$$(7)\quad \begin{cases} K=\sum\frac{m_i}{R_i}\,, & A=\sum\frac{\alpha_i m_i}{R_i}\,, \\ D=\sum\frac{\delta_i m_i}{R_i}\,, & B=\sum\frac{\beta_i m_i}{R_i}\,, \\ & C=\sum\frac{\gamma_i m_i}{R_i}\,. \end{cases}$$

Grâce aux identités (5), on peut résoudre ces dernières équations par rapport à m_i, et l'on trouve ainsi

$$(8)\quad m_i=-\frac{1}{2R_i}\left[K(\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2)-2A\alpha_i-2B\beta_i-2C\gamma_i+D-KR_i^2\right].$$

Soient O le centre de (S) et R son rayon.

Appelons P_i la puissance du centre C_i $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ de (S_i) par rapport à (S); l'équation (8) pourra s'écrire

$$(9) \qquad m_i = -\frac{K}{2R_i}(P_i - R_i^2) = -\frac{K}{2R_i}\left(\overline{O_iC_i}^2 - R^2 - R_i^2\right).$$

L'expression entre parenthèses est un invariant remarquable de (S) et de (S_i), le carré de la distance des centres moins la somme des carrés des rayons. Il s'annule quand les deux sphères sont orthogonales. Nous l'appellerons *puissance commune* des deux sphères.

Donc les cinq coordonnées m_i, qui déterminent dans notre système une sphère variable (S), sont proportionnelles aux puissances communes de (S) et de chacune des sphères (S_i); divisées par le rayon R_i de la sphère (S_i).

On voit que *la coordonnée m_i ne s'annule que dans le cas où la sphère* (S) *est orthogonale à la sphère* (S_i).

Par exemple, l'équation

$$m_1\frac{S_1}{R_1} + m_2\frac{S_2}{R_2} + m_3\frac{S_3}{R_3} = 0$$

représente toute sphère orthogonale à (S_4) et à (S_5).

Cherchons le rayon R de la sphère (S) en fonction des coordonnées m_i. On a, d'après les identités (7),

$$(10) \qquad A^2 + B^2 + C^2 - DK = \sum m_i^2.$$

Le premier membre de cette équation est égal à R^2K^2; on a donc

$$(11) \qquad R^2 = \frac{1}{K^2}\sum m_i^2 = \frac{\sum m_i^2}{\left(\sum \frac{m_i}{R_i}\right)^2}.$$

Dans le cas où la sphère variable se réduit à un point M, les cinq quantités m_i deviennent les puissances divisées par R_i du point M par rapport aux cinq sphères orthogonales. En appelant S_i ces puissances, on obtient

$$m_i = \frac{S_i}{R_i},$$

et, comme R est nul dans ce cas, on a

$$\sum m_i^2 = 0 , \tag{12}$$

ou

$$\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0 ,$$

c'est-à-dire l'identité qui a été notre point de départ, ce qui sert de vérification à nos calculs.

D'autre part, la sphère se réduit à un plan (P), si l'on a

$$K = \sum \frac{m_i}{R_i} = 0 . \tag{13}$$

Les plans de l'espace sont donc déterminés par cinq quantités m_i, et ces coordonnées satisfont à l'équation linéaire (13).

Dans ce cas, la formule (8) devient

$$m_i = \frac{1}{2R_i}\left[2A\alpha_i + 2B\beta_i + 2C\gamma_i - D\right].$$

et, comme l'équation du plan (P) est

$$2Ax + 2By + 2Cz - D = 0 ,$$

on voit que les cinq coordonnées m_i sont proportionnelles aux distances divisées par R_i des centres des oinq sphères (S_i) au plan (P).

Il suit de là que le système actuel de coordonnées, quand il est employé à la détermination des plans, est ***un système de coordonnées tangentielles surabondantes***. Si, au moyen de l'identité (13), on élimine une des quantités m_i, m_1 par exemple, d'une équation, il restera une relation homogène entre m_2, m_3, m_4, m_5, qui sera l'équation tangentielle de la surface enveloppe de tous les plans, rapportée au tétraèdre des centres des sphères (S_2), (S_3), (S_4), (S_5).

En résumé, notre système de coordonnées embrasse à la fois les points, les plans et les sphères. Les cinq quantités m_i déterminent en général une sphère. Pour qu'elles conviennent à un plan, il faut qu'elles satisfassent à une équation linéaire (13);

pour qu'elles déterminent un point, il faut qu'elles satisfassent à l'équation quadratique (12).

Si elles satisfont à la fois aux équations (12) et (13), elles déterminent un plan tangent au cercle de l'infini.

Enfin, toutes les fois que l'une des coordonnées m_i est nulle, la sphère ou le plan deviennent orthogonaux à (S_i), ou, si la sphère se réduit à un point, ce point se trouve sur (S_i).

Nous signalerons encore une propriété importante des quantités m_i. Si l'on place la masse m_i au centre C_i de chacune des sphères (S_i), d'après les formules (7), le centre de gravité des cinq masses sera le centre de la sphère (S). Cette propriété ne suffit pas évidemment à faire connaître les cinq quantités, mais elle constitue une relation importante, et dont nous aurons à faire usage.

II.

Étant données deux sphères (S) et (S') par leurs équations

$$(14)\quad S=\sum m_i\frac{S_i}{R_i}=K(x^2+y^2+z^2)-2Ax-2By-2Cz+D=0,$$

$$(15)\quad S'=\sum m'_i\frac{S_i}{R_i}=K'(x^2+y^2+z^2)-2A'x-2B'y-2C'z+D'=0,$$

on peut combiner ces équations de manière à obtenir la suivante

$$S+\lambda S'=\sum(m_i+\lambda m)'_i\frac{S_i}{R_i},$$

et, en appliquant alors la formule (10), on aura

$$(A+\lambda A')^2+(B+\lambda B')^2+(C+\lambda C')^2-(D+\lambda D')(K+\lambda K')$$
$$=\sum(m_i+\lambda m'_i)^2.$$

En égalant les coefficients de λ dans les deux membres, on obtient la relation

$$(16)\quad 2AA'+2BB'+2CC'-DK'-D'K=2\sum m\,m'.$$

Si nous désignons par x, y, z, x', y', z' les coordonnées des centres de (S) et de (S'), et par R et R' leurs rayons, l'équation (16) pourra s'écrire

$$(17)\qquad \begin{cases} (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-R^2-R'^2 \\ =-2\dfrac{\sum m_i m'_i}{KK'}=\dfrac{-2\sum m_i m'_i}{\sum\dfrac{m_i}{R_i}\sum\dfrac{m'_i}{R_i}}. \end{cases}$$

Le premier membre de cette formule est la puissance commune de (S) et de (S'), qui se trouve ainsi exprimée en fonction des m_i, m'_i.

La condition pour que les deux sphères soient orthogonales est donc

$$(18)\qquad \sum m_i m'_i = 0 .$$

La formule (17) prend une forme élégante, si l'on suppose que les deux sphères (S), (S') soient réduites à des points. Alors on a

$$\sum m_i^2 = \sum m'^2_i = 0 ,$$

et l'on peut écrire cette formule

$$(19)\qquad (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\frac{\sum(m_i-m'_i)^2}{\sum\dfrac{m_i}{R_i}\sum\dfrac{m'_i}{R_i}}.$$

Telle est l'expression de la distance de deux points. S'ils deviennent infiniment voisins, on a

$$(20)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=\frac{\sum dm_i^2}{\left(\sum\dfrac{m_i}{R_i}\right)^2}.$$

Cherchons ce que peut représenter le second membre de la formule (19), quand on a, non des points, mais de véritables sphères (S), (S').

On a alors

$$R^2 = \frac{\sum m_i^2}{\left(\sum \frac{m_i}{R_i}\right)^2}, \qquad R'^2 = \frac{\sum m'^2_i}{\left(\sum \frac{m'_i}{R_i}\right)^2}.$$

D'ailleurs, puisque les coordonnées sont homogènes, on peut toujours supposer que

$$\sum m_i^2 = \sum m'^2_i,$$

et par suite on aura

$$2RR' = \frac{\sum m_i^2 + \sum m'^2_i}{\sum \frac{m_i}{R_i} \sum \frac{m'_i}{R_i}},$$

et, en ajoutant cette équation membre à membre à (17),

$$(21)\quad (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (R-R')^2 = \frac{\sum (m_i - m'_i)^2}{\sum \frac{m_i}{R_i} \sum \frac{m'_i}{R_i}}.$$

On aurait de même

$$(22)\quad (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (R+R')^2 = \frac{-\sum (m_i + m'_i)^2}{\sum \frac{m_i}{R_i} \sum \frac{m'_i}{R_i}}.$$

Mais ces deux formules supposent essentiellement que

$$\sum m_i^2 = \sum m'^2_i.$$

La condition de contact de deux sphères peut donc s'écrire, dans notre système et avec l'hypothèse précédente,

$$(23)\qquad \sum (m_i \pm m'_i)^2 = 0.$$

Si les deux sphères devenaient infiniment voisines, on aurait

$$dx^2+dy^2+dz^2-d\mathrm{R}^2=\frac{\sum dm_i^2}{\left(\sum\frac{m_i}{\mathrm{R}_i}\right)^2}; \tag{24}$$

mais cette formule suppose essentiellement que, lorsque m_i varie, Σm_i^2 demeure constante.

D'après l'équation (24), la condition de contact de deux sphères infiniment voisines sera donc

$$\sum dm_i^2=0. \tag{25}$$

Les formules données ici peuvent être écrites d'une autre manière, qui met en évidence leur interprétation géométrique. Par exemple les équations (21) et (22), relatives à deux sphères et établies dans l'hypothèse que

$$\sum m_i^2=\sum m'^2_i,$$

deviennent, en appelant φ l'angle de ces sphères,

$$4\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\sum(m_i-m'_i)^2}{\sum m_i^2}, \quad 4\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\sum(m_i+m'_i)^2}{\sum m_i^2}, \tag{26}$$

et par suite, en appelant V l'angle de deux sphères infiniment voisines, la formule (24) nous donne

$$\mathrm{V}^2=\frac{\sum dm_i^2}{\sum m_i^2}, \tag{27}$$

en supposant que Σm_i^2 demeure constante.

Les formules précédentes, ne contenant que des angles, s'appliquent au cas où les sphères se changent en des plans.

Une des propriétés les plus importantes du système pré-

cédent de coordonnées, c'est qu'il est en quelque sorte indifférent à la transformation par rayons vecteurs réciproques ou inversion.

C'est-à-dire que, si l'on soumet le système entier à une inversion, les cinq sphères (S_i) se changent en cinq nouvelles sphères (S'_i), et toute sphère, point ou plan (U), se change en une sphère (U'), qui a, par rapport aux (S'_i), les mêmes coordonnées que (U) par rapport aux (S_i). En d'autres termes, ***on étudie, dans notre système de coordonnées et dans la même équation, en même temps qu'une figure, toutes ses transformées par la méthode des rayons vecteurs réciproques.***

Pour démontrer cette importante proposition, il suffit de remarquer que, grâce aux formules de l'inversion, les cinq quantités $\frac{S_i}{R_i}$ se changent, à un facteur près, dans les quantités analogues $\frac{S'_i}{R'_i}$, relatives aux sphères (S'_i) inverses des (S_i). On a

$$\frac{S_i}{R_i} = \lambda . \frac{S'_i}{R'_i},$$

et par suite l'équation

$$\sum m_i \frac{S_i}{R_i} = 0$$

de toute sphère (U) se change dans l'équation

$$\sum m_i \frac{S_i}{R_i} = 0$$

de la sphère (U') correspondante. Cette nouvelle sphère a donc, par rapport aux (S'_i), les mêmes coordonnées que la première (U) par rapport aux S_i. C'est ce qu'il fallait établir.

Toutefois, il peut arriver que l'une des sphères (S_i) soit changée en un plan. Alors il faudra remplacer $\frac{S_i}{R_i}$ par $2d_i$, d_i désignant la distance à ce plan.

Ainsi, les véritables coordonnées d'un point sont propor-

tionnelles aux quantités $\frac{S_i}{R_i}$ ou $2d_i$, si la sphère de base (S_i) devient un plan, et tout point sera déterminé par les cinq coordonnées homogènes

$$x_i = \lambda \frac{S_i}{R_i},$$

liées par l'équation

$$\sum x_i^2 = 0,$$

et invariables pour toute inversion plane ou sphérique.

III.

Le système actuel de coordonnées présente une propriété tout à fait singulière, et sur laquelle il importe que nous insistions.

D'abord, tous les points du plan de l'infini qui sont hors du cercle de l'infini ont les mêmes coordonnées, savoir

$$x_i = \frac{\lambda}{R_i}.$$

En effet, d'après la formule (9), les coordonnées d'un point quelconque O sont égales à

$$x_i = \frac{\lambda}{R_i}(OC_i^2 - R_i^2).$$

Si le point O s'éloigne indéfiniment sans avoir pour limite un point du cercle de l'infini, OC_i devient infini, et l'on trouve

$$x_i = \frac{\rho}{R_i}.$$

Au contraire, si le point O s'éloigne à l'infini en s'approchant d'un point du cercle de l'infini, OC_i est indéterminé, et l'on a, à la limite,

$$R_i x_i = \lambda + \mu R_i^2,$$

où le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ peut prendre toutes les valeurs possibles. Les

points du cercle de l'infini ont donc une infinité de systèmes de coordonnées.

Les remarques suivantes expliquent ces propriétés si singulières de notre système de coordonnées.

Si l'on soumet les points de l'espace à une inversion, tous les points à l'infini en dehors du cercle de l'infini viennent se confondre au pôle A de l'inversion. Ils ont donc tous, d'après une remarque déjà faite, les mêmes coordonnées que ce pôle, après l'inversion.

Au contraire, à un point M sur le cercle de l'infini correspondent, après l'inversion, tous les points M′ situés sur la droite AM. Le point M doit donc être défini par tous les systèmes de coordonnées qui, après l'inversion, déterminent les différents points M′, en nombre infini sur la droite AM.

IV.

Faisons l'application des résultats précédents à quelques problèmes simples.

Soient deux sphères (S), (S′), définies par les équations

$$\sum m_i x_i = 0, \qquad \sum m'_i x_i = 0.$$

L'équation de toute sphère passant par leur intersection sera

$$\sum (m_i + \lambda m'_i) x_i = 0. \tag{28}$$

L'une de ces sphères se réduira à un plan, le plan radical des deux premières. Elle correspond à la valeur de λ déterminée par l'équation

$$\sum \frac{m_i + \lambda m'_i}{R_i} = 0. \tag{29}$$

Deux des sphères se réduisent à des points. Les valeurs de λ auxquelles elles correspondent sont déterminées par l'équation

$$\sum (m_i + \lambda m'_i)^2 = 0,$$

ou

$$\sum m_i^2 + 2\lambda \sum m_i m'_i + \lambda^2 \sum m'^2_i = 0 . \tag{30}$$

On sait que, lorsque cette équation a des racines égales, les deux sphères (S), (S') sont tangentes; la condition de contact est donc

$$\left(\sum m_i m'_i\right)^2 - \left(\sum m_i^2\right)\left(\sum m'^2_i\right) = 0 . \tag{31}$$

Si l'on fait $\Sigma m_i^2 = \Sigma m'^2_i$, cette équation se décompose dans les deux conditions (22) déjà trouvées.

Si l'équation en λ est identique, les deux sphères se réduisent à des points, et ces points sont sur une droite allant rencontrer le cercle de l'infini.

On sait que, étant données des sphères passant par un même cercle, quatre de ces sphères donnent lieu à un rapport anharmonique, comme quatre plans, et ce rapport anharmonique est égal à celui des centres de ces sphères, situés en ligne droite. Il est clair que le rapport anharmonique de quatre sphères, déduites de l'équation (28) en donnant à λ quatre valeurs distinctes, sera le même que celui de ces valeurs de λ.

V.

Examinons maintenant une surface quelconque représentée par l'équation homogène

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_4) = 0 , \tag{32}$$

que, pour abréger, nous écrirons

$$f(x_i) = 0 .$$

L'équation

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i\right) X_i = 0 , \tag{33}$$

où les x_i désignent les coordonnées d'un point M de la surface, et X_i les coordonnées courantes, représente, quand on y fait

varier λ, une suite de sphères tangentes en M à la surface. Si l'on dispose de λ de telle manière que

$$\sum \frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i\right) = 0 ,$$

alors l'équation (33) représente un plan; c'est le plan tangent à la surface au point M.

Toute sphère

$$\sum m_i X_i = 0 , \tag{34}$$

normale à la surface au point M, devra aussi être normale à toutes les sphères tangentes (33). On devra donc avoir, quel que soit λ,

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i\right) m_i = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\sum m_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 , \quad \sum m_i x_i = 0 .$$

Si l'on a, en outre,

$$\sum \frac{m_i}{R_i} = 0 ,$$

l'équation (34) représentera un plan normal. Tous les plans normaux passent donc par la droite

$$\left(X_i , \frac{\partial f}{\partial x_i} , x_i , \frac{1}{R_i}\right) = 0 , (i = 1, 2, 3, 4, 5) \text{ (1)}. \tag{35}$$

Pour que le point (x_i) soit un point singulier de la surface, il faut que l'on ait, pour une valeur convenable de λ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i = 0 . \tag{36}$$

---

(1) Cette notation abrégée indique qu'il faut égaler à zéro tous les déterminants formés avec les quatre lignes qu'on obtient en donnant à i quatre valeurs quelconques, prises dans la suite 1, 2, 3, 4, 5.

Pour que deux surfaces, représentées par les équations homogènes

$$f(x_i)=0\,,\qquad \varphi(x_i)=0\,,$$

soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait, pour leurs points communs,

$$\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}=0\,. \tag{37}$$

Cette équation a déjà été donnée dans le texte (art. 49).

Enfin, étant donnée une sphère par l'équation

$$\sum m_i X_i=0\,,$$

toute sphère concentrique aura pour équation

$$\sum\left(m_i+\frac{K}{R_i}\right)X_i=0\,. \tag{38}$$

Par exemple, si l'on demande l'équation générale des sphères ayant pour centre un point (x_i), cette équation sera

$$\sum\left(x_i+\frac{K}{R_i}\right)X_i=0\,. \tag{39}$$

Ces dernières propositions se démontrent sans difficulté au moyen des formules générales déjà données.

L'équation de la sphère réduite au plan de l'infini est

$$\sum\frac{X_i}{R_i}=0\,. \tag{40}$$

VI.

Dans les calculs précédents, nous avons pris pour base de notre système cinq sphères deux à deux orthogonales, mais on peut aussi prendre cinq sphères quelconques, non orthogonales à une même sphère.

Soient en effet (S_i) les cinq sphères orthogonales, et x_i les coordonnées définies plus haut d'un point quelconque.

Effectuons la substitution linéaire

$$x_i = \sum_k m_{ik} y_k , \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5) ; \tag{41}$$

on tirera de ces équations

$$y_i = \sum_k p_{ik} x_k . \tag{42}$$

Les équations

$$y_i = 0$$

représentent donc cinq sphères quelconques, que nous appellerons (S'_i), et qui ne sont pas orthogonales à une même sphère, puisqu'il n'y a entre les y_i aucune relation linéaire identique.

La signification géométrique des nouvelles variables y_i est donc la suivante. Elles sont proportionnelles aux puissances du point par rapport aux sphères (S_i) multipliées par des facteurs constants.

De l'identité

$$\sum x_i^2 = 0$$

on déduira par la substitution une relation

$$\varphi(y_i) = 0 \tag{43}$$

quadratique et homogène, et contenant en général les rectangles des variables y_i. Donc

Il existe, entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères non orthogonales à une même sphère, une relation quadratique et homogène, qui contient en général les rectangles des variables.

Nous n'étudierons pas d'une manière détaillée le nouveau système de coordonnées auquel nous sommes conduit ici. Les formules qui se rapportent à ce système se déduiront sans peine des précédentes, si l'on applique les notions relatives aux invariants et covariants des formes quadratiques homogènes. Nous nous bornerons à indiquer la condition pour que deux sphères soient orthogonales.

Soient

$$\sum m_i y_i = 0 , \quad \sum m'_i y_i = 0$$

les équations des deux sphères et désignons par $\varphi_i(y_i)$ la forme adjointe de $\varphi(y_i)$. La condition d'orthogonalité pourra s'écrire

$$m'_1 \frac{\partial \varphi_1(m_i)}{\partial m_1} + m'_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial m_2} + \cdots = 0 .$$

On déduit notamment de cette dernière équation la proposition suivante :

Pour que les cinq sphères qui composent la base du système soient deux à deux orthogonales, il faut et il suffit que la relation identique (43) ***ne contienne pas les rectangles des variables*** (1).

---

(1) On pourra consulter sur cette relation un Mémoire de l'auteur, inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. I, n° 6.

Note XI.

Application du système de coordonnées considéré dans la Note précédente à la théorie des cyclides.

I.

Nous avons vu (art. 41) que l'équation d'une cyclide peut se mettre sous la forme

$$A(x^2+y^2+z^2)^2+u_1t(x^2+y^2+z^2)+u_2t^2=0,$$

où x, y, z, t désignent les coordonnées homogènes ordinaires d'un point, et u_1, u_2 des polynômes du premier et du second degré. Si nous introduisons les cinq quantités (S_i), définies par les équations suivantes,

$$S_1=xt,\quad S_2=yt,\quad S_3=zt,\quad S_4=t^2,\quad S_5=x^2+y^2+z^2,$$

l'équation de la cyclide se transformera en une équation homogène et du second degré par rapport à ces cinq quantités (S_i). D'ailleurs, celles-ci sont liées, d'après la Note précédente, par une équation identique, qui est ici

$$S_5S_4-S_1^2-S_2^2-S_3^2=f(S_i)=0. \tag{1}$$

Cela posé, désignons, pour abréger, par

$$\varphi(S_i)=0 \tag{2}$$

l'équation homogène de la cyclide. D'après des principes bien connus, les deux fonctions $f(S_i)$, $\varphi(S_i)$ pourront être ramenées par une substitution linéaire à ne contenir que les carrés des variables.

L'identité (1) prendra la forme

$$\sum x_i^2=0, \tag{3}$$

et les équations

$$x_i = 0$$

représenteront, par conséquent, des sphères orthogonales. L'équation de la cyclide deviendra

$$\sum A_i x_i^2 = 0 . \tag{4}$$

Nous retrouvons le résultat établi (art. 47).

Il est vrai que, étant données deux formes quadratiques, on ne peut pas toujours les ramener à des sommes de carrés; mais ces cas d'exception peuvent se déduire du cas général par la méthode des limites.

Examinons, par exemple, le premier de ces cas, qui comprend tous les autres, et qui correspond à l'hypothèse où les sphères

$$x_4 = 0 , \quad x_5 = 0$$

se rapprochent indéfiniment, et viennent se confondre. Alors les équations (3) et (4) prennent les formes

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_4 x'_4 = 0 ,$$
$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_4 x_4^2 + 2b x_4 x'_4 = 0 .$$

Au moyen de la première de ces formules, qui est une identité, on peut éliminer $x_4 x'_4$ de la seconde. L'équation de la cyclide sera donc de la forme

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2 = 0 . \tag{5}$$

Mais la sphère (x_4), étant orthogonale à la sphère infiniment voisine (x_5), devra se réduire à un point, et comme elle est aussi orthogonale à (S_1), (S_2), (S_3), le point auquel elle se réduit sera à l'intersection de ces trois dernières sphères. L'équation (5) représente donc une cyclide, qu'on pourra transformer par une inversion en une quadrique. Il suffira de mettre le pôle de l'inversion au point

$$x_4 = 0 .$$

II.

Soit donc

$$\sum A_i x_i^2 = 0 \tag{6}$$

l'équation d'une cyclide générale.

D'après la formule (33) de la Note précédente, les coordonnées m_i d'une sphère tangente au point x_i auront pour expression

$$m_i = (A_i + \lambda) x_i , \tag{7}$$

où λ a une valeur fixe, mais quelconque. Ces coordonnées devront, par conséquent, satisfaire aux deux relations

$$\sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0 , \quad \sum \frac{m_i^2}{(A_i + \lambda)^2} = 0 . \tag{8}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on aurait la relation qui doit avoir lieu entre les quantités m_i, pour que la sphère qu'elles déterminent soit tangente à la cyclide. On obtiendra évidemment cette relation, en exprimant que la première des équations (8) a une racine double. Cette équation étant biquadratique, son discriminant sera du douzième ordre par rapport aux quantités m_i. Soit

$$\Psi(m_i) = 0 \tag{9}$$

l'équation qu'on obtient en l'égalant à zéro. Elle est homogène et du douzième ordre par rapport aux quantités m_i; on en déduit les conséquences suivantes.

Si l'on cherche combien on peut faire passer, par l'intersection de deux sphères données, de sphères tangentes à la cyclide, il faudra remplacer m_i par $m_i + \lambda m'_i$, et l'on aura pour λ une équation du douzième ordre.

$$\Psi(m_i + \lambda m'_i) = 0 . \tag{10}$$

Donc *par un cercle on peut mener douze sphères tangentes à la cyclide.*

Si ce cercle devient une ligne droite, les sphères qui le contiennent sont des plans. Donc *la cyclide est de la douzième classe.*

Enfin, si les deux sphères données m_i, m'_i sont concentriques, les sphères $(m_i + \lambda m'_i)$ ont le même centre que les premières. Donc, dans une série de sphères concentriques, il y en a douze qui sont tangentes à la cyclide. En d'autres termes, d'*un point on peut mener douze normales à la cyclide.*

Toutes ces propositions, si différentes en apparence, sont ici des conséquences d'un principe unique.

Ajoutons que l'équation (9), en y regardant les m_i comme les coordonnées d'un plan, est l'*équation tangentielle* de la surface. Cette équation est de la forme

$$I^3 - J^2 = 0 .$$

III.

Proposons-nous de rechercher, quand la sphère (m_i) est quelconque, quelle est la signification géométrique des racines de l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 0 .$$

Nous obtiendrons ainsi le résultat suivant. *La sphère (m_i) coupe la cyclide suivant une courbe située sur quatre cônes du second degré. La détermination de ces quatre cônes s'effectue par la résolution de l'équation précédente.*

Soit, en effet,

$$(11) \qquad S = \sum m_i S_i = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots = 0$$

l'équation de la sphère sécante, écrite en coordonnées ordinaires. Pour tous les points de la cyclide situés sur cette sphère, on pourra remplacer $x_i = \frac{S_i}{R_i}$ par la fonction du *premier degré* $\frac{S_i - S}{R} = \alpha_i$, et, si l'on effectue cette substitution à la

fois dans l'équation de la cyclide et dans la relation identique entre les quantités x_i, on aura les deux équations

$$\sum A_i \alpha_i^2 = 0 , \qquad \sum \alpha_i^2 = 0 , \tag{12}$$

qui représentent la première une quadrique, la seconde la sphère sécante (S). On a aussi l'identité

$$\sum m_i \alpha_i = 0 , \tag{13}$$

en remplaçant x_i par α_i dans l'équation de la sphère (S).

Cherchons les cônes passant par l'intersection des deux quadriques (12). Pour cela, il faudra exprimer que l'équation

$$\sum (A_i + \lambda) \alpha_i^2 = 0$$

représente un cône, en tenant compte de la relation identique (13). On obtient ainsi, sans difficulté particulière, l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0 , \tag{14}$$

et les coordonnées du sommet du cône ont pour valeur

$$\alpha_i = \frac{m_i}{A_i + \lambda} .$$

La proposition que nous avions en vue est donc démontrée, et l'on voit bien pourquoi une racine double de l'équation (14) correspond à une sphère tangente. Si deux cônes viennent se confondre, la courbe d'intersection de la sphère et de la cyclide aura un point double à leur sommet commun, qui sera le point de contact de la sphère avec la cyclide.

La méthode que nous venons de suivre fournit sans difficulté les sections circulaires des cyclides. Cherchons, en effet, les sphères doublement tangentes; il faudra que l'un des quatre cônes déterminés par l'équation (14) se réduise à deux plans,

et pour cela il est indispensable que l'une des coordonnées du sommet, α_1, par exemple, devienne indéterminée. Soit

$$m_1 = 0, \quad \lambda = -A_1;$$

comme $\lambda = -A_1$ doit être racine double, on aura, en exprimant ce fait,

$$m_1 = 0, \quad \sum_2^5 \frac{m_i^2}{A_i - A_1} = 0. \tag{15}$$

Si, au lieu de α_1, on prenait $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, on aurait bien les cinq séries de sphères doublement tangentes. Interprétons les équations (15).

Le première de ces équations indique que les sphères de la série sont toutes orthogonales à la sphère (S_1).

D'ailleurs, si l'on appelle S_i la puissance du centre de l'une des sphères par rapport à la sphère (S_i), on a d'après la formule (9) de la Note précédente,

$$R_i m_i = S_i - R^2, \quad R_1 m_1 = 0 = S_1 - R^2,$$

et par suite

$$m_i = \frac{S_i - S_1}{R_i}.$$

En substituant ces valeurs dans la deuxième des équations (15), on obtient

$$\sum \frac{\left(\frac{S_i - S_1}{R_i}\right)^2}{A_i - A_1} = 0. \tag{16}$$

Cette équation du lieu des centres est bien du second degré, et elle représente une surface conjuguée par rapport au tétraèdre formé des centres des sphères $(S_2), \ldots, (S_5)$.

On retrouve donc la génération des cyclides due à M. Moutard. Nous n'insisterons pas sur les démonstrations très simples qu'on pourrait donner ici des relations entre les quadriques, à l'aide du système de coordonnées que nous avons employé.

IV.

Nous avons vu que la condition de contact d'une sphère et de la cyclide s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0 ,$$

du 4e ordre en λ. Ce discriminant est de la forme

$$I^3 - J^2 ,$$

où I et J sont des fonctions, du 4e et du 6e degré respectivement, des quantités m_i. On peut se demander quelle est la signification géométrique des équations

$$I = 0 \quad \text{ou} \quad J = 0 .$$

Pour répondre à cette question, nous rappellerons le théorème suivant, dû à M. Cremona (1).

Si par deux points d'une cyclique (et en général d'une biquadratique gauche) on mène des plans tangents à la cyclique, ou, si elle est plane, des cercles tangents, le rapport anharmonique des quatre plans ou des quatre cercles ainsi obtenus est constant.

Cette valeur constante est précisément le rapport anharmonique des racines de l'équation précédente du 4e degré.

Quand

$$I = 0 ,$$

cette valeur est égale à une racine cubique imaginaire de l'unité; les différents rapports anharmoniques qu'on peut former avec les quatre racines sont égaux. Nous dirons avec M. Cremona que la courbe est *équiharmonique*.

---

(1) Cremona : Mémoire de géométrie pure, sur les surfaces du 3e ordre. *Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 119.

Ainsi, les sphères dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$I = 0 \tag{17}$$

coupent la surface suivant des cyclides équiharmoniques.

Les quatre cercles ou plans sont, au contraire, en rapport harmonique, si les coordonnées de la sphère satisfont à l'équation

$$J = 0 . \tag{18}$$

Les équations (17) et (18) étant des ordres 4 et 6, les plans qui satisfont à ces équations enveloppent des surfaces de la 4e et de la 6e classe respectivement. Nous avons donc les théorèmes suivants :

L'enveloppe des plans coupant une cyclide suivant des courbes équiharmoniques est une surface de la 4e classe.

L'enveloppe des plans coupant suivant des courbes harmoniques est de la 6e classe.

Ces propositions, qui s'appliquent à toutes les surfaces du 4e ordre à conique double, sont l'extension des théorèmes de M. Cremona relatifs aux surfaces du 3e ordre (1).

Plus généralement l'équation

$$I^3 - KJ^2 = 0 \tag{19}$$

convient à toutes les sphères coupant la cyclide suivant des courbes de même rapport anharmonique. Celles de ces sphères qui se réduiront à des plans envelopperont une surface de la 12e classe.

V.

Étant donnée la cyclide

$$f(x_i) = \sum A_i x_i^2 = 0 ,$$

(1) *Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 68.

nous avons vu que l'équation générale des sphères tangentes à la cyclide au point (x_i) est la suivante,

$$\sum (A_i + \lambda) X_i x_i = 0 .$$

Si l'on donne à λ les six valeurs

$$-\infty , \quad -A_1 , \quad -A_2 , \quad \ldots , \quad -A_5 ,$$

on obtient successivement une sphère réduite au point de contact (x_i) et les cinq sphères doublement tangentes à la surface ayant un de leurs points de contact en (x_i). Les rapports anharmoniques de ces cinq sphères ou, ce qui est la même chose, de leurs centres disposés sur la normale au point (x_i) seront les mêmes que ceux des six nombres précédents, c'est-à-dire seront constants. Donc

Une normale quelconque à la cyclide rencontre les cinq déférentes en cinq points, qui sont les centres de sphères doublement tangentes à la cyclide et ayant un de leurs points de contact au pied de la normale. Ces cinq points et le pied de la normale déterminent sur cette droite une division homographique à une division fixe; en d'autres termes, le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces cinq points demeure constant (1).

La proposition précédente est la généralisation d'un théorème important, relatif aux normales des quadriques qui sont divisées, comme on sait, par les plans principaux de la surface et par leur pied en segments conservant des rapports invariables. Nous allons compléter cette analogie en cherchant, dans le cas des cyclides, le lieu des points qui forment sur chaque normale, avec trois quelconques des six précédents, un rapport anharmonique constant. Cela revient à chercher le lieu des centres des sphères tangentes, correspondantes à une même valeur de λ. Nous dirons que toutes ces sphères

(1) Voir un Mémoire de l'auteur, *Annales de l'École Normale supérieure*, t. I, 2e série.

sont des sphères tangentes *de même rapport anharmonique*. Elles se représenteront dans les Notes suivantes.

Leurs coordonnées

$$m_i = x_i(A_i + \lambda)$$

satisfont évidemment aux deux équations

$$(20) \qquad \sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0 , \quad \sum \frac{m_i^2}{(A_i + \lambda)^2} = 0 .$$

Si l'on désigne les coordonnées de leur centre par x_i, on aura, en vertu de la formule (39) de la Note précédente,

$$m_i = x_i + \frac{K}{R_i} ,$$

et il faudra, pour obtenir le lieu des centres, éliminer K entre les deux équations

$$(21) \qquad \sum \frac{\left(x_i + \frac{K}{R_i}\right)^2}{A_i + \lambda} = 0 , \quad \sum \frac{\left(x_i + \frac{K}{R_i}\right)^2}{(A_i + \lambda)^2} = 0 .$$

Posons

$$(22) \qquad \begin{cases} \varpi(\lambda) = (\lambda + A_1)(\lambda + A_2) \dots (\lambda + A_n) , \\ \varphi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{x_i^2}{A_i + \lambda} , \\ f(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{\frac{x_i}{R_i}}{A_i + \lambda} , \\ \psi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{\frac{1}{R_i^2}}{A_i + \lambda} . \end{cases}$$

les équations (22) pourront être remplacées par le système suivant

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi + 2fK + \psi K^2 = 0 , \\ \varphi' + 2f'K + \psi' K^2 = 0 , \end{cases}$$

et, en éliminant K, on aura

$$(24) \qquad (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = (\varphi f' - f\varphi')(f\psi' - \psi f') ,$$

ou encore

$$(25)\qquad (2ff'-\varphi\psi'-\psi\varphi')^2=4(f^2-\varphi\psi)(f'^2-\varphi'\psi').$$

Cette équation est du 4e ordre par rapport aux quantités x_i; mais, comme elle ne dépend en réalité que des différences

$$\frac{x_i}{R_j}-\frac{x_j}{R_i}=\frac{S_i-S_j}{R_iR_j},$$

la surface qu'elle représente sera en général du 4e ordre. Elle aura d'ailleurs, d'après l'équation (24), une conique double, représentée par les équations

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{f'}{f}=\frac{\psi'}{\psi};$$

et enfin, d'après l'identité

$$f^2-\varphi\psi=-\varpi^2(\lambda)\sum\frac{\left(\frac{x_i}{R_j}-\frac{x_j}{R_i}\right)^2}{(A_i+\lambda)(A_j+\lambda)},$$

elle se réduira, pour $\lambda=-A_i$, à une quadrique double. En effet $f^2-\varphi\psi$ deviendra nul, et l'équation (25) prendra la forme

$$\left\{\sum_j\frac{\left(\frac{x_i}{R_j}-\frac{x_j}{R_i}\right)^2}{A_iA_j}\right\}^2=0.$$

Cette quadrique est une des déférentes de la cyclide.

Nous retrouverons la surface précédente dans la discussion du problème des normales.

VI.

Nous venons de considérer des sphères tangentes, et de définir ce que nous appelons les sphères de même rapport anharmonique. Nous sommes ainsi amenés à étudier tous les plans tangents de même rapport anharmonique, c'est-à-dire correspondants à une même valeur de λ.

Soient m_i les coordonnées de ces plans tangents; elles

satisferont aux deux équations

$$(26) \qquad \sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 0 , \quad \sum \frac{m_i^2}{(\lambda + A_i)^2} = 0 ,$$

où λ reste constant; et comme, dans le système actuel de coordonnées appliqué au plan, les m_i sont simplement des coordonnées tangentielles ordinaires (Note X), nous voyons que

Les plans tangents de même rapport anharmonique enveloppent une développable de 4e classe; circonscrite aux deux quadriques (26).

Nous allons compléter ce théorème en prouvant que les points de contact de ces plans tangents, correspondants à une même valeur de λ, sont sur une courbe sphérique de la cyclide; que, si l'on fait varier λ, les différentes courbes ainsi obtenues sont sur des sphères concentriques; et, enfin, que ces sections sphériques sont les seules suivant lesquelles une quadrique puisse être inscrite à la cyclide.

Soit, en effet,

$$\sum (A_i + \lambda) X_i x_i = 0$$

l'équation d'une sphère tangente, de rapport anharmonique λ. Pour qu'elle se réduise à un plan, il faut que l'on ait

$$(27) \qquad \sum (A_i + \lambda) \frac{x_i}{R_i} = 0 ,$$

c'est-à-dire que le point de contact soit sur la sphère représentée par l'équation précédente. Ainsi, le lieu des points de contact des plans correspondants à une même valeur de λ est bien une courbe sphérique.

Si, dans l'équation (27), on fait varier λ, on obtient une série de sphères concentriques. Il reste à démontrer que les sections de la cyclide par ces sphères sont les seules courbes suivant lesquelles une quadrique puisse être inscrite à la cyclide.

Soit, en effet,

$$S = \sum m_i x_i$$

une sphère sécante quelconque, et posons

$$B = \sum \frac{m_i}{R_i^2} .$$

Pour tous les points d'intersection de (S) et de la cyclide, on peut remplacer la fonction du second degré x_i par la suivante,

$$x_i - \frac{S}{BR_i} ,$$

qui est du premier degré par rapport aux coordonnées ordinaires, et l'équation

$$\sum (A_i + \lambda)\left(x_i - \frac{S}{BR_i}\right)^2 = 0 \tag{28}$$

représente, quand on y fait varier λ, toutes les quadriques passant par l'intersection de la cyclide et de (S). Développons cette équation; nous aurons

$$\sum (A_i + \lambda) x_i^2 - \frac{2S}{B} \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i} + \frac{S^2}{B^2} \sum \frac{A_i + \lambda}{R_i^2} = 0 ,$$

ou

$$\sum A_i x_i^2 + \frac{S}{B}\left[\frac{S}{B} \sum \frac{A_i}{R_i^2} - 2 \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i}\right] = 0 . \tag{29}$$

Comme la cyclide a pour équation

$$\sum A_i x_i^2 = 0 ,$$

on voit que la quadrique (28) coupe la cyclide suivant deux courbes distinctes, situées sur les sphères

$$S = 0 , \quad \frac{S}{B} \sum \frac{A_i}{R_i^2} = 2 \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i} . \tag{30}$$

Pour que la quadrique soit inscrite à la cyclide, il faut que ces deux sphères se confondent, c'est-à-dire que l'on ait

$$S = \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i} .$$

On obtient alors

$$B = \sum \frac{A_i}{R_i^2},$$

et l'équation (29) se réduit à la suivante,

$$\sum A_i x_i^2 - \frac{S^2}{B} = 0, \tag{31}$$

qui montre que la quadrique est inscrite à la cyclide proposée.

L'hypothèse $B = 0$, qui met les raisonnements en défaut, correspond aux cyclides du 3e ordre, qui n'admettent pas de quadriques inscrites.

Ainsi *les plans tangents de même rapport anharmonique formeront une suite de développables de 4e classe, circonscrites à la cyclide suivant des courbes sphériques du 4e ordre. Les tangentes doubles de ces développables seront les seules droites par lesquelles on pourra mener à la cyclide deux plans tangents distincts, de même rapport anharmonique.*

Note XII.

Sur le problème des normales aux cyclides.

I.

Supposons que l'on se propose de mener d'un point des normales à une surface algébrique. Le problème, de quelque manière qu'on le traite, se ramène en définitive à la résolution d'une équation algébrique, contenant une seule inconnue u. Le degré de cette équation donne le nombre des normales qu'on peut mener d'un point à une surface algébrique. Mais la discussion du problème est plus ou moins simple, suivant l'arbitraire qu'on a choisie.

Supposons qu'on se propose de chercher les points de l'espace pour lesquels deux normales menées à la surface se confondent. Si l'on exprime que l'équation en u a une racine double, on obtiendra un lieu géométrique, plus général que celui que l'on demande, et qui est la surface des centres de courbure.

Choisissons pour inconnue, par exemple, le carré de la distance du point d'où l'on mène des normales, au pied de chaque normale. Il est clair que, si l'on prend un point A sur le lieu des centres des sphères doublement tangentes à la surface, il y aura une sphère ayant son centre en A et tangente en deux points a, a' à la surface. Les droites Aa, Aa' seront deux normales menées du point A, et correspondantes à une même valeur de u. L'équation en u aura donc une racine double, sans que les deux normales menées du point A et correspondantes à cette racine double soient confondues.

Il en sera de même si l'on prend toute autre inconnue, l'abscisse, par exemple, du pied de la normale; car, si le

point A se trouve sur la surface, lieu des points d'où l'on peut mener deux normales dont les pieds aient même abscisse, il est clair qu'on aura pour l'abscisse une racine double à laquelle correspondront deux normales différentes.

On voit donc que, de quelque manière qu'on aborde le problème, il sera bien difficile de ne pas avoir à examiner et à rejeter des solutions étrangères, dépendant uniquement du choix de l'inconnue et variant avec elle. On peut ajouter que la même normale peut correspondre à deux valeurs distinctes de l'inconnue. C'est ce qui explique les grandes difficultés qu'offre l'étude du problème des normales. Ces difficultés ont été surmontées d'une manière complète dans le beau Mémoire de M. Clebsch relatif aux surfaces quadriques.

Le problème des normales aux cyclides est beaucoup plus compliqué que le problème analogue relatif aux surfaces du second ordre. Il est d'ailleurs d'une moindre importance; aussi me contenterai-je d'en indiquer la solution, sans examiner tous les cas particuliers.

On a déjà vu (art. 60) que la cyclide a trente normales doubles, qui sont les normales abaissées des centres des cinq sphères directrices sur les déférentes correspondantes.

On a vu aussi, dans la Note précédente, que d'un point on peut mener douze normales à la cyclide. Voici comment on peut former l'équation dont dépendent ces douze normales.

Soit

$$\psi(m_i) = 0 \tag{1}$$

la condition de contact déjà trouvée entre une sphère et la cyclide. Si les coordonnées du centre sont x_i, on aura

$$m_i = \lambda x_i + \frac{\mu}{R_i}, \tag{2}$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (1), l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$

$$\psi\left(\lambda x_i + \frac{\mu}{R_i}\right) = 0$$

fera connaître les différentes sphères ayant pour centre le

point (x_i), et tangentes à la cyclide, c'est-à-dire les normales menées du point (x_i). Mais il est préférable de suivre la méthode suivante.

Nous avons vu, dans la Note précédente, que la condition de contact s'obtient en éliminant λ entre deux équations

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 0 , \tag{3}$$

$$\sum \frac{m_i^2}{(\lambda + A_i)^2} = 0 . \tag{4}$$

Cela posé, soient deux sphères données (m_i), (m'_i), et cherchons combien on peut faire passer par leur intersection de sphères tangentes à la cyclide. Il suffira ensuite de supposer concentriques les deux sphères données pour obtenir la solution de notre problème particulier.

Toute sphère passant par l'intersection des deux proposées a pour coordonnées $m_i + km'_i$, et l'on aura, pour déterminer k et λ, les deux équations

$$\sum \frac{(m_i + km'_i)^2}{\lambda + A_i} = 0 , \tag{5}$$

$$\sum \frac{(m_i + km'_i)^2}{(\lambda + A_i)^2} = 0 . \tag{6}$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi(\lambda) = (\lambda + A_1)(\lambda + A_2) \dots (\lambda + A_n) , \\ \varphi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{m_i^2}{\lambda + A_i} , \\ f(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{m_i m'_i}{\lambda + A_i} , \\ \psi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{m'^2_i}{\lambda + A_i} ; \end{array} \right. \tag{7}$$

les équations (5) et (6) seront équivalentes aux suivantes,

$$\varphi(\lambda) + 2f(\lambda)k + \psi(\lambda)k^2 = 0 , \tag{8}$$

$$\varphi'(\lambda) + 2f'(\lambda)k + \psi'(\lambda)k^2 = 0 . \tag{9}$$

La première de ces équations est du 4e degré en λ, la seconde est la dérivée de la première par rapport à λ.

Notre première méthode pour la recherche des normales revient à l'élimination de λ entre ces deux équations, élimination qui se fait en exprimant que l'équation (8) en λ a une racine double; mais nous aurons avantage à éliminer k au lieu de λ. On est ainsi conduit à l'équation finale

$$(10) \qquad (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = 4(\varphi f' - f\varphi')(f\psi' - \psi f'),$$

qui est du douzième ordre en λ, et qui peut être mise, comme on sait, sous la forme équivalente

$$(11) \qquad 2(ff' - \varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = 4(f^2 - \varphi\psi)(f'^2 - \varphi'\psi').$$

Il y a quelques remarques à présenter sur cette équation. On a d'abord identiquement

$$(12) \qquad f^2 - \varphi\psi = -\varpi^2(\lambda)\sum_{i,j}\frac{(m_i m'_j - m_j m'_i)^2}{(\lambda + A_i)(\lambda + A_j)},$$

et, si l'on introduit le polynôme du troisième degré suivant

$$F(\lambda) = -\varpi(\lambda)\sum\frac{(m_i m'_j - m_j m'_i)^2}{(\lambda + A_i)(\lambda + A_j)},$$

l'identité (12) peut s'écrire

$$(13) \qquad f^2 - \varphi\psi = \varpi(\lambda)F(\lambda),$$

et l'on déduit de là, en prenant les dérivées des deux membres,

$$2ff' - \varphi\psi' - \psi\varphi' = \varpi' F + \varpi F'.$$

On peut donc donner à l'équation (11) en λ la forme nouvelle

$$(14) \qquad (\varpi F' + \varpi' F)^2 = 4\varpi F(f'^2 - \varphi'\psi').$$

Nous avons ainsi deux formes distinctes et également importantes de notre équation en λ. On voit que cette équation est du 8e ordre par rapport aux quantités m_i, m_i, et il est clair que, si on la développait, elle ne dépendrait que des binômes $m_i m' - m_j m'_i$. Elle est donc à la fois homogène et

du 4^e ordre, soit par rapport aux m_i, soit par rapport aux m'_i. Nous allons chercher dans quel cas elle peut avoir une racine double.

Son discriminant, que nous appellerons Δ et qui est du 22^e ordre par rapport aux coefficients, devra donc être du 88^e ordre, soit par rapport aux m_i, soit par rapport aux m'_i. Nous allons chercher les facteurs de ce discriminant, et déterminer leurs degrés de multiplicité.

Si l'on désigne, pour abréger, par

$$\Phi(\lambda, k)$$

le premier membre de l'équation (8), notre équation en λ est le résultat de l'élimination de k entre les deux suivantes

$$\Phi(\lambda, k) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0.$$

Considérons les deux valeurs k_0 et k_1 de k, tirées de la seconde équation, comme des fonctions de λ ***déterminées par cette équation,*** et portons-les dans la première. Le résultat de l'élimination de k prend ainsi la forme

$$\Phi(\lambda, k_0)\Phi(\lambda, k_1) = 0. \tag{15}$$

Pour qu'il y ait une racine double de l'équation en λ, il faut que la dérivée du premier membre de l'équation (15) par rapport à λ soit nulle, ce qui donne

$$\Phi(\lambda, k_0)\, d\Phi(\lambda, k_1) + \Phi(\lambda, k_1)\, d\Phi(\lambda, k_0) = 0. \tag{16}$$

Mais un des deux facteurs du premier membre de l'équation (15) est nul. On a, par exemple,

$$\Phi(\lambda, k_0) = 0.$$

L'équation (16) se réduit alors à

$$\Phi(\lambda, k_1)\, d\Phi(\lambda, k_0) = 0,$$

et, en tenant compte de l'équation

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, k_0)}{\partial \lambda} = 0,$$

qui définit k_0 comme fonction de λ, il reste

$$\Phi(\lambda, k_1)\frac{\partial\Phi(\lambda, k_0)}{\partial k_0}\frac{dk_0}{d\lambda}=0. \tag{17}$$

On est ainsi conduit aux trois hypothèses suivantes :

1° $$\Phi(\lambda, k_0)=0, \quad \Phi(\lambda, k_1)=0,$$

c'est-à-dire, les deux équations (8) et (9) en k doivent avoir deux racines communes ou la seconde une racine double $k_0=k_1$. Cette seconde supposition doit être rejetée, car elle rendrait infinie la dérivée $\frac{dk_0}{d\lambda}$, et l'examen de la première nous conduit au résultat suivant :

Le discriminant cherché Δ contient un premier facteur, qui est le résultat de l'élimination de λ entre les trois équations

$$\begin{cases} \varphi\psi'-\psi\varphi'=0, \\ f\varphi'-\varphi f'=0, \\ \psi f'-f\psi'=0. \end{cases} \tag{18}$$

Désignons par M ce premier facteur. Pour l'obtenir, multiplions chacune des équations (18) successivement par $1, \lambda, \lambda^2$; nous obtiendrons ainsi 9 équations du 8e ordre au plus en λ. En éliminant λ par la méthode dialytique, nous aurons une résultante M du 18e ordre soit par rapport aux m_i, soit par rapport aux m'_i, et du 36e ordre par rapport à ces deux séries de variables prises simultanément. Cette résultante M figure dans le discriminant cherché Δ, élevée au carré. (Nous indiquons plus loin la méthode générale au moyen de laquelle nous avons déterminé les puissances auxquelles doivent être élevés les différents facteurs de Δ.)

2° L'équation (17) sera aussi vérifiée dans l'hypothèse suivante :

$$\Phi(\lambda, k_0)=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial k_0}=0,$$

c'est-à-dire si l'équation (8) en k a une racine double. Cela donne

$$f^2-\varphi\psi=0,$$

ou, d'après les notations (13),

$$\varpi F = 0 .$$

L'équation (14) se réduit alors à

$$\left[\frac{d(\varpi F)}{d\lambda}\right]^2 = 0 .$$

Le discriminant Δ doit donc contenir comme facteur le discriminant de ϖF, ce qu'il est d'ailleurs facile de reconnaître d'après la forme de l'équation (14).

Or, le discriminant de ϖF se compose de trois parties : le discriminant de ϖ, qui est une constante; celui de F, que nous appellerons Σ, et la résultante élevée au carré de ϖ et de F.

F étant une fonction du 3e degré en λ, son discriminant Σ sera du 8e ordre par rapport aux m_i.

Quant à la résultante de ϖ et de F, elle se compose des cinq facteurs Q_i, qu'on obtient en portant dans F les racines de ϖ, $\lambda = -A_i$. On a

$$Q_i = \sum_j \frac{(m_i m'_j - m_j m'_i)^2}{A_i - A_j} .$$

3° Enfin, le discriminant de l'équation en λ contient un dernier facteur, correspondant à l'hypothèse suivante, déduite de l'équation (17),

$$\Phi(\lambda, k) = 0 , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 , \quad \frac{dk}{d\lambda} = 0 .$$

La dernière de ces équations peut être remplacée, en tirant $\frac{\partial k}{\partial \lambda}$ de l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 ,$$

par

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = 0 .$$

Donc, notre dernier facteur correspond au cas où l'équa-

tion (8) en λ a une racine triple, c'est-à-dire où la sphère correspondante a un contact stationnaire avec la surface. En appelant G ce dernier facteur, le discriminant cherché sera

$$M^3 G Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 Q_4^2 Q_5^2 \Sigma = \Delta . \tag{18}$$

Il nous reste à déterminer le degré de G et aussi à indiquer comment on détermine l'exposant de chacun des facteurs du discriminant Δ. Commençons par G.

Exprimons que l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0$$

a une racine triple. Comme elle est du 4e degré en λ, on aura les conditions cherchées en égalant à zéro les deux invariants I, J, ce qui donne

$$I = 0 , \quad J = 0 ,$$

équations du 4e et du 6e degré respectivement par rapport aux m_i.

Cela posé, pour avoir G, on remplacera dans ces équations m_i par $m_i + k m'_i$. On obtiendra deux équations en k, l'une du 4e, l'autre du 6e degré, entre lesquelles il faudra éliminer k. Les coefficients étant homogènes par rapport aux m_i, m'_i, et des degrés 4 et 6, G sera de l'ordre

$$6 \times 4 + 4 \times 6 = 48$$

par rapport à ces mêmes quantités. Il sera donc seulement de l'ordre 24 par rapport à chacune des séries de variables, par rapport aux m_i par exemple; car, de même que Δ et tous les facteurs de Δ, G par la nature même de la question dépend uniquement des binômes $m_i m'_j - m_j m'_i$.

En réunissant tous les résultats trouvés, on voit bien que le discriminant (18) est, comme cela doit être, du 88e ordre par rapport aux m_i. Nous allons maintenant indiquer comment nous avons déterminé les degrés de multiplicité de ses différents facteurs.

A cet effet, nous exposerons d'abord une méthode générale qui permet de traiter, dans bien des cas, des questions de la nature de celle que nous avons à examiner ici.

Étant donnée l'équation

$$f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots = 0,$$

on sait que le discriminant de cette équation est, à un facteur numérique près, égal à

$$a_0^{2n-2} \Pi (x_i - x_j)^2, \tag{19}$$

les x_i désignant les racines de l'équation proposée. D'après cela, toutes les fois qu'un certain nombre de coefficients

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots$$

(deux au moins) s'annuleront, l'équation aura une racine nulle multiple, et le discriminant s'annulera.

Supposons, par exemple, que

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \cdots$$

contiennent en facteur des puissances

$$\alpha^{p_1}, \alpha^{p_2}, \alpha^{p_3}, \alpha^{p_4}, \cdots$$

d'une quantité α. Le discriminant devra contenir une certaine puissance de α, que l'on déterminera comme il suit.

Lorsque α devient infiniment petit, plusieurs racines de l'équation sont aussi infiniment petites, et l'on sait, d'après la règle du parallélogramme de Newton, les développer en séries ordonnées suivant les puissances de α. Quant aux autres racines, elles demeurent finies et, en général, inégales. En substituant dans le discriminant (19) les expressions des racines infiniment petites, expressions qu'il suffit en général de limiter à leurs premiers termes, on verra quelle est la puissance de α qui se trouve en facteur.

Faisons d'abord une application de cette règle à la démonstration d'un théorème de Joachimsthal sur le discriminant. Supposons que l'on ait

$$a_n = A\alpha^2, \quad a_{n-1} = B\alpha.$$

Alors, pour $\alpha = 0$, deux racines deviennent nulles, et, pour α très petit, ces racines sont fournies par l'équation

$$A\alpha^2 + B\alpha x + a_{n-2}x^2 = 0,$$

qui donne

$$x = k\alpha, \quad x_1 = k'\alpha, \quad x - x_1 = (k - k')\alpha.$$

Donc le discriminant contient α^2 en facteur. Or, si on l'écrit sous la forme

$$M a_n + N,$$

N étant formé des termes qui ne contiennent pas a_n, N devra être divisible par α^2, et par conséquent contenir a^2_{n-1} en facteur. Donc le discriminant est de la forme [1]

$$M a_n + M_1 a^2_{n-1}. \tag{20}$$

Dans le cas où l'équation proposée aurait une racine multiple x_1 différente de zéro, on serait ramené au cas précédent par la substitution $x = x_1 + x'$.

Faisons l'application de la méthode précédente à l'étude de la question proposée. Le degré des facteurs Q_i résulte immédiatement du théorème de Joachimsthal. Cherchons le degré du facteur M, qui est la résultante des trois équations

$$A = \varphi\psi' - \psi\varphi' = 0,$$
$$C = f\varphi' - \varphi f' = 0,$$
$$B = \psi f' - f\psi' = 0.$$

Si, pour une valeur de λ, que nous pouvons supposer égale à zéro, on a

$$A = 0,$$

---

[1] Si l'on suppose que les termes

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$$

soient en α des degrés

$$p, p-1, p-2, \ldots,$$

on arrive à cette proposition plus générale :

Si l'on considère, dans une équation, les p derniers termes comme étant des ordres p, p − 1, p − 2, ..., et les autres de l'ordre 0, tous les termes du discriminant sont au moins de l'ordre p (p − 1).

en vertu de l'identité

$$fA + \varphi B + \psi C = 0,$$

on aura

$$\varphi_0 B_0 + \psi_0 C_0 = 0,$$

B_0, C_0, φ_0, ψ_0 désignant les termes constants des fonctions correspondantes. B_0, C_0 auront donc un facteur commun, que j'appelle α, et qui sera un facteur simple de la résultante. L'équation (10) en λ étant

$$A^2 = 4BC,$$

on voit que son terme constant contiendra α^2 en facteur, et le coefficient précédent α. Donc le discriminant sera seulement divisible par α^2; et comme α est un facteur simple de M, le discriminant, qui contient α au carré, doit aussi contenir le carré de la résultante M en facteur.

Nous allons faire l'application des résultats analytiques qui précèdent à deux problèmes de géométrie.

II.

Le problème des normales menées d'un point à la cyclide est compris comme cas particulier dans celui que nous venons d'examiner. Il suffit de supposer que les deux sphères m_i, m'_i soient concentriques. Alors toutes les sphères $m_i + km'_i$ auront même centre que les deux premières, et la recherche de celles qui sont tangentes à la cyclide revient à la détermination des normales menées de leur centre commun à la surface. On peut encore procéder comme il suit.

Soient x_i les coordonnées du point M d'où l'on veut mener des normales, et prenons

$$(21) \qquad m_i = x_i, \quad m'_i = \frac{1}{R_i}.$$

Alors les sphères $m_i + km'_i$ auront pour centre le point M. Les fonctions f, φ, ψ auront ici pour expressions

$$(22)\qquad \begin{cases} \varphi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{x_i^2}{\lambda + A_i}, \\ f(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{\dfrac{x_i}{R_i}}{\lambda + A}, \\ \psi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \dfrac{\dfrac{1}{R_i^2}}{\lambda + A_i}, \end{cases}$$

et $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ seront du 3e degré seulement. L'équation (10),

$$(23)\qquad (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = (f\psi' - \psi f')(f'\varphi - \varphi' f)$$

demeurera du 12e degré. Si l'on y considère λ comme fixe et les x_i comme variables, elle représente la surface du 4e ordre à conique double, étudiée dans la Note précédente, lieu des centres des sphères de même rapport anharmonique, tangentes à la cyclide.

La conique double de cette surface est définie par les équations

$$(23)\qquad \frac{f}{f'} = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\psi}{\psi'}.$$

Nous allons maintenant indiquer la signification géométrique des différents facteurs du discriminant.

Les Q_i, égalés à zéro, représentent les cinq surfaces déférentes de la cyclide.

En effet, pour chaque point M d'une déférente, on peut mener deux normales correspondantes à une même valeur de λ, et dont les pieds sont les points de contact de la sphère de centre M doublement tangente à la surface. L'équation en λ a donc une racine double.

Σ', égalé à zéro, représente l'enveloppe des quadriques homofocales aux cinq déférentes. Pour tout point M de (Σ), deux normales à la cyclide viennent se confondre avec la génératrice rectiligne de (Σ) passant en M, et qui, considérée comme normale, a son pied sur le centre de l'infini.

G, égalé à zéro, représente la surface des centres de cour-

bure. D'après les remarques que nous avons faites, G est du 24e ordre par rapport aux binômes

$$\frac{x_i}{R_j} - \frac{x_j}{R_i} = \frac{S_i - S_j}{R_i R_j},$$

qui sont des fonctions du premier degré des coordonnées ordinaires du point. Donc

La surface des centres de courbure est du 24e ordre.

Enfin, le facteur M, qui est la résultante des équations

$$(24) \qquad \begin{cases} f\varphi' - \varphi f' = 0, \\ f\psi' - \psi f' = 0, \\ \varphi\psi' - \psi\varphi' = 0, \end{cases}$$

se décompose ici de la manière suivante.

Les fonctions φ et ψ sont du 3e degré. Si donc on a

$$\sum \frac{x_i}{R_i} = 0,$$

les trois premiers membres des équations (24) se réduisent au 4e degré, et l'équation (23) en λ s'abaissera du 12e au 8e degré. Elle aura quatre racines infinies. Donc le facteur

$$\sum \frac{x_i}{R_i}$$

doit figurer dans le discriminant, et, en appliquant la méthode générale déjà indiquée, on trouve qu'il y est à la puissance sixième. On a donc ici

$$M = \left(\sum \frac{x_i}{R_i}\right)^6 N,$$

et $N = 0$ représente le lieu des coniques doubles de toutes les surfaces représentées par l'équation (23), quand on y fait varier λ.

Nous connaissons maintenant les différents lieux que doit occuper le point M pour que l'équation en λ, qui détermine les normales menées de ce point, acquière une racine double.

Nos équations générales s'appliquent aussi à la discussion

des plans tangents menés par une droite à la surface, et dans ce cas nos différents facteurs du discriminant (18) reçoivent de nouvelles interprétations géométriques.

Supposons ici que les m_i, m'_i soient les coordonnées de deux plans; alors les $m_i + km'_i$ seront les coordonnées d'un plan passant par l'intersection des deux premiers, et les calculs que nous avons faits donnent la solution du problème suivant : Mener à la cyclide un plan tangent par une droite donnée (m_i, m'_i). Voyons dans quels cas l'équation en λ aura ici une racine double.

$G = 0$ exprime que la droite est tangente à la développable formée par les plans ayant un contact stationnaire avec la cyclide. Cette développable est donc de la 24e classe.

$Q_i = 0$ exprime que la droite est tangente du cône enveloppe des plans tangents doubles passant par le centre de la sphère (S_i).

$\Sigma = 0$ est la condition de contact d'une droite et de la cyclide.

L'interprétation de l'équation

$$M = 0$$

est un peu moins simple.

Quand une droite satisfera à cette équation, on pourra mener par elle deux plans tangents de même rapport anharmonique à la cyclide; elle sera donc une tangente double de l'une des développables définies à la fin de la Note précédente, qui sont les enveloppes des plans tangents de la cyclide, ayant même rapport anharmonique (1).

---

(1) Il ne sera pas inutile de lever ici une objection qu'on pourrait adresser à notre méthode. Quand la droite rencontre une des seize droites δ de la cyclide, le plan mené par les deux droites est un plan tangent double, d'une espèce particulière, et il doit être compté pour deux. Mais comme ce plan tangent double n'a pas le même rapport anharmonique pour ses deux points de contact, il sera donné par deux racines différentes de notre équation en λ. Voilà pourquoi nous ne le trouvons pas en exprimant que l'équation en λ a deux racines égales.

On voit par ces exemples que le problème général d'élimination résolu au commencement de cette Note conduit à un grand nombre de conséquences géométriques. Il donne la surface des centres ou la développée de la cyclide, la condition de contact d'une droite et de la surface, la développable formée par les plans tangents stationnaires, etc. Les méthodes que nous avons suivies nous paraissent d'ailleurs applicables à toute équation

$$\Phi(\lambda, k) = 0,$$

qui serait d'un degré quelconque en k, au lieu d'être du second degré, comme dans l'exemple que nous avons traité, ou du premier degré, comme dans le problème des normales aux quadriques.

III.

Proposons-nous maintenant de rechercher le nombre des normales à la cyclide contenues dans un plan quelconque. Il est clair que cette question est comprise dans la suivante :

En combien de points une sphère est-elle normale à la cyclide?

Soit une sphère (m_i). Les conditions pour qu'elle soit normale au point (x_i) sont les suivantes (Note XI),

$$\sum m_i A_i x_i = 0, \quad \sum m_i x_i = 0. \tag{25}$$

Ces deux équations représentent un cercle qui coupe la cyclide aux points cherchés. Donc *toute sphère est normale en quatre points*. Si elle se réduit à un plan, celui-ci sera normal en quatre points, et par conséquent contiendra quatre normales de la cyclide. La géométrie conduit au même résultat.

Nous allons, en terminant, déterminer la classe de la surface des centres de courbure. A cet effet, étant donnée la sphère (m_i), cherchons la condition pour qu'elle soit normale en deux points consécutifs. S'il en est ainsi, il est clair qu'elle coupera la cyclide tangentiellement à une ligne de courbure.

Pour que la condition précédente soit remplie, il faudra que

le cercle défini par les équations (25) soit tangent à la cyclide, et par conséquent qu'une sphère

$$\sum m_i(A_i+\beta)X_i=0\,,$$

passant par ce cercle soit tangente à la cyclide en un point (x_i) du cercle. On devra donc avoir, en identifiant l'équation précédente à celle d'une sphère tangente au point (x_i),

$$(A_i+\beta)m_i=x_i(A_i+\lambda)\,.$$

Exprimons que le point (x_i) se trouve à la fois sur le cercle et sur la cyclide; nous obtiendrons les équations suivantes,

$$(26)\qquad \begin{cases} \sum m_i^2(A_i+\beta)=0\,,\\ \sum \dfrac{m_i^2(A_i+\beta)}{A_i+\lambda}=0\,,\\ \sum \dfrac{m_i^2(A_i+\beta)}{(A_i+\lambda)^2}=0\,. \end{cases}$$

La première détermine β. Éliminer λ entre les deux autres, c'est exprimer que la seconde a une racine double. Or, cette seconde équation n'est que du 3e degré en λ, en vertu de la première. On sera donc conduit, en égalant son discriminant à zéro, à une relation

$$(27)\qquad \Phi(m_i)=0\,,$$

du 4e ordre par rapport aux coefficients de cette équation, c'est-à-dire, en remplaçant β par sa valeur, du 16e ordre par rapport aux m_i.

Les plans satisfaisant à l'équation précédente sont évidemment les plans normaux principaux de la cyclide, et ils enveloppent la surface des centres. *Celle-ci est donc de la seizième classe.*

Cherchons, par exemple, les plans tangents à la surface des centres et passant par un des pôles principaux, le centre de (S_1) par exemple. Pour ces plans on aura

$$m_1=0\,;$$

a seconde des équations (26) devient

$$(A_1+\lambda)\sum\frac{m_i^2(A_i+\beta)}{A_i+\lambda}=0\,.$$

Si l'on prend $\lambda=-A_1$, on est conduit à un cône de la quatrième classe à compter deux fois.

Si l'on choisit le second facteur,

$$\sum\frac{m_i^2(A_i+\beta)}{A_i-\lambda}=0\,,$$

on a à exprimer que l'équation précédente, du second degré en λ, a une racine double, et l'on trouve ainsi un cône de la huitième classe. Les propriétés et la génération de ces deux cônes peuvent être trouvées par la géométrie.

Note XIII.

Sur les cyclides homofocales et orthogonales et sur leur surface des centres de courbure.

I.

Nous avons vu dans le texte (art. 47) que l'équation

$$\sum \frac{x_i^2}{\alpha - a_i} = 0 , \tag{1}$$

où

$$\sum x_i^2 = 0 ,$$

représente, quand on fait varier α, un système de cyclides orthogonales. On peut démontrer d'une manière simple que ces cyclides sont homofocales, et indiquer quelques propriétés de la développable qui leur sert d'enveloppe.

Soit, en effet, une sphère

$$\sum m_i x_i = 0 . \tag{2}$$

La condition pour qu'elle soit tangente à la cyclide est que l'équation en μ,

$$\sum \frac{m_i^2}{\frac{1}{a_i - \alpha} - \mu} = 0 , \tag{3}$$

ait une racine double. En posant $\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha}$, l'équation précédente prend la forme

$$\frac{-\sum m_i^2}{\lambda + \alpha} + \sum \frac{m_i^2}{\lambda - a_i} = 0 , \tag{4}$$

et l'on a à exprimer qne cette équation a une racine double.

Si la sphère est de rayon nul, l'équation précédente devient (1)

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda - a_i} = 0 . \tag{5}$$

Le discriminant de cette équation est évidemment indépendant de α. Donc *toutes les sphères de rayon nul ou tous les plans tangents au cercle de l'infini, qui sont tangents à une cyclide, sont aussi tangents à toutes les cyclides orthogonales;* c. q. f. d.

En exprimant que l'équation (5) a une racine double, on trouvera une équation du 8e ordre par rapport aux quantités m_i. Donc, si l'on considère les m_i comme les coordonnées d'un point sphère placé sur la développable focale, on voit que cette surface est du 16e ordre, ce qui est d'accord avec un résultat de l'article 51, relatif à son intersection avec une sphère. Au contraire, si l'on considère les m_i comme les coordonnées d'un plan, qui sera alors un plan tangent de la développable, l'équation étant du 8e ordre, la développable sera de la huitième classe.

Nous savons d'ailleurs que cette surface a cinq lignes doubles du 4e ordre et une ligne octuple, le cercle de l'infini.

II.

Les cyclides orthogonales donnent lieu à un système de coordonnées curvilignes analogue à celui des coordonnées elliptiques, et dont nous avons exposé quelques propriétés (art. 51).

On peut présenter ce système avec une plus grande généralité, et obtenir des résultats nouveaux, en raisonnant de la manière suivante.

Étant donnée une sphère (m_i), l'équation (4) aura, en général, quatre racines distinctes ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3.

(1) L'hypothèse $\lambda = \alpha$ que nous négligeons conduirait aux points de la surface considérés comme sphères de rayon nul.

On peut prendre ces quatre racines pour déterminer la sphère, et alors on aura l'identité

$$(6)\qquad \frac{-\Sigma m_i^2}{\lambda-\alpha}+\sum\frac{m_i^2}{\lambda-a_i}=\frac{M(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)(\lambda-\rho_3)}{(\lambda-\alpha)\varpi(\lambda)},$$

en posant

$$\varpi(\lambda)=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\ldots(\lambda-a_6).$$

M est d'ailleurs un coefficient dont il est inutile de connaître la valeur, et qui multiplie λ^4 après qu'on a chassé les dénominateurs dans le premier membre de l'équation (6).

Faisons, dans cette identité, successivement $\lambda=\alpha$ et $\lambda=a_i$; nous aurons

$$(7)\qquad \sum m_i^2=\frac{M(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)(\alpha-\rho_3)}{-\varpi(\alpha)},$$

$$(8)\qquad m_i^2=\frac{M(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)(a_i-\rho_3)}{(a_i-\alpha)\varpi'(a_i)}.$$

On obtient ainsi les coordonnées m_i de la sphère en fonction des racines ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3.

On voit, à cause des doubles signes qu'on peut donner à m_i, qu'il y a seize sphères correspondantes à un système de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3. Ces seize sphères forment un système anallagmatique par rapport aux cinq sphères (S_i).

Une fois connues les coordonnées m_i, on aura le centre et le rayon de la sphère par les formules (7) et (11) de la Note X.

Si X, Y, Z, T sont les coordonnées cartésiennes homogènes du centre, et R le rayon, ces formules nous donnent

$$(9)\qquad \begin{cases} X=\sum\frac{\alpha_i m_i}{R_i},\quad Y=\sum\frac{\beta_i m_i}{R_i},\quad Z=\sum\frac{\gamma_i m_i}{R_i}, \\ T=\sum\frac{m_i}{R_i},\quad R=\frac{\sqrt{\Sigma m_i^2}}{\sum\frac{m_i}{R_i}}. \end{cases}$$

Cela posé, si la sphère considérée devient tangente à la

cyclide, nous savons que deux racines de l'équation (4) deviennent égales. On aura donc, par exemple,

$$\rho_2 = \rho_3 = u,$$

et par suite les formules (8) deviendront

$$(10)\qquad \begin{cases} \sqrt{\Sigma m_i^2} = (\alpha - u)\sqrt{\dfrac{\mathrm{M}(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)}{-\varpi(\alpha)}}, \\ m_i = (a_i - u)\sqrt{\dfrac{\mathrm{M}(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{(a_i-\alpha)\varpi'(a_i)}}. \end{cases}$$

Lorsque, laissant ρ, ρ_1 constants, on fait varier u, on a une suite de sphères, toutes tangentes au même point de la cyclide, celui qu'on obtient en faisant $u = \alpha$; car, pour cette valeur de u, le rayon devient nul, et la sphère tangente se réduit à son point de contact. On trouve ainsi, pour les coordonnées d'un point de la cyclide,

$$(11)\qquad x_i = \sqrt{\frac{\mathrm{M}(a_i-\alpha)(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)}}.$$

Ce sont les formules du texte (art. 50). ρ et ρ_1 sont donc les coordonnées curvilignes du point de contact de la sphère tangente à la cyclide, telles qu'elles ont été définies à l'article cité.

Si dans les formules (10) on donne à u une valeur constante h, on obtient, en faisant varier ρ, ρ_1, toutes les sphères tangentes à la cyclide et de même rapport anharmonique. Les centres de ces sphères décrivent alors la surface du 4e ordre considérée dans la Note XI.

Si, au lieu de donner à u une valeur constante, on lui donne la valeur ρ ou ρ_1, trois racines de l'équation (4) deviennent égales, et la sphère est osculatrice à la cyclide. Ainsi, les équations

$$(12)\qquad m_i^2 = \frac{\mathrm{M}(a_i-\rho)^2(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)},$$

$$(13)\qquad \sum m_i^2 = \frac{\mathrm{M}(\alpha-\rho)^2(\alpha-\rho_1)}{-\varpi(\alpha)}$$

déterminent toutes les sphères osculatrices, quand on donne à ρ et à ρ_1 toutes les valeurs possibles. Les centres de ces sphères décrivent la développée de la cyclide, et l'on aura par conséquent les expressions en ρ et ρ_1 des coordonnées des points de cette surface, en substituant dans les formules (9) les valeurs de m_i tirées de l'équation (12).

Si les quatre valeurs ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont deux à deux égales, si l'on a, par exemple,

$$\rho_2 = \rho, \quad \rho_3 = \rho_1,$$

les formules deviendront

$$(14) \quad \begin{cases} m_i = \dfrac{\sqrt{M}\,(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}}, \\ \sqrt{\Sigma m_i^2} = \dfrac{\sqrt{M}\,(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)}{\sqrt{-\varpi(\alpha)}}. \end{cases}$$

Mais on sait que, si l'équation en λ relative à deux quadriques a deux racines doubles, ces surfaces se coupent, en général, suivant une droite et une cubique gauche, qui rencontre la droite en deux points distincts. On voit donc que, dans l'hypothèse que nous examinons, la sphère coupera la cyclide suivant une droite et une cubique gauche.

A cause des différentes combinaisons de signes des radicaux dans les formules (14), on voit qu'il y a seize séries de sphères. Ces seize séries correspondent évidemment aux seize droites de la cyclide. On peut d'ailleurs trouver les équations de ces droites.

L'une des sphères aura pour équation

$$(15) \quad \sum x_i \frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0;$$

elle contiendra donc tous les points satisfaisant aux équations

$$(16) \quad \begin{cases} \sum \dfrac{a_i^2 x_i}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0, \quad \sum \dfrac{a_i x_i}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0, \\ \sum \dfrac{x_i}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0, \end{cases}$$

et ces équations représentent, par conséquent, la ligne droite commune à toutes les sphères.

Les quantités m_i étant, dans les formules (14), des fonctions linéaires de $\rho\rho_1$ et de $\rho + \rho_1$, les centres des sphères de chaque série décriront un plan. Ce résultat est évident par la géométrie. Car soit δ une droite de la cyclide, qui rencontre le cercle de l'infini. Toute sphère contenant cette droite aura son centre dans le plan tangent au cercle de l'infini mené par cette droite.

Enfin, si les quatre racines ρ deviennent égales, on a

$$m_i = \frac{\sqrt{\mathrm{M}}\,(a_i - \rho)^2}{\sqrt{\varpi'(a_i)\,(a_i - \alpha)}}. \tag{17}$$

Les sphères correspondantes ont un contact plus intime avec la surface que les sphères osculatrices ordinaires; elles coupent la cyclide suivant une de ses droites δ et suivant une cubique gauche tangente à la droite. Les centres de ces sphères décrivent des coniques (Q), situées dans les seize plans des centres déjà définis, et ces coniques sont évidemment sur la surface des centres de courbure ou développée de la cyclide.

Les seize coniques (Q) correspondent évidemment aux différentes combinaisons de signes dans les formules (17); elles ont donc en commun les points correspondants aux valeurs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 de ρ, qui annulent une des quantités m_i.

Parmi les sphères précédentes, quarante, correspondantes aux valeurs

$$\rho = a_i,$$

coupent la cyclide suivant deux droites et suivant un cercle passant au point de rencontre de ces droites, point qui est un ombilic de la cyclide. La cyclide a donc quarante ombilics et les seize coniques (Q) sont tangentes les unes aux autres aux ombilics. Chaque conique est tangente à cinq autres, et la tangente commune à deux d'entre elles est la normale à la cyclide en un ombilic.

Pour tous les points de ces coniques, trois normales à la surface viennent se confondre en une seule, la tangente à la conique au point considéré. Pour les points de contact de deux coniques, quatre normales viennent confondre leurs pieds à l'ombilic correspondant.

Les propriétés que nous rencontrons ici sont analogues à celles que M. Clebsch a découvertes pour la surface des centres de courbure des quadriques. On peut compléter l'analogie en remarquant que le plan des coniques (Q) est tangent à la développée en tous les points de ces coniques.

En effet, si dans l'équation (10) on permute ρ et α, on aura une sphère tangente à la cyclide (ρ) et normale à la cyclide (α), qu'elle coupe tangentiellement à une ligne de courbure. Ainsi les équations

$$m_i = (a_i - u)\sqrt{\frac{M(a_i-\alpha)(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)(a_i-\rho)}} \tag{18}$$

conviennent à toute sphère normale à la cyclide proposée, et la coupant tangentiellement à une direction principale.

On aura donc le plan normal principal, si l'on dispose de u de telle manière que les formules (18) conviennent à un plan, ce qui donne

$$\sum \frac{m_i}{R_i} = 0 , \tag{19}$$

ou

$$\sum \frac{a_i - u}{R_i}\sqrt{\frac{M(a_i-\alpha)(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)(a_i-\rho)}} = 0 . \tag{20}$$

En tirant de cette équation la valeur de u et la portant dans (18), on aurait les expressions des coordonnées d'un plan tangent à la développée en fonction des paramètres ρ, ρ_1.

Les seize coniques (Q) correspondent à l'hypothèse

$$\rho = \rho_1 ,$$

et alors l'équation (20) donnera pour u une valeur constante. Quant aux équations (18), elles fournissent pour m_i des nom-

bres fixes, et nous montrent ainsi que le plan tangent demeure le même en tous les points des coniques (Q).

Un raisonnement par analogie nous conduirait même à affirmer que ces plans ont, comme dans le cas des quadriques, un contact du deuxième ordre avec la développée.

Du reste, la développée a d'autres lignes multiples, une ligne double et cinq lignes de rebroussement, qui sont les lieux des centres des sphères osculatrices en tous les points des sections de la cyclide par les cinq sphères directrices. Mais nous laisserons au lecteur le soin d'examiner plus complètement ces différentes questions.

Note XIV.

Sur quelques propriétés de géométrie infinitésimales relatives aux cyclides.

On peut utiliser les formules données dans les Notes précédentes, et donner pour différentes surfaces, se rattachant d'une manière directe aux cyclides, l'expression de la distance de deux points infiniment voisins.

Soient

$$\sum A_i x_i^2 = 0 \tag{1}$$

l'équation de la cyclide, et

$$\sum m_i x_i = 0 \tag{2}$$

celle d'une sphère. L'équation

$$\sum m_i x_i = 0$$

a quatre racines, au moyen desquelles nous déterminerons les m_i, et en posant

$$\sum m_i^2 = 1, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \varphi(u) = (u-\rho)(u-\rho_1)(u-\rho_2)(u-\rho_3), \\ f(u) = (u-A_1)\dots(u-A_5), \end{cases} \tag{4}$$

on aura, comme dans la Note précédente,

$$m_i^2 = \frac{\varphi(A_i)}{f'(A_i)}, \tag{5}$$

et l'on démontrera par les procédés connus l'équation

$$\sum dm_i^2 = \sum_k \frac{\varphi'(\rho_k)\, d\rho_k^2}{f(\rho_k)} = \sum \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)\, d\rho^2}{f(\rho)}. \tag{6}$$

En nous reportant à la formule (24) de la Note X, nous voyons que, si x, y, z désignent les coordonnées cartésiennes du centre de la sphère (2) et R le rayon de cette sphère, on obtient ici

$$(7)\qquad dx^2+dy^2+dz^2-d\mathrm{R}^2=\mathrm{R}^2\sum dm_i^2=\mathrm{R}^2\sum\frac{\varphi'(\rho_k)\,d\rho_k^2}{f(\rho_k)}.$$

On a d'ailleurs, d'après la formule (11) de la même Note,

$$(8)\qquad \frac{1}{\mathrm{R}}=\sum\frac{m_i}{\mathrm{R}_i},$$

et l'on déduit de ces équations les conséquences suivantes.

D'abord, si l'on fait

$$\rho_2=\rho_3=u,$$

la sphère devient tangente à la cyclide, et la formule (7) se réduit à la suivante,

$$(9)\qquad \begin{cases} dx^2+dy^2+dz^2=d\mathrm{R}^2+\mathrm{R}^2\dfrac{(\rho-\rho_1)(\rho-u)^2d\rho^2}{f(\rho)} \\ \qquad\qquad +\mathrm{R}^2\dfrac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-u)^2d\rho_1^2}{f(\rho_1)}. \end{cases}$$

C'est l'expression du ds^2 dans un système orthogonal, formé des surfaces parallèles à la cyclide et des développables qui les coupent à angle droit. La variable u sera donnée en fonction de R par l'équation (8), qui est du premier degré en u, puisqu'on a ici

$$(10)\qquad m_i=(u-\mathrm{A}_i)\sqrt{\frac{(\rho-\mathrm{A}_i)(\rho_1-\mathrm{A}_i)}{f'(\mathrm{A}_i)}}.$$

Si l'on suppose R constant, on aura ds^2 pour la surface parallèle à la cyclide,

$$(11)\qquad \frac{ds^2}{\mathrm{R}^2}=(\rho-\rho_1)\left[\frac{(\rho-u)^2d\rho^2}{f(\rho)}-\frac{(\rho_1-u)^2d\rho_1^2}{f(\rho_1)}\right].$$

Si l'on suppose que R croît indéfiniment, $\dfrac{ds^2}{\mathrm{R}^2}$ tendra vers une valeur finie $d\sigma^2$, et la formule

$$(12)\qquad d\sigma^2=(\rho-\rho_1)\left[\frac{(\rho-v)^2d\rho^2}{f(\rho)}-\frac{(\rho_1-v)^2d\rho_1^2}{f(\rho_1)}\right],$$

où v est la limite de u, définie par l'équation

$$0 = \sum \frac{m_i}{R_i},$$

donnera la représentation sphérique de la cyclide. On voit que, v étant une fonction de ρ et de ρ_1, *les lignes qui composent cette représentation ne sont pas isothermes*.

Enfin, si l'on fait

$$u = \rho_1,$$

trois valeurs de ρ devenant égales, la sphère sera osculatrice, et l'on aura

$$(13) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dR^2 + R^2 \frac{(\rho - \rho_1)^2 d\rho^2}{f(\rho)},$$

c'est-à-dire le carré de la distance de deux points infiniment voisins sur la surface des centres de courbure de la cyclide. Cette expression met en évidence le système des lignes géodésiques qui correspondent sur la développée aux lignes de courbure de la proposée.

Note XV.

De différents systèmes de lignes définies par des propriétés différentielles et qu'on peut déterminer sur toutes les cyclides.

Nous avons, dans le cours de cette étude, appris à déterminer plusieurs systèmes de lignes tracées sur les cyclides. On connaît :

1° Leurs lignes de courbure, qui sont algébriques;

2° Leurs lignes de longueur nulle (art. 51). Elles sont définies par cette propriété que leurs tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini. Il résulte de là que l'on saura déterminer sur toute surface du troisième ordre les lignes dont les tangentes vont rencontrer une conique fixe quelconque de cette surface. En effet, on peut toujours transformer par l'homographie une surface cubique en cyclide, une conique déterminée de cette surface devenant le cercle de l'infini, et alors les lignes dont les tangentes allaient rencontrer cette conique se transforment dans les lignes de longueur nulle de la cyclide.

3° On connaît aussi les lignes de courbure de la cyclide, quand on prend pour *absolu,* suivant la définition de M. Cayley (art. 62 et Note V), non plus le cercle de l'infini, mais *une quadrique quelconque inscrite dans la cyclide,* ou, si la cyclide est du troisième ordre, une conique quelconque de cette surface. Ces lignes sont algébriques.

4° On connaît encore, dans les mêmes hypothèses, les lignes de longueur nulle (Note V), c'est-à-dire celles dont les tangentes demeurent aussi tangentes à une quadrique fixe inscrite dans la cyclide.

Nous nous proposons d'intégrer dans cette Note les équations différentielles de différents autres systèmes de lignes.

Soit un point M d'une surface; la sphère normale en ce point à la surface et orthogonale à deux sphères fixes est évidemment déterminée par ces conditions. Elle coupe le plan tangent suivant une droite qu'on peut considérer comme la tangente à une courbe tracée sur la surface. On aura ainsi un système de courbes définies par cette propriété, qu'il y a une sphère qui leur est tangente en chaque point, qui est normale en ce point à la surface, et en outre orthogonale à deux sphères fixes.

La détermination de ces lignes peut se faire sur toute cyclide, au moins si l'on prend pour les sphères fixes deux des sphères directrices.

Soit

$$\sum A_i x_i^2 = 0 , \tag{1}$$

l'équation d'une cyclide; supposons que les sphères tangentes à la courbe doivent être orthogonales à (S_1) et (S_2). Leur équation sera

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 = 0 .$$

Pour que la sphère représentée par cette équation soit normale au point (x_i) de la cyclide, il faut (Note XI) que l'on ait

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 ,$$
$$A_1 m_1 x_1 + A_2 m_2 x_2 + A_3 m_3 x_3 = 0 .$$

Comme la sphère est tangente à la courbe cherchée, on doit avoir

$$m_1 dx_1 + m_2 dx_2 + m_3 dx_3 = 0 .$$

Éliminons m_1 , m_2 , m_3 entre ces équations; nous trouvons l'équation différentielle

$$(A_2 - A_3) \frac{dx_1}{x_1} + (A_3 - A_1) \frac{dx_2}{x_2} + (A_1 - A_2) \frac{dx_3}{x_3} = 0 , \tag{2}$$

ou, en intégrant

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{A_3} \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{A_1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{A_2} = C . \tag{3}$$

Telle est l'équation des lignes cherchées.

Quand la cyclide se réduit à une quadrique, deux des cinq sphères (S_i) sont rejetées à l'infini; les trois autres deviennent les plans principaux. Les courbes précédentes se transforment en deux espèces de courbes sur les quadriques : 1° les lignes de plus grande pente, un des plans principaux étant horizontal; 2° les lignes telles que la normale à ces lignes, située dans le plan tangent à la surface, aille rencontrer un axe de cette surface.

Considérons maintenant les courbes telles qu'il y ait une sphère passant par trois de leurs points consécutifs, ou, ce qui est la même chose, par leur cercle osculateur, normale à la surface et orthogonale à une sphère fixe (S). Ces lignes, comme nous l'allons montrer, ont des propriétés analogues à celles des lignes géodésiques.

En effet, étant donnée la sphère (S), considérons une surface (B'), et soumettons-la au mode de transformation défini par les formules (14) de l'article 44. Alors à (B') correspondra une anallagmatique (Σ) ayant pour sphère directrice (S), et pour déférente la polaire réciproque (B) de (B') par rapport à (S). Cela posé, considérons sur (B') les lignes géodésiques, en prenant pour absolu la sphère (S) (Note V).

Ces lignes géodésiques (g) sont définies par une double propriété. Elles rendent minimum l'arc

$$\int d\sigma \tag{4}$$

mesuré par rapport à (S), et de plus leur plan osculateur est normal au plan tangent de la surface. A ces lignes correspondront sur (Σ) des lignes (g_1), rendant minimum l'intégrale

$$\int \frac{ds}{S}, \tag{5}$$

où S désigne la puissance par rapport à la sphère (S), et qui est la transformée de $\int d\sigma$. De plus, au plan osculateur des lignes (g) correspond la sphère passant par trois points consécutifs des lignes (g_1) et orthogonale à (S). La propriété du

plan osculateur des lignes (g) entraîne donc la suivante pour les lignes (g_1) :

Les lignes définies sur toute surface par la condition qu'une sphère passant par leur cercle osculateur et normale à la surface soit en même temps orthogonale à une sphère fixe (S) *possèdent la propriété de rendre minimum l'intégrale*

$$\int \frac{ds}{S},$$

où ds *désigne la différentielle de l'arc et* S *la puissance par rapport à la sphere* (S).

On peut faire ici une remarque qui nous sera utile. Les lignes qui rendent minimum, entre deux points quelconques de l'espace, l'intégrale précédente sont les cercles orthogonaux à (S). En effet, les lignes qui dans la figure (B) rendent minimum $\int d\sigma$ sont des lignes droites (Note V), et par conséquent elles ont pour transformées dans la figure (Σ) des cercles orthogonaux à (S), qui rendent minimum l'intégrale $\int \frac{ds}{S}$, transformée de $\int d\sigma$.

Comme les cyclides sont les transformées des quadriques, et qu'on sait déterminer les lignes géodésiques de toute quadrique (B), en prenant pour absolu une quadrique quelconque (S), on voit qu'on saura déterminer sur toute cyclide les lignes dont il est ici question. Si la cyclide devient l'inverse d'une quadrique, ces lignes sont les inverses des lignes géodésiques de la quadrique. Ainsi, quand la cyclide dégénère en quadrique, ces lignes deviennent des géodésiques.

On peut aussi déterminer sur les cyclides les lignes pour lesquelles la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface [1].

---

[1] Voir une Note de l'auteur, *Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 732.

Soit

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \alpha} = 0 \tag{6}$$

l'équation d'une cyclide. Celle d'une sphère tangente au point (x_i) sera

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} X_i x_i = 0 , \tag{7}$$

et l'on sait que, si λ reste constant, toutes les sphères tangentes correspondantes ont le même rapport anharmonique. Leurs centres sont sur une surface du quatrième ordre à conique double, qui a été étudiée dans la Note XI.

Exprimons que la sphère (7) contient quatre points consécutifs d'une courbe passant au point (x_i); nous aurons évidemment les équations

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} x_i dx_i = 0 , \tag{8}$$

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} x_i d^2 x_i = 0 , \tag{9}$$

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} x_i d^3 x_i = 0 . \tag{10}$$

La première de ces équations est identiquement vérifiée; car on a

$$\sum x_i dx_i = 0 , \tag{11}$$

$$\sum \frac{x_i dx_i}{a_i - \alpha} = 0 , \tag{12}$$

en vertu de l'équation de la surface et de l'identité qui relie les quantités x_i.

Pour former l'équation différentielle cherchée, il faudrait donc éliminer λ entre les équations (10) et (9). Au lieu de faire cette élimination, considérons λ comme une variable

nouvelle, et différentions (9). En tenant compte de l'équation (10), il restera

$$(13) \qquad -d\lambda \sum \frac{x_i d^2 x_i}{a_i - \alpha} + \sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} dx_i d^2 x_i = 0 ,$$

Le second terme de cette équation est nul en vertu des relations (11), (12) et de leurs différentielles; il reste donc

$$d\lambda = 0 , \quad \lambda = \text{const.} = K .$$

(Le facteur que nous négligeons est compris dans cette solution générale.)

En résumé, il reste à intégrer l'équation, du premier ordre seulement, contenant l'arbitraire K,

$$(14) \qquad \sum \frac{a_i - K}{a_i - \alpha} dx_i^2 = 0 ,$$

les x_i satisfaisant aux équations

$$\sum x_i^2 = 0 , \quad \sum \frac{x_i^2}{a_i - \alpha} = 0 ,$$

En passant aux coordonnées curvilignes des articles 50 et 51, l'équation (14) se transforme aisément dans la suivante,

$$(15) \qquad \frac{(\rho - K) d\rho^2}{f(\rho)} = \frac{(\rho_1 - K) d\rho_1^2}{f(\rho_1)} ,$$

où les variables sont séparées.

Les sphères osculatrices de toutes les courbes correspondantes à la même valeur K de λ sont de même rapport anharmonique. Cela résulte de la signification de λ.

Pour $\lambda = a_i$, elles deviennent les sphères doublement tangentes, orthogonales à (S_i). Nos courbes se réduisent alors aux cercles de la cyclide situés sur ces sphères. Il était évident *a priori* que les cercles devaient être obtenus comme solutions du problème, puisque leur sphère osculatrice en chaque point est indéterminée, et peut être prise tangente à la surface.

L'équation (15) ne s'intègre d'ailleurs algébriquement que

si $K = a_i$; alors elle se réduit à l'équation d'Euler, et donne une des cinq séries de sections circulaires.

Les trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation (15) ont pour équation différentielle

$$\frac{d\rho^2(\rho-\alpha)}{f(\rho)(\rho-K)} = \frac{d\rho_1^2(\rho_1-\alpha)}{f(\rho_1)(\rho_1-K)}. \tag{16}$$

On sait intégrer cette équation, et en particulier trouver les trajectoires orthogonales des sections circulaires des cyclides. On pourrait même déterminer les trajectoires coupant sous un angle fixe quelconque.

Comme cas limite, quand la cyclide se réduira à une sphère, on saura déterminer les trajectoires orthogonales des cercles d'une même série doublement tangents à une courbe cyclique.

Sur les quadriques, la méthode précédente donnera les trajectoires des génératrices rectilignes et des sections circulaires. Ces dernières lignes ont été déterminées par M. Catalan (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 483).

Les méthodes données par M. Liouville et par Jacobi, pour déterminer les lignes géodésiques des quadriques et intégrer les équations abéliennes, ne s'appliquent plus ici; mais elles nous conduisent à des résultats, qui paraissent dignes d'être notés. Voici les principes algébriques employés par les deux géomètres que nous venons de citer.

Soit la formule différentielle

$$d\Theta^2 = C\sum \frac{\varphi'(\rho_k)d\rho_k^2}{f(\rho_k)\varphi(d)}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{17}$$

où $f(u)$ est une fonction quelconque de la seule variable u, et où

$$\varphi(u) = (u-\rho_1)(u-\rho_2)(u-\rho_3).$$

Si l'on se propose de rendre minimum l'intégrale

$$\int d\Theta, \tag{18}$$

en considérant les variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 comme des fonctions de

l'une d'entre elles, ces fonctions satisferont aux équations différentielles

$$(19)\qquad \begin{cases} \sum_k \dfrac{\sqrt{d-\rho_k}\, d\rho_k}{\sqrt{(\alpha-\rho_k)(\beta-\rho_k) f(\rho_k)}} = 0, \quad (k=1,2,3) \\ \sum_k \dfrac{\sqrt{d-\rho_k}\, \rho_k d\rho_k}{\sqrt{(\alpha-\rho_k)(\beta-\rho_k) f(\rho_k)}} = 0, \end{cases}$$

où les variables sont séparées; α et β sont deux constantes arbitraires.

Si l'on a à rendre minimum l'intégrale

$$(20)\qquad \int d\Theta_1,$$

où

$$(21)\qquad d\Theta_1^2 = C\,\frac{(\rho-\rho_1)}{(\rho-K)(\rho_1-K)}\left[\frac{d\rho^2}{f(\rho)} - \frac{d\rho_1^2}{f(\rho_1)}\right],$$

en considérant ρ_1 comme une fonction de ρ, on devra avoir

$$(22)\qquad \frac{d\rho\sqrt{\rho-K}}{\sqrt{f(\rho)(\rho-\alpha)}} = \frac{d\rho_1\sqrt{\rho_1-K}}{\sqrt{f(\rho_1)(\rho_1-\alpha)}}.$$

On emploie d'ordinaire ces résultats, en supposant que, dans le premier, d soit infini, ce qui fait disparaître le facteur $\varphi(d)$ de $d\Theta$, et dans le second K infini, ce qui fait disparaître $(\rho-K)(\rho_1-K)$.

Ces principes ne peuvent évidemment s'appliquer à la détermination des lignes géodésiques des cyclides. L'expression de ds^2, donnée (art. 50),

$$-\frac{4ds^2}{M} = \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}d\rho_2^2,$$

contient un facteur M dont on ne peut faire abstraction. Mais,

en tenant compte de la formule (36) de l'article 50, on voit que l'expression

$$\frac{ds^2}{\sum \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{K-a_i}}$$

est de la forme assignée à $d\theta^2$, $d\theta_1^2$.

On saura donc trouver le minimum de l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\sqrt{A_i\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}}, \tag{23}$$

dans les conditions qui ont été indiquées précédemment, et de là résultent les deux théorèmes suivants :

On sait déterminer les lignes de l'espace rendant minimum l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U}}, \tag{24}$$

où U *est une fonction algébrique entière, du 4e degré au plus, qui égalée à zéro donnerait l'équation d'une cyclide.*

En d'autres termes, *on sait trouver les routes de la lumière dans un milieu pour lequel la vitesse de la lumière en chaque point serait donnée par l'équation* $v^2 = U$, *où* U *est défini comme précédemment.*

U peut se réduire à une fonction quelconque du second degré, ou au carré de la puissance par rapport à une sphère, auquel cas l'intégrale (24) se réduit à celle-ci,

$$\int \frac{ds}{S},$$

que nous avons considérée déjà dans cette Note. Alors les routes de la lumière sont des cercles orthogonaux à la sphère (S), etc.

En appliquant le deuxième principe algébrique, nous aurons le théorème suivant :

On sait déterminer sur toute cyclide les lignes rendant minimum l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U}},$$

où U, *égalé à zéro, fournirait l'équation d'une cyclide quelconque, homofocale à la première.*

Note XVI.

De quelques analogies entre la théorie des cyclides et celle des surfaces du second ordre.

Les formes d'équations que nous avons obtenues pour les cyclides ramènent la théorie de ces surfaces à celle des fonctions quadratiques et homogènes, et les rapprochent ainsi des surfaces du second degré. Aussi peut-on généraliser et étendre aux cyclides plusieurs des propositions connues de la théorie des surfaces du second degré. Nous allons donner ici deux exemples de pareilles généralisations.

I.

On peut d'abord constituer pour les cyclides une théorie analogue à celle des points correspondants d'Ivory sur deux ellipsoïdes homofocaux. Soient, en effet,

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \alpha} = 0 , \tag{1}$$

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \beta} = 0 \tag{2}$$

les équations de deux cyclides homofocales,

Désignons par x_i les coordonnées d'un point M sur la première cyclide. Les quantités y_i, définies par les équations

$$\frac{y_i}{\sqrt{a_i - \beta}} = \frac{x_i}{\sqrt{a_i - \alpha}} , \tag{3}$$

sont évidemment les coordonnées d'un point M′; car elles satisfont à l'identité

$$\sum y_i^2 = 0 ,$$

et ce point M′ est sur la cyclide (β), car on a

$$\sum \frac{y_i^2}{a_i-\beta}=0\,.$$

Nous dirons que les points M et M′ sont correspondants sur les deux cyclides (α) et (β). Deux points correspondants sont à l'intersection des deux cyclides avec une des trajectoires orthogonales de toutes les cyclides homofocales à (α) et à (β).

Cela posé, soient (A, A′), (B, B′) deux couples de points correspondants. Soient x_i, y_i, x'_i, y'_i les coordonnées respectives des points A, A′, B, B′. On aura

$$\frac{x_i}{\sqrt{a_i-\alpha}}=\frac{y_i}{\sqrt{a_i-\beta}}\,,\qquad \frac{x'_i}{\sqrt{a_i-\alpha}}=\frac{y'_i}{\sqrt{a_i-\beta}}\,,$$

et par suite

$$x_i y'_i = x'_i y_i\,,$$

ou

$$\sum x_i y'_i = \sum x'_i y_i\,. \tag{4}$$

Or, d'après la formule (17) de la Note X, on a

$$\overline{AB'}^2=\frac{-2\Sigma x_i y'_i}{\sum\frac{x_i}{R_i}\sum\frac{y'_i}{R_i}}\,,\qquad \overline{BA'}^2=\frac{-2\Sigma x'_i y_i}{\sum\frac{x'_i}{R_i}\sum\frac{y_i}{R_i}}\,.$$

Donc, en tenant compte de la formule (4) et en divisant les équations précédentes membre à membre, on aura une équation de la forme

$$\frac{AB'}{BA'}=\frac{f(A)}{f(B)}\,, \tag{5}$$

où $f(A), f(B)$ désignent des fonctions ne dépendant que des coordonnées des points A et B. Nous aurons de même, en désignant par (C, C′) un troisième couple de points correspondants,

$$\frac{BC'}{CB'}=\frac{f(B)}{f(C)}\,,\quad \frac{CA'}{AC'}=\frac{f(C)}{f(A)}\,,$$

et par suite

$$AB' \cdot BC' \cdot CB' = BA' \cdot CB' \cdot BC' . \tag{6}$$

Telle est la relation qui unit les distances mutuelles de trois couples de points correspondants.

On trouvera dans un travail antérieur de l'auteur (1) les conséquences de cette formule qui conduit aux propriétés métriques focales des cyclides.

II.

On a vu (art. 19) que quatre points situés sur un cercle quelconque d'une cyclique sont les foyers d'une nouvelle cyclide qui contient les foyers de la première (2). On peut étendre ces propriétés à l'espace, et démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. *La courbe d'intersection d'une cyclide et d'une sphère quelconque peut être prise pour la focale d'une nouvelle cyclide passant par une quelconque des focales de la première.*

Plus généralement, *si deux cyclides sont inscrites l'une à l'autre suivant une courbe sphérique, les focales de l'une d'elles sont sur une surface homofocale à l'autre, et toute surface homofocale à la première est inscrite suivant une courbe sphérique à une cyclide homofocale à l'autre.*

Théorème II. *Si deux cyclides sont tangentes en quatre points et se coupent suivant deux courbes sphériques, toute cyclide homofocale à la première coupera suivant deux courbes sphériques distinctes une cyclide homofocale à la seconde. Les focales de chaque surface seront tangentes en quatre points à une des cyclides homofocales à l'autre.*

Ce dernier théorème est une conséquence du premier.

---

(1) *Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales*, p. 44. — (Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat., t. VIII, p. 240.)

(2) Plus généralement, toute cyclique ayant ces quatre points pour foyers touche en quatre points une des cyclides homofocales à la proposée.

Car soient (C), (C′) deux cyclides se coupant suivant des courbes sphériques (g), (g_1). Soit (D) une cyclide auxiliaire, ayant (g) pour focale. D'après le théorème I, il y aura deux cyclides (C_1), (C'_1), homofocales l'une à (C), l'autre à (C′), qui seront inscrites dans (D). Ces deux cyclides, inscrites à une troisième, se couperont par conséquent suivant deux courbes sphériques.

Tout se réduit donc à la démonstration du théorème I.

Soient

$$C = \sum A_i x_i^2 = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une cyclide (C), et

$$S = \sum m_i x_i = 0 \tag{2}$$

celle d'une sphère (S). L'équation

$$C' = C - S^2 = 0 \tag{3}$$

représente une cyclide inscrite à la première en tous les points de la courbe (C, S). Cherchons les focales de cette cyclide.

A cet effet, nous prendrons d'abord une sphère quelconque (S′),

$$S' = \Sigma m_i x_i = 0 \ ; \tag{4}$$

et nous chercherons la condition pour qu'elle soit doublement tangente à la cyclide inscrite (C′). En employant un artifice dont nous avons déjà fait plusieurs fois usage, nous pouvons, de l'équation (4), tirer $x^2 + y^2 + z^2$ en fonction linéaire de x, y, z, et porter cette expression dans les x_i. Alors ces coordonnées se changeront en des fonctions linéaires α_i de x, y, z, et les deux équations

$$\Sigma \alpha_i^2 = 0 \ , \tag{5}$$

$$\Sigma A_i \alpha_i^2 - (\Sigma m_i \alpha_i)^2 = 0 \tag{6}$$

représenteront, la première la sphère sécante (S′), la seconde une quadrique passant par la courbe [(C′), (S′)]. L'équation

$$\Sigma (A_i + \lambda) \alpha_i^2 - (\Sigma m_i \alpha_i)^2 = 0 \tag{7}$$

représentera donc toutes les quadriques passant par cette courbe, et, si l'on veut que la sphère (S') soit doublement tangente à la cyclide (C'), il faudra que, pour une valeur convenable de λ, l'équation (7) représente un système de deux plans.

Or les α_i sont liées par l'équation identique

$$\sum n_i \alpha_i = 0 , \tag{8}$$

qu'on obtient en remplaçant x_i par α_i dans l'équation (4). Cherchons d'abord la condition pour que l'équation (7) représente un cône, c'est-à-dire une quadrique à point double.

Si la quadrique (7) a des points doubles, les coordonnées de ces points satisferont évidemment aux équations

$$(\lambda + A_i)\alpha_i - m_i(\Sigma m_i \alpha_i) = \rho n_i ,$$

qu'on obtient en exprimant que les premiers membres de (7) et de (8) ont leurs dérivées par rapport aux α_i proportionnelles. Posons, pour abréger,

$$P = \Sigma m_i \alpha_i ; \tag{9}$$

on aura

$$(\lambda + A_i)\alpha_i - m_i P = \rho n_i , \tag{10}$$

et par suite, en multipliant ces équations par $\frac{m_i}{A_i + \lambda}$ et les ajoutant.

$$P\left(1 - \sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i}\right) = \rho \sum \frac{m_i n_i}{\lambda + A_i} .$$

Si cette équation détermine le rapport $\frac{P}{\rho}$, les équations (9) détermineront les rapports des quantités α_i, et par conséquent la quadrique pourra bien avoir un seul point double, mais non se réduire à un système de deux plans, qui doit avoir une ligne de points doubles. Il faut donc que l'on ait

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 1 , \tag{11}$$

$$\sum \frac{m_i n_i}{\lambda + A_i} = 0 . \tag{12}$$

En exprimant, de plus, que les quantités α_i satisfont à l'équation de la surface, on aura

$$\sum \frac{n_i^2}{\lambda + A_i} = 0 . \tag{13}$$

Telles sont les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des sphères doublement tangentes. La première (11) fera connaître cinq valeurs de λ. A ces cinq valeurs correspondront les cinq séries de sphères doublement tangentes.

Si ces sphères se réduisent à des points, alors on doit remplacer n_i par les coordonnées x_i de ces points, et l'on obtient le résultat suivant :

L'équation (11) fait connaître cinq valeurs de λ, et les suivantes

$$\sum \frac{m_i x_i}{\lambda + A_i} = 0 , \tag{14}$$

$$\sum \frac{x_i^2}{\lambda + A_i} = 0 \tag{15}$$

représentent, quand on y substitue les cinq valeurs de λ, les cinq focales de la cyclide (C').

Or la seconde des équations peut être écrite ainsi,

$$\sum \frac{x_i^2}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{A_i}} - \lambda \Sigma x_i^2 = 0 ,$$

ou

$$\sum \frac{x_i^2}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{A_i}} = 0 ;$$

elle représente donc une cyclide homofocale à la proposée (C). Ainsi les focales d'une cyclide (C') inscrite à (C) sont sur des surfaces homofocales à (C).

C'est la première partie du théorème qu'il s'agit de démontrer. Avant d'achever la démonstration, nous allons indiquer une proposition qui résulte des calculs précédents.

Les sphères doublement tangentes à (C') sont définies par les équations (11), (12), (13). On peut, au lieu de supposer qu'elles se réduisent à des points, les assujettir à d'autres conditions, chercher, par exemple, celles qui sont simplement tangentes à la proposée (C), et qui enveloppent par conséquent une surface à lignes de courbure circulaires. Désignons par x_i les coordonnées du point de contact de l'une de ces sphères avec la cyclide (C); on aura

$$\sum A_i x_i^3 = 0, \quad \sum x_i^2 = 0, \tag{16}$$

et aussi

$$n_i = (A_i + \mu) x_i, \tag{17}$$

d'après la formule (7) de la Note XI.

En substituant ces valeurs de n_i dans l'équation (13), celle-ci se réduit à

$$(\mu - \lambda)^3 \sum \frac{x_i^3}{\lambda + A_i} = 0.$$

Le premier facteur donne les sphères tangentes à la fois à (C) et à (C') aux points de contact de ces deux cyclides. Écartons ces sphères; il restera

$$\sum \frac{x_i^3}{\lambda + A_i} = 0,$$

d'où résulte la proposition suivante :

Théorème III. *Étant données deux cyclides* (C), (C'), *inscrites l'une à l'autre suivant une courbe sphérique, les focales de* (C') *sont sur cinq cyclides* (C_i), *homofocales à* (C), *et, en outre, les sphères doublement tangentes à* (C') *d'une même série et simplement tangentes à* (C) *touchent cette dernière cyclide suivant une ligne de courbure située à l'intersection de* (C) *et de l'une des surfaces* (C_i).

Cette dernière surface (C_i) est celle qui contient la focale de (C') associée aux sphères doublement tangentes considérées.

Achevons maintenant la démonstration du théorème I. En changeant les notations dans les calculs qui précèdent, nous obtenons le résultat suivant :

Les cyclides ayant pour focale la courbe définie par les équations

$$\sum m_i x_i = 0 , \tag{18}$$

$$\sum B_i x_i^2 = 0 , \tag{19}$$

ont pour équation générale

$$\sum \frac{m_i^2}{B_i+\lambda} \sum \frac{x_i^2}{B_i+\lambda} - \left(\sum \frac{m_i x_i}{B_i+\lambda}\right)^2 = 0 . \tag{20}$$

Cette équation nous montre que la cyclide (C_1), représentée par l'équation précédente et correspondante à la valeur λ, est inscrite à la cyclide (C), représentée par l'équation

$$\sum \frac{x_i^2}{B_i+\lambda} = 0 .$$

Si maintenant on donne à λ la valeur λ', on aura une nouvelle cyclide (C'_1), homofocale à (C_1), inscrite dans une nouvelle cyclide (C')

$$\sum \frac{x_i^2}{B_i+\lambda'} = 0 ,$$

homofocale à (C). Notre premier théorème est donc complètement démontré (1).

---

(1) Si, dans l'équation (20), on fait

$$m_i = \frac{1}{R_i} , \qquad B_i = A_i ,$$

on obtient

$$\sum \frac{1}{R_i^2(\lambda+A_i)} \cdot \sum \frac{x_i^2}{A_i+\lambda} - \left[\sum \frac{x_i}{R_i(\lambda+A_i)}\right]^2 = 0 .$$

Cette équation peut s'écrire

$$\sum \frac{\left(\frac{x_i}{R_j} - \frac{x_j}{R_i}\right)^2}{(\lambda+A_i)(\lambda+A_j)} = 0 .$$

Elle représente donc des quadriques, et ces quadriques sont homofocales.

Le théorème I conduit à un grand nombre de conséquences. On peut signaler les suivantes.

Toutes les cyclides à deux points doubles (réciproques de cônes), inscrites à une cyclide générale (C), ont leurs cercles focaux sur des cyclides homofocales à la proposée (C).

Si une cyclide à deux points doubles (P) a pour focales deux cercles d'une cyclide (C), situés sur une même sphère, toutes les cyclides à deux points doubles, homofocales à (D) et ayant par conséquent les mêmes points doubles, seront inscrites aux cyclides homofocales à (C) (1).

Deux cercles d'une cyclide faisant partie du système le plus général de surfaces homofocales ne viennent se confondre que si la cyclide s'aplatit et vient se réduire à une des cinq sphères directrices. Donc

Toutes les cyclides à quatre points doubles inscrites à une cyclide générale ou passant par une cyclique ont leurs cercles

---

Or, si l'on compare aux équations (16) de la Note XI, on voit que, pour les cinq valeurs $\lambda = A_i$, les surfaces représentées par l'équation précédente deviennent les déférentes de la cyclide

$$\Sigma A_i x_i^2 = 0 .$$

Ces cinq déférentes sont donc homofocales.

On obtient leurs trois focales, qui sont les focales singulières de la cyclide, en donnant à λ les trois valeurs qui satisfont à la condition

$$\sum \frac{1}{R_i^2 (\lambda + A_i)} = 0 .$$

Alors la quadrique s'aplatit indéfiniment, et l'on trouve pour les équations de la focale

$$\sum \frac{x_i}{R_i (A_i + \lambda)} = 0 , \quad \sum \frac{x_i^2}{A_i + \lambda} = 0 .$$

On voit aussi que les surfaces homofocales aux déférentes sont inscrites dans les cyclides homofocales à la proposée. Ce fait sera expliqué et généralisé.

(1) Dans un travail antérieur déjà cité, *Sur les théorèmes d'Ivory*, etc., j'ai déjà donné ce théorème; mais par une inadvertance que je ne puis m'expliquer, j'ai écrit *cyclide à quatre points doubles* dans l'énoncé, au lieu de *cyclide à deux points doubles*.

focaux sur une des sphères contenant les focales. Ces cercles sont doublement tangents à la focale, et leurs points de contact sont des points doubles de la cyclide.

Voici des conséquences d'un autre ordre.

Les quadriques inscrites dans une cyclide ont leurs focales sur une cyclide homofocale à la proposée. Or les seules cyclides contenant des coniques sont les cyclides du troisième ordre. Donc

Les focales de toutes les quadriques inscrites dans une cyclide ou dans les cyclides homofocales engendrent les trois cyclides du troisième ordre homofocales aux proposées.

En particulier, *les focales de toutes les quadriques passant par une cyclide sphérique* (U) *engendrent les trois cyclides du troisième degré ayant* (U) *pour focale.*

On a ainsi, en transformant par l'homographie, un mode de génération des surfaces du troisième ordre, qu'on peut énoncer comme il suit :

Étant données deux quadriques (Q), (R) *et une conique* (H) *sur* (Q), *les lignes doubles des développables circonscrites à* (H) *et aux différentes quadriques passant par l'intersection de* (Q) *et de* (R) *décrivent chacune une surface du troisième ordre contenant la conique* (H).

Si une quadrique contient la focale d'une cyclide, les quadriques homofocales seront inscrites aux cyclides homofocales. Plus généralement,

Soit (Q) *une quadrique inscrite à une cyclide* (C); *les quadriques homofocales à* (Q) *seront inscrites aux cyclides homofocales à* (C).

Ces exemples suffisent à démontrer la portée des théorèmes qui précèdent.

REMARQUES ET RECTIFICATIONS.

Dans l'article 12 du texte se trouve indiquée une classification des différentes formes que peut affecter la courbe d'intersection de deux quadriques. Les résultats que je donne sur cette question ne sont pas nouveaux comme je le pensais, et se trouvent dans le *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* de M. Cremona.

Le théorème donné à l'article 19, et d'après lequel les quatre points d'intersection d'une cyclique et d'un cercle peuvent être pris pour foyers d'une nouvelle cyclique passant par quatre foyers de la première, a déjà été donné par MM. Clifford et Crofton. Voir le Mémoire de M. Crofton, *On various Properties*, etc., dans la liste qui suit. Nous étendons, du reste, ce théorème à la fois pour les courbes et pour les surfaces dans la Note XVI. Ajoutons qu'il est implicitement compris dans celui que nous avons donné (avril et août 1864) relativement aux propriétés métriques des focales des cycliques.

La propriété des coniques sphériques, énoncée et démontrée à l'article 21, se trouve indiquée d'une manière incidente et sans démonstration dans un Mémoire de M. W. Roberts (Journal de Liouville, t. X, page 313 : *Mémoire sur quelques propriétés géométriques, relatives aux intégrales elliptiques*).

Des deux constructions données pour la tangente aux cycliques (art. 24 et 31), la première a été indiquée, au moins pour les cycliques planes, par M. Clifford (voir le Mémoire de M. Crofton cité plus haut). Quant à la seconde, que j'avais donnée depuis longtemps pour les ovales de Descartes (*Annales de l'École Normale*, 1867), elle me paraît nouvelle. Je saisis cette occasion pour en indiquer un énoncé plus précis.

Étant donnés quatre points A, B, C, D, sur un cercle, les tangentes aux deux cyclides passant en M et ayant A, B, C, D pour foyers se déterminent de la manière suivante :

Construisons l'une des deux bissectrices de l'angle des droites

AB, CD, et appelons α, β, γ, δ, V les angles que font avec cette droite les lignes MA, MB, MC, MD et la tangente en M. On aura

$$V = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} + k\,\frac{\pi}{2}.$$

Il est à remarquer que, si deux des foyers A et B deviennent imaginaires, on peut les remplacer sans inconvénient dans la construction par les foyers réels A', B', qui leur sont associés.

Dans les *Comptes Rendus* du 25 juin 1872, M. Ribaucour a donné un théorème intéressant sur les cyclides :

Les plans normaux à une cyclide en tous les points d'une ligne de courbure sont tangents à une quadrique homofocale aux déférentes de la cyclide.

Ce théorème de M. Ribaucour est un cas particulier de celui que nous avons donné (Note XVI, Théorème III).

En supposant, dans notre théorème, que la cyclide inscrite se réduise à une quadrique, l'une des séries de sphères doublement tangentes se réduira aux plans tangents, et l'on obtient ainsi la proposition suivante ;

Soient deux cyclides orthogonales (α), (β), *se coupant suivant une ligne de courbure. Les plans normaux à* (α) *en tous les points de cette ligne de courbure enveloppent une quadrique homofocale à la déférente de* (α), *et inscrite dans* (β) *suivant une courbe sphérique.*

Cette proposition complète un peu l'élégant théorème de M. Ribaucour.

LISTE

de Mémoires se rapportant aux sujets traités dans cet ouvrage et publiés dans ces dernières années.

ABRÉVIATIONS :

Zeitschrift de Schlömilch : *Z. S.*
Proceedings of the London Mathematical Society : *L. M. S.*
Quaterly Journal : *Q. J.*
Journal de Crelle-Borchardt : *J. B.*
Nouvelles Annales de Mathématiques de Gerono : *N. A.*
Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences : *C. R.*
Bulletin de la Société Philomathique de Paris : *S. P.*
Annales de l'École Normale supérieure : *E. N.*
Journal de Liouville : *J. L.*

BERNER (Th.). — Uber eine geometrische Erzeugung von confocalen Curven vierten Grades. *Z. S.*, t. IX, p. 369 ; oct. 1864.

CASEY. — On the Bicircular Quartics. *Transactions of the Royal Irish Academy of Dublin*, 10 février 1867.

— Recherche des équations des couples de quadriques inscrites à une quadrique donnée et tangente à quatre quadriques inscrites aussi dans la même quadrique. *Annali di Matematica*, t. II, 2e série, p. 303 ; 1869.

— On Cyclides and Sphero-Quartics (1). *Philos. Trans.*, t. CLXI, p. 585-721.

CAYLEY. — Sur la construction graphique de la courbe d'ombre et de pénombre pendant la durée d'une éclipse de Soleil. *Monthly Notices of the R. Astr. Soc.*, avril 1870, traduit *N. A.*, 2e série, t. IX, p. 350.

— On the Mechanical Description of a Nodal Bicircular Quartic. *L. M. S.*, t. III, p. 100 ; 12 mai 1870.

— Note on the Cartesian. *Q. J.*; mars 1872.

— On the Cyclide. *Q. J.*; août 1872.

— On the Stereographic Projection of the Spherical Conic. *Phil. Mag.*, XXV, 1863, p. 350.

CLEBSCH. — Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. *J. B.*, t. LXIX, p. 142 ; 1868.

CLIFFORD. — Théorèmes sur les cycliques. *Educational Times*, mars et septembre 1866.

(1) Je ne connais ce Mémoire que par la mention qu'en a faite M. Cayley dans les *Comptes Rendus*, t. LXXIV, p. 1393.

CLIFFORD. — Analytical Metrics. *Q. J.*, t. VII, p. 54; t. VIII, p. 16 et p. 119.

CREMONA. — Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre. *J. B.*, t. LXVIII, p. 1.

— Sulla superficie di quart' ordine dotata di una conica doppia. *Rendiconto del R. Istituto Lombardo*, 2 et 23 mars 1871.

CROFTON (W.). — On certain Properties of the Cartesian Ovals, treated by the Method of Vectorial Coordinates. *L. M. S.*, 19 mars 1866.

— On various Properties of Bicircular Quarties. *L. M. S.*, 28 février et 23 mai 1867.

DARBOUX (G.). — Sur les sections du tore. *N. A.*, 2e série, t. III, p. 156; 1864.

— Sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré. *N. A.*, 2e série, t. III, p. 199; 1864.

— Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales. *C. R.*, p. 240; 1er août 1864.

— Recherches sur les surfaces orthogonales. *E. N.*, t. II, p. 55; janvier 1865.

— Sur les surfaces orthogonales. *E. N.*, t. III, p. 97; 1866.

— Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques. *E. N.*, t. IV, p. 81; 1867.

— Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces. *C. R.*, t LXVIII, p. 1311; 7 juin 1869. Le travail actuel est la reproduction de ce Mémoire.

— Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques. *C. R.*, t. LXIX, p. 392; 1869.

— Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. *C. R.*, t. LXXIII, p. 732; 18 septembre 1871.

— Sur les théorèmes d'Ivory, relatifs aux surfaces homofocales du second degré. *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. VIII, et Paris, Gauthier-Villars; janvier 1872.

— Mémoire sur les surfaces cyclides. *E. N.*, t. I, 2e série, p. 273; 1872.

— Sur la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde et sur les coordonnées elliptiques. *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. III, p. 122; avril 1872.

— Polygones inscrits et circonscrits aux coniques; nouveau système de cordonnées; propriétés des courbes du quatrième ordre. *S. P.*, 25 mai et juin 1872. Voir les nos 1962 et 1972 du journal *l'Institut*.

— Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace. *E. N.*, t. I, 2e série, p. 323; 1872.

DURÈGE. — Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch imaginäre Kreispunkte hindurchgehen. *Z. S.*, t. XIV, p. 368; 1869.

ECKART (F.). — Ueber die Curven dritten Grades, welche durch die zwei unendlich entfernten imaginären Kreispunkte gehen. *Z. S.*, t. X, p. 321; 1865.

GOURNERIE (DE LA). — Mémoire sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace. *Journal de l'École Polytechnique*, cahier 40; 1863.

— Note sur les lignes spiriques. *C. R.*, t. LXVI, p. 283; 1868.

— Sur une involution spéciale du quatrième ordre et son application aux lignes spiriques. *C. R.*, t. LXVI, p. 283; 1868.

— Sur la spirique à centre. *S. P.*, p. 11; 13 mars 1869.

— Mémoire sur les lignes spiriques. *J. L.*, 2e série, t. XIV, p. 9 et 103; 1869. Ce Mémoire contient, page 9, une Notice de travaux à laquelle nous renvoyons le lecteur.

KLEIN (F.). — Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 573.

KUMMER. — Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. *J. B.*, t. LXIV, p. 66, et *Monatsb. d. Berl. Akad.*, juillet 1863.

LAGUERRE. — Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques. *C. R.*, t. LX, p. 70; 1865.

— Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du second degré. *S. P.*, p. 51; 23 mars 1867.

— Sur les applications de la géométrie au calcul intégral. *S. P.*, avril 1867.

— Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques. *S. P.*, p. 17; janvier 1868.

— Sur les Cassiniennes planes et sphériques. *S. P.*, p. 40; mars 1868.

— Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques. *S. P.*, p. 48; mars 1868.

— Sur quelques propriétés des lignes spiriques. *S. P.*, oct. 1869.

— Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace. *S. P.*, p. 95; avril 1870, et *N. A.*, 2e série, t. XI, p. 14, 108, 241; 1872.

— Sur l'emploi des imaginaires en géométrie. *N. A.*, 2e série, t. IX, p. 163 et 241; 1870.

— Recherches géométriques sur la cyclide. *S. P.*, octobre 1871.

— Sur quelques propriétés des courbes algébriques et la détermination des rayons de courbure des sections planes des surfaces anallagmatiques. *S. P.*, 1871.

LEMONNIER. — Étude analytique sur la cyclide. *N. A.*, 2e série, t. IX, p. 514; 1870.

LIE (S.). — Ueber Complexe, insbesondere Linien und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, t. V, p. 145.

MANNHEIM. — Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données. *N. A.*, 1re série, t. XIX, p. 7; 1860.

— Sur les arcs de courbes planes et sphériques, considérées comme enveloppes de cercles. *J. L.*, 2e série, t. VII, p. 121; 1862.

— Sur la construction du centre de courbure des anallagmatiques. *S. P.*, p. 120; 1864.

— Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques. *J. L.*, t. XVI, p. 317; 1871.

MAXWELL (Clerk). — On the Cyclide. *Q. J.*, t. IX, p. 111; 1868. Traduit dans les *N. A.*, t. X, p. 162; 1871.

MOUTARD (Th.). — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. *S. P.*, 14 mai 1864.

— Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre. *S. P.*, 30 juillet 1864. — *N. A.*, 2e série, t. III, p. 536; 1864.

— Sur les lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre. *C. R.*, p. 243; 1er août 1864.

PAINVIN. — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. *N. A.*, 2e série, t. VII, p. 481; 1868.

ROBERTS (S.). — On the Mechanical Description of a Nodal Bicircular Quartic. *L. M. S.*, t. II, p. 133.

— On the Ovals of Descartes. *L. M. S.*, t. III, p. 106; 12 mai 1870.

RIBAUCOUR. — Sur les lignes de courbure. *C. R.*, 10 et 25 juin 1872.

SIEBECK. — Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen. *J. B.*, t. LVII, p. 359, et t. LIX, p. 173; années 1860-61.

SYLVESTER. — Voir *Educational Times*, avril 1867, et *Philosophical Magazine*, 1865-66.

WEYR (Emil.). — Ueber Involutionen höheren Grades. *J. B.*, t. LXXI; 1870.

Octobre 1872.

FIN.

GEOMETRICAL MISCELLANIES,

BY MATTHEW COLLINS, LL. D.

Senior Moderator in Mathematics and Physics, and Bishop Law's Mathematical Prizeman, Trin. Coll. Dublin.

Part II (1).

§ XII.

PROBLEM I. — *Given the diagonals and all the angles of a quadrilateral, to construct it.*

Analysis. — Let ABCD (*fig.* 17) be the required quadrilateral; then, since BD and the angle BCD are given, ∴ by Euclid, Book III, Prop. 21 and 33, the ○BCD is given, and ∴ the given ∧s CBA , CDA will stand on given arcs CE and CF of this given ○; and as the whole ○CEF is given, ∴ the remaining arc EF is given, and so the △CEF is wholly given. Again, as the ∧EAF, opposite the given line EF is given (=∧BAD), ∴ (III, 21) the locus of A is a given circular segment EAF, between which and the vertex C we can inflect the other given diagonal CA, and thus the required quadrilateral ABCD becomes known and constructed from the given data.

Scholium. — This problem will evidently be possible and admit of 2 solutions, when the second given diagonal CA lies

(1) See *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles*, vol. VI, p. 163.

between the greatest and least distances of the point C from the circumference of the complete ○EAF; it will admit of one solution only, when CA is = one of these limiting distances; and it will be impossible and admit of no solution, when CA does not lie between the limits above mentioned.

PROBLEM II. — *Given the 4 sides and area of a quadrilateral, to construct it.*

Analysis. — Let ABCD (*fig.* 18) be the required quadrilateral. $AC^2 - AD^2 + DC^2 + 2AD.DP$, and also $= AB^2 + BC^2 + 2AB.BQ$; $\therefore$ if $AB^2 + BC^2$ be $= AD^2 + DC^2 + 2AD.DE$, and thence DE = the given quantity $(AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2) \div 2AD$, we shall have $AD.EP = AB.BQ$. Let also $AD.CG = AB.CQ = 2\triangle ABC$, and $\therefore$ $AD.PG = 2ABCD$; $\therefore$ PG or EF is given, and by construction $\frac{AD.PE}{AD.CG} = \frac{AB.BQ}{AB.CQ}$, i.e. $\frac{GF}{GC} = \frac{BQ}{CQ}$, and $\therefore$ (VI, 6) $\frac{CF}{CG}$ also $= \frac{FG \text{ or } PE}{BQ}$, $\therefore = \frac{AB}{AD}$, i.e. AD : AB = BC : CF, which is $\therefore$ given; and as the 4 points A,D,E,F are given, and the 2 lines DC and FC, $\therefore$ the point C is easily found by inflecting these 2 given lines from D and F to meet each other in a point C. Then join CA, and on it construct $\triangle ABC$, whose other 2 sides are given, etc.

§ XIII.

1. PROBLEM. — *Find the sum of n terms of the series*

$$\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \ldots.$$

Solution. Here

$$\frac{1.3}{2.4} = \frac{1.3}{2.4}(5-4) = \frac{1.3.5}{2.4} - \frac{1.3}{2},$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6} = \frac{1.3.5}{2.4.6}(7-6) = \frac{1.3.5.7}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4},$$

$$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(9-8) = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6},$$

etc....

$\therefore$ The sum of n terms

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1.3.5 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots 2n} = \frac{3.5.7 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots 2n} - 1 .$$

II. Problem. — *Find the sum of n terms of the series*

$$\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \ldots .$$

Solution. Here

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(4-3) = \frac{2.4}{3} - 2 ,$$

$$\frac{2.4}{3.5} = \frac{2.4}{3.5}(6-5) = \frac{2.4.6}{3.5} - \frac{2.4}{3} ,$$

$$\frac{2.4.6}{3.5.7} = \frac{2.4.6}{3.5.7}(8-7) = \frac{2.4.6.8}{3.5.7} - \frac{2.4.6}{3.5} ,$$

etc....

$\therefore$ The sum of n terms is $= \frac{2.4.6 \ldots (2n+2)}{3.5 \ldots (2n+1)} - 2 .$

III. Problem. — *Find the sum of the series*

$$\frac{2}{5.6} + \frac{2.3}{5.6.7} + \frac{2.3.4}{5.6.7.8} + \ldots .$$

Solution. If S = the required sum, 'tis plain

$$5S = \frac{2}{6} + \frac{2.3}{6.7} + \frac{2.3.4}{6.7.8} + \ldots .$$

But

$$\frac{2}{6} \times (6-3) = 2 - \frac{2.3}{6} ,$$

$$\frac{2.3}{6.7} \times (7-4) = \frac{2.3}{6} - \frac{2.3.4}{6.7} ,$$

$$\frac{2.3.4}{6.7.8} \times (8-5) = \frac{2.3.4}{6.7} - \frac{2.3.4.5}{6.7.8} ,$$

etc....

$$\therefore 5S \times 3 = 2 - \frac{2.3.4.5.6.7 \ldots (n+2)}{6.7.8 \ldots (n+5)} = 2 - \frac{2.3.4\,5}{(n+3)(n+4)(n+5)} ,$$

$\therefore$ The sum of n terms $= \frac{2}{15} - \frac{2.2.2}{(n+3)(n+4)(n+5)}$, and *ad inf.* $= \frac{2}{15}$.

§ XIV.

Given $x^3 = ax^2 + bx + c$, multiply each side by $3ab$ and then add a^3x^3.

$$\therefore (a^3 + 3ab)x^3 = (ax + b)^3, \quad \text{if} \quad b^3 = 3ac;$$

$$\therefore x(a^3 + 3ab)^{\frac{1}{3}} = ax + b, \quad \text{and so} \quad x = \frac{b}{(a^3 + 3ab)^{\frac{1}{3}} - a},$$

when $b^3 = 3ac$.

§ XV.

THEOREM. — *Let* A, A′ *be two points on a diameter of a* ○ *at the same side of its centre* O (fig. 19), *and such that* $OA \times OA' = \text{Rad}^2$, *and* $OA > \text{Rad.} > OA'$, *so that* A *is outside and* A′ *is inside the* ○. *Then if* P *be* ANY *point on the circumference,* PA : PA′ *remains constant and greater than* P′A : P′A′, *when* P′ *is* OUTSIDE *the* ○; *but 'tis less than* P′A : P′A′, *when* P′ *is* INSIDE *the* ○.

Demonstration. — Since $OA \times OA' = OP^2$, $\therefore$ OA : OP = OP : OA′, and as $\angle O$ is common, $\therefore$ by EUCLID VI, 6, $\triangle$s OPA, OPA′ are similar, and so PA : PA′ = OA : OP, and is $\therefore$ constant and plainly = the subduplicate ratio of OA : OA′.

Let A′P′ cut the circumference in P, thro' which draw PQ ‖ to P′A; then as PA > PA′, $\therefore$ 'tis also > PQ, which lies within $\angle APA'$, $\therefore \frac{PA}{PA'} > \frac{PQ}{PA'}$, which latter is $= \frac{P'A}{P'A'}$.

Again let A′P′ meet the circumference in P, and draw P′Q ‖ to PA; then as PA > PA′, $\therefore \angle A'AP = A'QP'$ is acute, and $\therefore$ P′A > P′Q, since it is opposite the obtuse $\angle AQP'$. $\therefore \frac{P'A}{P'A'}$ is $> \frac{P'Q}{P'A'}$, which latter is $= \frac{PA}{PA'}$.

Corollary 1. — Hence when the base AA′ and the ratio $\frac{PA}{PA'}$ of the sides of a triangle PAA′ are given, the locus of the

vertex P is a ○, whose centre O is found by cutting AA′ externally at O in the duplicate ratio of the sides; then the required locus is a ○, whose centre is O and Rad^2 = OA . OA′.

Corollary 2. — Draw PQ (*fig.* 20) perpendicular to QR which bisects AA′ at right angles in R. Then as PA : PA′ is constant, ∴ PA^2 — PA′^{2} : PA^2 or PA′^{2} is constant, i. e. 2PQ × AA′ : PA^2 or PA′^{2} is constant, and ∴ PQ varies as PA^2 or PA′^{2}.

Corollary 3. — Conversely, when the point A′ and the straight line QR are given, and the locus of P required, so that PA′^{2} may = a × the perpendicular PQ, or more generally, so that PA′^{2} ± a.PQ may = a given area $a.b$, the locus of P is the circumference of a ○.

1° When $b = 0$ and ∴ PA′^{2} = a.PQ, draw A′RA perpendicular to QR and bisected by it in R. Then PA^2 — PA′^{2} = 2AA′ × PQ, which has a given ratio to a × PQ (= PA′^{2}). ∴ PA : PA′ is given, and so, by *Cor.* 1, locus of P is a ○.

2° When b is not = 0, let it be = Rr = Rr', and let PQ meet in q and q' lines rq and $r'q'$ ∥ to RQ. Then if PA′^{2} — a.PQ = $a.b$, PA′^{2} is then plainly = a.Pq; but when b negative, 'tis = a.Pq', and ∴ (by 1°) the locus of P is a ○. — But if PA′^{2} + a.PQ = $a.b$, then b is necessarily positive and > PQ, so that A′ then lies between R and r', and PA′^{2} = a(b — PQ) ∴ = a.Pq', and ∴ (by 1°) the locus of P is a ○ as the line $r'q'$ is fixed.

Corollary 4. — It follows from this Theorem and *Corollary* 1 that when the base AA′ of a △APA′ is given and the ratio $\frac{PA}{PA'}$ of its sides is a changeable constant, the various ○s which form the locus of the vertex P have no point or points of intersection, but they are all coaxial, their common radical axis being RQ; for if T be a tangent from any point Q in RQ to one ○ (of the system) whose centre is O and Rad^2 = OA.OA′ = OR^2 — RA′^{2}, then T^2 = QO^2 — Rad^2 = QO^2 — (OR^2 — RA^2) = (QO^2 — OR^2) + RA^2 = QR^2 + RA^2 = QA^2. ∴ The system is coaxial and without intersections, and cut orthogonally by

any ○ passing through A and A′, when Rad² is taken = OR² − RA² (= OA.OA′), O being centre; and if we took Rad² = OR² + RA², the system of ○s then obtained would be plainly coaxial, all intersecting each other upon RQ at distances from R, = ± RA.

§ XVI.

PROBLEM. — *Given two points* A *and* A′, *and* ○C (fig. 21), *to find a point* P *upon its circumference, so that the ratio of* PA : PA′ *may be a maximum.*

Analysis. — If O be taken on AA′ produced such that OA.OA′ may be = OP², CO cuts the ○C in P, it is evident that a ○ whose centre is O and radius is OP will touch ○C in P, and be such (by the foregoing theorem) that PA : PA′ is > P′A : P′A′, P′ being any other point on the circumference of ○C, which circumference is all outside ○O, except the point P alone.

Now as OA.OA′ must = OP², ∴ by Euclid III, 37, ○ about △PAA′ touches CPO in P, and cuts orthogonally ○s C and O, and also cuts CA in a *given* point A″, since points A,C are given, and CA.CA″ = CP², which is given, and thus the ○ described through the three given points A, A′, A″ will cut the given ○C in the required points P and P′.

If CP′ (which touches ○AA′A″ in P′) cut AA′ in O′, the ○ whose centre is O′ and radius = O′P′ will plainly contain the ○C within it except the point P′ alone, and as O′A.O′A′ = O′P′², ∴ by the foregoing theorem $\frac{P'A}{P'A'}$ is $< \frac{PA}{PA'}$, P being any other point of the circumference of ○C; thus the ratio PA : PA′ is a maximum for P and a minimum for P′.

§ XVII.

PROBLEM. — *Given* AOB (fig. 22) *and two points* P, P′, *to draw a line* AP′B *through* P′, *which shall subtend a* GIVEN ∠APB *at the other point* P.

Analysis. — Demit PA′, PQ, PB′ perpendicular on sides of ΔOAB; then $\wedge$A′QB′ = PAA′ + PBB′ = 0 + APA, and is $\therefore$ given; $\therefore$ locus of Q is a segment of a $\bigcirc$ described on the given line A′B′, whose intersection with a $\bigcirc$ on diameter PP′ gives the point Q, and then is the required line PQAB.

Corollary. — If a given $\wedge$APB turns about a given point P within a given $\wedge$AOB, the locus of Q is a $\bigcirc$, PQ being perpendicular to the diagonal AB.

If P were at infinity, or AB required to be $\parallel$ to a given line A′B′ (*fig.* 23), the solution is plainly effected, by describing upon A′B′ a segment of a circle A′QB′ to contain an $\wedge$ = APB, and cutting OP in Q, and then drawing PA and PB $\parallel$ to QA′ and QB′.

Another solution of the same Problem is obtained by drawing P′O′, P′*p* parallel to OB, BP (*fig.* 24), and $\therefore$ O′*p* is $\parallel$ to OP, and *given in position,* and it will cut in *p* a segment of a $\bigcirc$ described upon PP′, containing an $\wedge$P*p*P′ = the supplement of the given $\wedge$APB, etc., etc.

§ XVIII.

A Rule can be easily obtained for finding the remainder *r* of $\frac{N}{p} = q + \frac{r}{p}$, when $p = 73$ or 137, and N = any number containing (or consisting of) a great many figures. Thus $73 \times 137 = 10001 = 10^4 + 1 = P$, $\therefore 10^4 = -1 + P$, $\therefore 10^8 = 1 +$ multiple of *p*, i. e. $= 1 + Mp$, $\therefore (10^4)^3$ or $10^{12} = -1 + Mp$, etc. Hence if $N = a + b.10^4 + c.10^8 + d.10^{12} + \ldots$, the remainder of $\frac{N}{73}$ = the remainder of $\frac{a - b + c - d + \ldots}{73}$.

And similar rules can be easily formed for finding the remainder of $\frac{N}{p}$, where N, as before, = any whole number consisting of a great many (100 or more) figures, and $p = 7$, 11, 13, 211, 241, 2161 or 9091, since $10^{12} + 1 = 7 \times 11 \times 13 \times 211 \times 241 \times 2161 \times 9091$; or *p* may be the product of two or more of these 7 factors.

$$10^5 + 1 = (10 + 1)n = 11 \times 9091,$$
$$10^6 + 1 = (10^2 + 1)n = 101 \times 9901,$$
$$10^7 + 1 = (10 + 1)n = 11 \times 909091,$$

where 9091, 9901 and 909091 ($< 953 \times 954$) are prime numbers.

Since $10^3 = -1 + 101$, $10^4 = 1 + M \times 101$, $10^5 = -1 + M \times 101$, etc., $\therefore$ if $N = a \times b.10^3 + c.10^4 + d.10^5 + \ldots$, then remainder of $\frac{N}{101}$ = remainder of $\frac{a - b + c - d + \ldots}{101}$.

By Fermat's theorem, 17 divides $10^{16} - 1 = (10^8 - 1)(10^8 + 1)$, and 17 does not divide $10^8 - 1$; for if so, the decimal period of $\frac{1}{17}$ would consist of 8 figures only, which is not so; $\therefore$ 17 divides $10^8 + 1$. But 17 could not also divide $10^m + 1$, m being < 16; for if so, 17 should divide $10^8 - 10^m = 10^m(10^{8-m} - 1)$, and $\therefore$ as 17 is prime to 10^m, it should divide $10^{8-m} - 1$, which cannot be; as if $\frac{10^n - 1}{17} = A$, $\therefore \frac{1}{17} = \frac{A}{10^n - 1}$, and so the decimal period of $\frac{1}{17}$ could then consist of n figures only. The other divisors of $10^8 + 1$, if it has any, $\equiv 16m + 1$, by Euler's theorem.

19 divides $10^{18} - 1 = (10^6 - 1)(10^{12} + 10^6 + 1) = (10^3 - 1)(10^{15} + 10^{12} + 10^9 + 10^6 + 10^3 + 1) = (10^9 - 1) \times (10101010101010101)$, and 19 does not divide 99, nor 999, nor 999999, nor 999999999. For if so, the decimal period for $\frac{1}{19}$ would consist of only 2, 3, 6 or 9 figures, which is not. $\therefore$ 19 must divide 1000001000001, and 1000000001, and 1001001001001001, and 10101010101010101.

$10^7 + 2 = 141 \times 70922$. Could any useful result be got from this?

§ XIX.

New Method of approximating rapidly to the Square Root of a given Number N, *with some useful inferences from it.*

1. 'Tis plain that $(N^{\frac{1}{2}}-a)^m$, when expanded by the binomial Theorem, m being a positive integer, and N and a any given numbers, has always the form $AN^{\frac{1}{2}}-B$, since

$$(N^{\frac{1}{2}})^2 = N.N^{\frac{1}{2}}, \quad (N^{\frac{1}{2}})^4 = N^2, \quad (N^{\frac{1}{2}})^6 = N^3.N^{\frac{1}{2}}, \text{ etc.}$$

Now, by one or two trials or guesses, a can be taken so near $N^{\frac{1}{2}}$ that $(N^{\frac{1}{2}}-a)$ shall be a small fraction $f < \frac{1}{2}$ or even $< \frac{1}{10}$ and then $f^m = (N^{\frac{1}{2}}-a)^m = AN^{\frac{1}{2}}-B$ gives $N^{\frac{1}{2}} = \frac{B+f^m}{A}$, $\therefore$ very nearly $= \frac{B}{A}$ or a_m, especially when m is a large integer, whose greatness plainly *increases* A and B, but diminishes f^m and $\frac{f^m}{A}$ which is the deficiency or supplement of a_m. Now f = the supplement of a, $= N^{\frac{1}{2}}-a = \frac{N-a^2}{N^{\frac{1}{2}}+a}$ $\therefore = \frac{N-a^2}{2N^{\frac{1}{2}}}$ very nearly and then the difference or error $N - a_m^2 = N - \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{(AN^{\frac{1}{2}}-B)(AN^{\frac{1}{2}}+B)}{A^2} = \frac{(N^{\frac{1}{2}}-a)^m(N^{\frac{1}{2}}+a)^m}{A^2}$ $\therefore = \frac{(N-a^2)^m}{A^2}$, and thus is $= \frac{1}{A^2}$ when $N = a^2 \pm 1$, so that in this case $\frac{B}{A}$ will be nearer to $N^{\frac{1}{2}}$ than any rational fraction whose denominator is $< A$, and this will be true, whatever odd integer m be.

2. Ex. gr. $m = 3$ gives $N^{\frac{1}{2}} = \frac{(3N+a^2)a+f^3}{N+3a^2}$ exactly $\therefore = \frac{3N+a^2}{N+3a^2}.a + \frac{f^3}{4N}$ very nearly (since $a^2 = N$ nearly)

$$\therefore = \frac{3N+a^2}{N+3a^2}.a, \text{ or } a_3 \text{ nearly (P), ...}$$

as $\frac{f^3}{4N}$ ($= f_3$ = supplement of a_3) must necessarily be very small. Now this plainly agrees with Dr Hutton's elegant formula

$$N^{\frac{1}{2}} = \frac{(n+1)N+(n-1)a^2}{(n-1)N+(n+1)a^2}.a$$

for approximating to $N^{\frac{1}{n}}$, when $n = 2$.

3. But we can approximate to $N^{\frac{1}{2}}$ still more rapidly than by Hutton's Rule : for by taking $m = 5$, we find

$$N^{\frac{1}{2}} = \frac{(5N^2 + 10Na^2 + a^4)a + f^5}{N^2 + 10Na^2 + 5a^4} \text{ exactly}$$

$$\therefore = \frac{5(N + a^2)^2 - (2a^2)^2}{5(N + a^2)^2 - (2N)^2} \cdot a, \text{ or } a_3 \text{ nearly} \ldots (Q)$$

Now this new and elegant formula (Q) approximates to $N^{\frac{1}{2}}$ much more closely than Hutton's formula (P) in the preceding art. 2, since the supplemental term or error here omitted $f_3 = \frac{f^6}{16N^2} = \frac{f^3}{4N} \cdot \frac{f^2}{4N}$ is obviously much less than $f_3 = \frac{f^3}{4N}$, which is the error of a_3 the corrected value of $N^{\frac{1}{2}}$ found by Hutton's Rule. Moreover, since f^3 and f^3 have the same sign as f, $\therefore a, a_3$ and a_5 will be all $> N^{\frac{1}{2}}$ or else all $< N^{\frac{1}{2}}$.

4. Ex. gr., *to find* $\sqrt{3}$. Here $N = 3$, and if we take $a = 2$, our new formula (Q) [art. 3] gives $3^{\frac{1}{2}} = \frac{5 \times 7^2 - 8^2}{5 \times 7^2 - 6^2} \times 2 = \frac{362}{209}$ nearly : and on fact $\left(\frac{362}{209}\right)^2 = 3 + \frac{1}{209^2}$, indicating that $\frac{362}{209}$ is nearer to $\sqrt{3}$, than any rational fraction in its lowest terms whose denominator is < 209.

Aliter : $4\sqrt{3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = \sqrt{48} = 7$ nearly; taking $\therefore N = 48$ and $a = 7$, formula (Q) [art. 3] gives $\sqrt{48}$ or

$$4\sqrt{3} = \frac{5 \times 97^2 - 98^2}{5 \times 97^2 - 96^2} \times 7,$$

or

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{5 \times 97^2 - 98^2}{5 \times 97^2 - 96^2} \times \frac{7}{4} = \frac{262087}{151316},$$

and in fact $\left(\frac{262087}{151316}\right)^2 = 3 + \frac{1}{151316^2}$, indicating that $\frac{262087}{151316}$ is $> \sqrt{3}$, but nearer to it than any properly reduced rational fraction whose denominator is < 151316.

To find $\sqrt{2}$. We have in like manner $5\sqrt{2} = \sqrt{50} = 7$ nearly; taking $\therefore N = 50$ and $a = 7$, formula (Q) gives

$$\sqrt{50} \text{ or } 5\sqrt{2} = \frac{5 \times 99^2 - 98^2}{5 \times 99^2 - 100^2} \times 7$$

and

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{5 \times 99^2 - 98^2}{5 \times 99^2 - 100^2} \times \frac{7}{5} = \frac{275807}{195025},$$

whose square $= 2 - \frac{1}{195025^2}$, so that $\frac{275807}{195025}$ is nearer to $\sqrt{2}$ than any properly reduced rational fraction whose denominator is less than 195025.

To find $\sqrt{5}$. As above, we have $4\sqrt{5} = \sqrt{80} = 9$ nearly; taking $\therefore$ N $= 80$ and $a = 9$, our formula (Q) finds

$$\sqrt{5} = \frac{9}{4} \times \frac{5 \times 161^2 - 162^2}{5 \times 161^2 - 160^2} = \frac{930249}{416020},$$

whose square $= 5 + \frac{1}{416020^2}$.

In like manner, from $3\sqrt{7} = \sqrt{63} = 8$ nearly, we obtain

$$\sqrt{7} = \frac{8}{3} \times \frac{5 \times 127^2 - 128^2}{9 \times 127^2 - 126^2} = \frac{514088}{194307},$$

whose square $= 7 + \frac{1}{194307^2}$, so that $\frac{514088}{194307}$ is nearer to $\sqrt{7}$ than any properly reduced rational fraction, whose denominator is < 194307.

5. As already stated in art. 1, 'tis clear that $(N^{\frac{1}{2}} - a)^m$, when expanded by the binomial theorem, m being an odd integer, and N and a any rational numbers, has always the form $AN^{\frac{1}{2}} - B$, whether a be nearly $= \sqrt{N}$ or not, A and B being rational, and even integral, when N and a are integral: for $AN^{\frac{1}{2}}$ is put for the sum of all the positive terms of the expansion of $(N^{\frac{1}{2}} - a)^m$, each of which terms contains an odd power of $N^{\frac{1}{2}}$ multiplied by an even power of $(-a)$, and $-B$ is put for the sum of all the negative terms of the same expansion, each of which negative terms contains an odd power of $(-a)$ multiplied by an even power of $N^{\frac{1}{2}}$, and is $\therefore$ negative and rational; and then $(N^{\frac{1}{2}} + a)^m$ will obviously be $= AN^{\frac{1}{2}} + B$, and $(N^{\frac{1}{2}} - a)^m (N^{\frac{1}{2}} + a)^m = (AN^{\frac{1}{2}} - B)(AN^{\frac{1}{2}} + B)$, i. e. $(N - a^2)^m = A^2N - B^2$. In this identical equation, change N into $N^2 + D$, and change a into N. $\therefore$ $D^m = A^2(N^2 + D) - B^2$, which indicates that the equation

$$x^2 + D^m = (N^2 + D)y^2$$

is always possible in rational numbers for x and y, when N and D are rational; and 'tis plain that $x = B$ and $y = A$ will be integers, when N and D are so. Now $x = B =$ the sum of the negative terms of $(N^{\frac{1}{2}} - a)^m$,

$$\therefore = ma N^{\frac{m-1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} a^3 N^{\frac{m-3}{2}}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} a^5 N^{\frac{m-5}{2}} + \ldots + \frac{m(m-1)}{2} N a^{m-2} + a^m$$

which, when N is changed into $N^2 + D$ and also a changed into N, becomes

$$x = mN(N^2 + D)^{\frac{m-1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} N^3 (N^2 + D)^{\frac{m-3}{2}}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} N^5 (N^2 + D)^{\frac{m-5}{2}}$$
$$+ \ldots + \frac{m(m-1)}{2} N^{m-2}(N^2 + D) + N^m;$$

and $y = A =$ the coefficient of N^1 in the positive terms of $(N^{\frac{1}{2}} - a)^m$,

$$\therefore = N^{\frac{m-1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 N^{\frac{m-3}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} a^4 N^{\frac{m-5}{2}}$$
$$+ \ldots + m a^{m-1},$$

which, after changing N into $N^2 + D$, and also changing a into N, becomes

$$(N^2 + D)^{\frac{m-1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2} N^2 (N^2 + D)^{\frac{m-3}{2}}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-4)}{2.3.4} N^4 (N^2 + D)^{\frac{m-5}{2}} + \ldots + m N^{m-1}.$$

Ex. gr., when $m = 3$, the solution of $x^3 + D^3 = (N^2 + D) y^3$

$$x = 3N(N^2 + D) + N^3 = N(4N^2 + 3D),$$

and

$$y = N^2 + D + 3N^2 = 4N^2 + D;$$

and in fact

$$N^3(4N^2 + 3D)^2 + D^3 = (N^2 + D)(4N^2 + D)^2$$

When $m = 5$, the solution of $x^5 + D^5 = (N^2 + D) y^5$ is

$$x = 5N(N^2 + D)^2 + 10N^3(N^2 + D) + N^5 = N(16N^4 + 20N^2 D + 5D^2),$$

and

$$y=(N^2+D)^3+10N^2(N^2+D)+5N^4=16N^4+12N^2D+L^2.$$

In fact,

$$N^2(16N^4+20N^2D+5D^2)^2+D^5=(N^2+D)(16N^4+12N^2D+D^2)^2.$$

When $m=7$, the solution of $x^7+D^7=(N^7+D)y^7$ is

$$x=7N(N^2+D)^3+35N^3(N^2+D)^2+21N^5(N^2+D)+N^7$$
$$=N(64N^6+112N^4D+56N^2D^2+7D^3),$$

and

$$y=(N^2+D)^3+21N^2(N^2+D)^2+35N^4(N^2+D)+7N^6$$
$$=64N^6+80N^4D+24N^2D^2+D^3.$$

Lastly, when $m=9$, we find

$$x=N(256N^8+576N^6D+432N^4D^2+120N^2D^3+9D^4),$$

and

$$y=256N^8+448N^6D+240N^4D^2+40N^2D^3+D^4,$$

which values of x and y fulfill the equation $x^9+D^9=(N^9+D)y^9$,

6. *Easy demonstration of Dr Hutton's elegant formula for approximating to* $N^{\frac{1}{n}}$, *with an important remark or estimate of the degree of accuracy attained by means of its use and application.*

Let a be the assumed near value of $N^{\frac{1}{n}}$, whose exact value is $=a+x$, x being <1. Then as N must

$$=(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2+\ldots,$$

$$\therefore x=\frac{N-a^n}{na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}xa^{n-2}+\ldots},$$

and as x is small, $\therefore$ tis nearly $=\frac{N-a^n}{na^{n-1}}$. By substituting this for the 1st power of x in the preceding denominator, we now find, more nearly, because of the smallness of x^2, x^3, ... ,

$$\frac{x}{a}=\frac{2(N-a^n)}{2na^n+(n-1)(N-a^n)}=\frac{2(N-a^n)}{(n-1)N+(n+1)a^n},$$

and thus the corrected root $a+x=a\left(1+\frac{x}{a}\right)$ comes out

$$=a\left(1+\frac{2(N-a^n)}{(n-1)N+(n+1)a^n}\right)=a\times\frac{(n+1)N+(n-1)a^n}{(n-1)N+(n+1)a^n},$$

which is the elegant formula first given by Dr Hutton in 1786.

7. Now to estimate the degree of accuracy attained by each

new application of this elegant formula, let $N = a^n$, so that a is the correct n^{th} root of N, and $a + x$ the guessed or assumed root, whose error is x. Then the rule being applied gives the corrected root

$$= \frac{(n+1)a^n + (n-1)(a+x)^n}{(n-1)a^n + (n+1)(a+x)^n}\left(1+\frac{x}{a}\right)a$$

$$= \frac{(n+1)\left(1+\frac{x}{a}\right) + (n-1)\left(1+\frac{x}{a}\right)^{n+1}}{n-1+(n+1)\left(1+\frac{x}{a}\right)^n} \cdot a$$

$$= a \times \frac{2n + n(n+1)\frac{x}{a} + \frac{(n+1)n(n-1)}{2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{(n+1)n(n-1)^2}{2.3}\frac{x^3}{a^3}}{2n + n(n+1)\frac{x}{a} + \frac{(n+1)n(n-1)}{2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.3}\frac{x^3}{a^3}}$$

$= a\left(1 + \frac{n^2-1}{12}\frac{x^3}{a^3}\right)$ nearly. Now, if the first 2 or 3 figures to the left be correct in $a + x$, then the relative error $\frac{x}{a}$ will be $< \frac{1}{100}$, and $\therefore \frac{x^3}{a^3} < \frac{1}{1000000}$; and as $\frac{n^2-1}{12}$ is in general small when n is not a large integer (tis < 1 when $n = 2$ or 3), $\therefore$ the new corrected root will be true in its first 6 figures (to the left); and if the assumed or guessed root agree with the true root in its first 3 or 4 figures to the left, then its relative error $\frac{x}{a}$ must obviously be $< \frac{1}{1000}$, and $\therefore$ the relative error $\frac{n^2-1}{12}\left(\frac{x}{a}\right)^3$ of the corrected root will be $< \frac{1}{10^9}$, when $n < 10$, so that its first 9 figures (at the left hand side) must be correct. Hence in general each operation or new application of this useful rule trebles the number of correct figures in the assumed root.

8. *On cube roots.*

'Tis plain as before, when m is a positive integer, that $(N^{\frac{1}{3}} - a)^m$ has, when expanded, always the form $AN^{\frac{2}{3}} + BN^{\frac{1}{3}} + C$, since $(N^{\frac{1}{3}})^2 = N^{\frac{2}{3}}$, $(N^{\frac{1}{3}})^3 = N$, $(N^{\frac{1}{3}})^4 = N.N^{\frac{1}{3}}$, $(N^{\frac{1}{3}})^5 = N.N^{\frac{2}{3}}$, etc. Now take a as before so near $N^{\frac{1}{3}}$ that $N^{\frac{1}{3}} - a$ may be a small

fraction $f < \frac{1}{2}$. From the 2 equations

$$f^m = (N^{\frac{1}{3}} - a)^m = AN^{\frac{2}{3}} + BN^{\frac{1}{3}} + C$$

and, for another integer m',

$$f^{m'} = (N^{\frac{1}{3}} - a)^{m'} = A'N^{\frac{2}{3}} + B'N^{\frac{1}{3}} + C',$$

eliminating $N^{\frac{2}{3}}$, we easily find

$$N^{\frac{1}{3}} = \frac{A'C - AC' + Af^{m'} - A'f^m}{AB' - A'B} \text{ exactly},$$

and $= \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}$ very nearly.

Ex. gr., taking $m = 5$ and $m' = 7$, we readily find

$$N^{\frac{1}{3}} = \frac{7N^3 + 105N^2a^3 + 120Na^6 + 11a^9}{N^3 + 60N^2a^3 + 147Na^6 + 35a^9} \cdot a,$$

and so, if $a^3 = N + D$, then

$$N^{\frac{1}{3}} = \frac{3N(9a^3 - 2D)^2 + D^2(6a^3 + 5D)}{3N(18a^3 - D)^2 + 141D^2a^3 - D^3} \cdot 4a$$

nearly. For instance, to find $\sqrt[3]{29}$, taking $a = 3$, and as $N = 29$, $\therefore$ here $D = a^3 - N = -2$, and our last formula gives

$$29^{\frac{1}{3}} = \frac{87(247)^2 + 4(152)}{87(488)^2 + 141 \times 4 \times 27 + 8} \times 12 = 3,0723168,$$

which is correct to its last decimal figure 8.

§ XX.

THEOREM. — *From a given point* O (fig. 25) 3 *straight lines* OA, OB, OC *are drawn to a given straight line* ABC. *Then if the radii of the* ○*s inscribed in the* △*s* OAB, OBC *be given, the rodius of the* ○ *inscribed in* △ OAC *will be known.*

For *if* r be the radius of ○ inscribed in a △ whose base $= c$, its altitude $= c'$ and semiperimeter $= s$, then $cc' = 2\triangle = 2rs$, $\therefore \frac{c}{s} = \frac{2r}{c'}$. Now c' is the common altitude of the 3△s OAB, OBC and OAC, the radii of whose inscribed ○s are r, r' and R; and as in a △

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{s-c}{s} = 1 - \frac{c}{s} \therefore = 1 - \frac{2r}{c'},$$

and as

$$\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}OBA\times\tan\tfrac{1}{2}C\tan\tfrac{1}{2}OBC=\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}C,$$

$\therefore$ we have

$$\left(1-\frac{2r}{c'}\right)\left(1-\frac{2r'}{c'}\right)=1-\frac{2R}{c'},\text{ or }\therefore R=r+r'-\frac{2rr'}{p},$$

where $p=c'$ = the perpendicular distance of the given point O from the given straight line ABC. Now the equation $R=r+r'-\frac{2rr'}{p}$ gives any one of the four quantities R, r, r', p, when the other 3 are known; when $\triangle OAC$ is fixed, OB is then easily found, so that any function of r and r' may be given, as we then have 2 equations to find the 2 unknown quantities r and r'.—Thus OB is easily drawn so that the sum, difference, ratio or rectangle of r and r' be given. If r is required to be $=r'$, the question is solved geometrically as follows :

PROBLEM. — *Given* $\triangle OAC$ (fig. 26), *to draw* OB *so that* $\bigcirc s$ *inscribed in* $\triangle s$ OAB, OBC *may be* $=$ *to each other.*

Analysis. — Let D and E be their centres, and F the given centre of $\bigcirc$ inscribed in $\triangle OAC$; then as the $\bigcirc$s are to be $=$, DE must be parallel to AB; and as $BOD=\frac{1}{2}BOA$, and $BOE=\frac{1}{2}BOC$, $\therefore DOE=\frac{1}{2}$ the given $\wedge$ AOC. Through A draw AO' parallel to DO, meeting FO produced in O'; then $CE : EF = AD : DF$ $\therefore = OO' : OF$; $\therefore$ O'C is parallel to OE, $\therefore$ $AO'C = DOE = \frac{1}{2}AOC$; $\therefore$ a segment of a $\bigcirc$ described upon AC containing an $\wedge = \frac{1}{2}$ AOC will cut the bisector OF (of $\wedge$ AOC) in the point O', and then drawing OD and OE parallel to O'A and O'B, they will meet the bisectors of the $\wedge$s OAC, OCA in D and E. Lastly the required line OB must plainly bisect DE in G, as the perpendiculars on OB from D and E are $=$ to each other. But when $r=r'$. the equation $R=r+r'-\frac{2rr'}{p}$ gives $r\,(p-r)=\frac{1}{2}\,pR$, so that r is the less segment of the line p cut *internally* so that the rectangle under its segments may be $=\frac{1}{2}pR$.

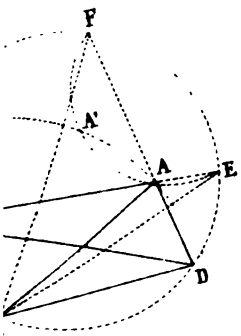


Fig. 18

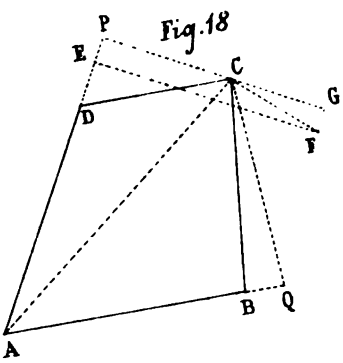


Fig. 20

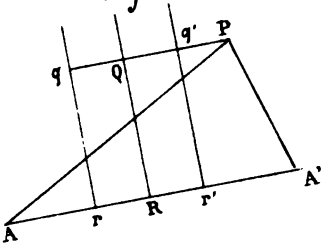


Fig. 19

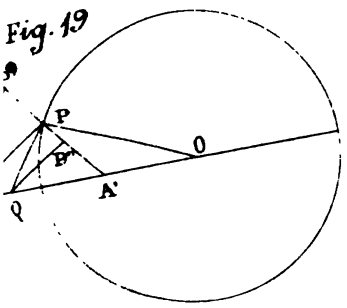


Fig. 22

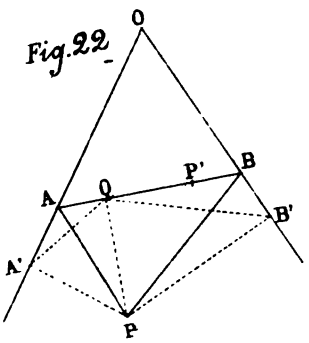


Fig. 23

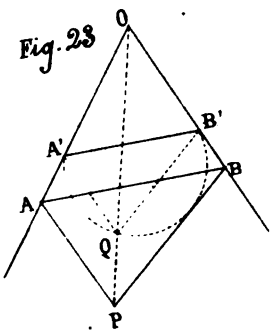


Fig. 21

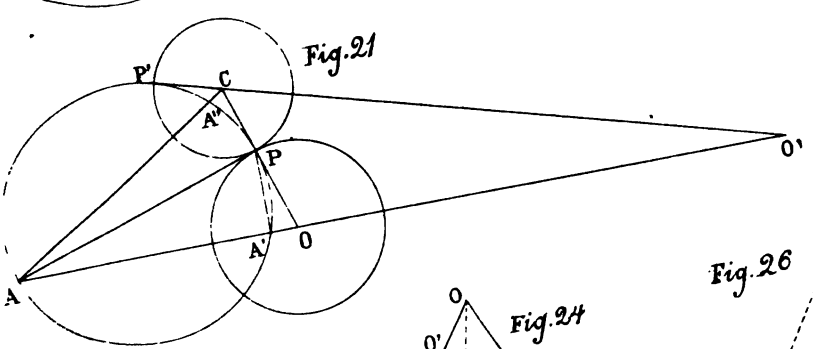


Fig. 24

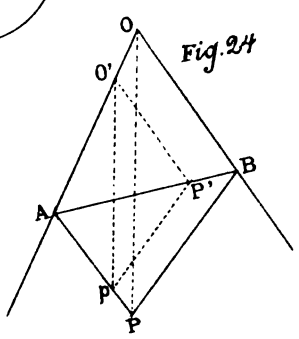


Fig. 26

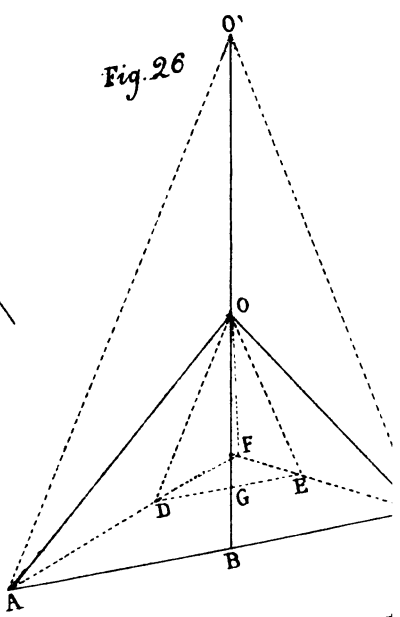
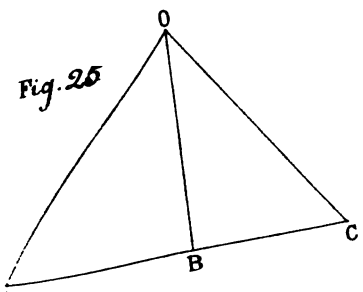


Fig. 25



TABLEAU

DE

TOUS LES EFFETS HARMONIQUES

de une à cinq notes inclusivement

AU NOMBRE DE CINQ CENT SOIXANTE-DEUX

PRÉCÉDÉ D'UNE TABLE SERVANT A TROUVER DE SUITE LA FORMULE DE COMPOSITION DE CHAQUE ACCORD ET SUIVI DE NOTES SUR DIFFÉRENTS POINTS D'HARMONIE

PAR ANATOLE LOQUIN

Le piano est l'instrument mathématique de la musique. BUSSET.

J'ai publié, dans les Procès-verbaux des séances de la *Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (1), un APERÇU SUR LA POSSIBILITÉ D'ÉTABLIR UNE NOTATION REPRÉSENTANT, D'UNE MANIÈRE A LA FOIS EXACTE ET SUFFISAMMENT ABRÉVIATIVE, LES SUCCESSIONS HARMONIQUES.

Dans l'écriture scientifique, inventée et exposée pour la première fois par moi dans ce travail, chaque combinaison harmonique, chaque accord, tronçon, état ou renversement, se trouve exprimé par un nombre distinct. Ainsi, par exemple, l'accord parfait majeur, état un, est représenté par 42; l'accord parfait mineur, état un, par 35; l'accord de septième de dominante, état un, par 190, etc., etc. Inutile de s'appesantir sur la clarté et la simplicité d'un tel système, à la fois langue et notation, et dont les avantages sont d'ailleurs beaucoup plus nombreux qu'on ne serait tenté de le soupçonner au premier abord.

Je fais paraître aujourd'hui le tableau complet de tous les effets harmoniques, en ayant soin de placer en regard le nom-

---

(1) Année 1871, séance du 4 mai.

bre à la fois dénominatif et représentatif de chacun d'eux; c'est le complément indispensable de ma première publication.

Je fais suivre ce Tableau de plusieurs notes, concernant certains points de la science harmonique extrêmement importants, bien qu'ils aient à peine été effleurés jusqu'ici par les théoriciens. J'ose recommander les considérations absolument nouvelles, que j'ai condensées (1) dans ces notes, à l'attention soutenue et aux méditations sérieuses de tous ceux qui, comme moi, cultivent la belle science créée par Rameau.

---

(1) C'est dans le *Grand Traité d'Harmonie ancienne et moderne, basé sur la pratique des compositeurs de toutes les écoles et de tous les temps,* que je prépare depuis de longues années, et qui sera une des œuvres principales de ma vie, que je reviendrai avec détails sur toutes ces questions importantes. Je me borne, dans le présent travail, à les formuler, en courant, et le plus succinctement possible. Je ne veux aujourd'hui que *prendre date,* soin important, soin indispensable, par ce temps de fièvre scientifique où tout le monde cherche, travaille, réfléchit; et où chacun tourne, retourne et interroge chaque fait dans tous les sens, pour essayer d'y découvrir toutes les vérités cachées qu'il peut renfermer.

TABLE servant à trouver, de suite, la formule de composition de chaque accord.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	SI	1
2	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	SI	UT	2
3	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	SI	UT	2e son	3
4	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4
5	MI	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	5
6	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	6
7	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7
8	SOL	9e son	LA	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	8
9	9e son	LA	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9
10	LA	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9e son	10
11	11e son	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11
12	SI	UT	2e son	RÉ	4e son	MI	FA	7e son	SOL	9e son	LA	11e son	12
	1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

Instruction pour l'usage de la Table.

L'usage de cette table est extrêmement simple, et n'exige pas de longues explications. Un seul exemple suffira même pour en donner la clef :

Supposons que nous voulions connaître le nombre qui désigne l'accord de quinte diminuée, état un; nous prenons,

dans la table (1), soit *si, ré, fa,* soit *ré, fa, 9e son,* soit 7e *son, la, ut,* etc. (2), et nous voyons que ces trois notes correspondent aux chiffres 1, 4, 7 (3). Nous laissons de côté 1, base forcée de toutes les combinaisons, et nous cherchons 4.7 à la nomenclature des accords de trois notes; nous trouvons que cette formule de composition est numérotée 34. Ce nombre 34 se trouve donc être, dans notre notation, à la fois le signe et le nom de l'accord de quinte diminuée à l'état un (4), sur quelque degré du Ton qu'il soit d'ailleurs placé.

---

(1) Bien entendu, la note de basse de chaque accord doit *toujours* être prise dans la *première colonne* de la table.

(2) Les notes dépassant une octave doivent toujours être supposées placées dans l'intérieur de cette octave. Exemples : pour l'accord *sol, si, ré, fa, la,* chercher *sol, la, si, ré, fa*; pour l'accord *ut, sol, si, ré, fa,* chercher l'accord *ut, ré, fa, sol, si.*

(3) Afin d'éviter aux harmonistes le recours trop fréquent à la table, nous avons eu soin d'indiquer, à la suite de la formule de composition de chaque accord, les nombres représentatifs de ses renversements.

(4) Il sera également le signe et le nom de tous les accords homophones.

TABLEAU DE TOUS LES EFFETS HARMONIQUES

de une à cinq notes inclusivement.

ACCORD D'UNE NOTE.

[1 : 1.]

État unique.

1 Simple son ou unisson.

ACCORDS DE DEUX NOTES.

[11 : de 2 à 12.]

État un.		Et. deux.	État un.		Et. deux.	État un.		Et. deux.	État un.		Et. deux.
2	2	12	5	5	9	8	8	6	11	11	3
3	3	11	6	6	8	9	9	5	12	12	2
4	4	10	7	7	7	10	10	4			

ACCORDS DE TROIS NOTES.

[55 : de 13 à 67.]

Etat un.		Et deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.
13	2.3	22	67	25	3.6	38	59	37	4.10	55	34
14	2.4	31	65	26	3.7	45	54	38	4.11	59	25
15	2.5	39	62	27	3.8	51	48	39	4.12	62	15
16	2.6	46	58	28	3.9	56	41	40	5.6	19	61
17	2.7	52	53	29	3.10	60	33	41	5.7	28	56
18	2.8	57	47	30	3.11	63	24	42	5.8	36	50
19	2.9	61	40	31	3.12	65	14	43	5.9	43	43
20	2.10	64	32	32	4.5	20	64	44	5.10	49	35
21	2.11	66	23	33	4.6	29	60	45	5.11	54	26
22	2.12	67	13	34	4.7	37	55	46	5.12	58	16
23	3.4	21	66	35	4.8	44	49	47	6.7	18	57
24	3.5	30	63	36	4.9	50	42	48	6.8	27	51

Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.
49	6.9	35	44	56	7.11	41	28	63	9.11	24	30
50	6.10	42	36	57	7.12	47	18	64	9.12	32	20
51	6.11	48	27	58	8.9	16	46	65	10.11	14	31
52	6.12	53	17	59	8.10	25	38	66	10.12	23	21
53	7.8	17	52	60	8.11	33	29	67	11.12	13	22
54	7.9	26	45	61	8.12	40	19				
55	7.10	34	37	62	9.10	15	39				

ACCORDS DE QUATRE NOTES.

[165 : de 68 à 232.]

Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Et. quatre.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Et. quatre.
68	2.3.4	76	112	232	93	2.6.8	187	139	201
69	2.3.5	84	148	229	94	2.6.9	191	167	180
70	2.3.6	91	176	223	95	2.6.10	194	188	152
71	2.3.7	97	197	213	96	2.6.11	196	203	116
72	2.3.8	102	212	198	97	2.6.12	197	213	71
73	2.3.9	106	222	177	98	2.7.8	202	98	202
74	2.3.10	109	228	149	99	2.7.9	206	134	181
75	2.3.11	111	231	113	100	2.7.10	209	162	153
76	2.3.12	112	232	68	101	2.7.11	211	183	117
77	2.4.5	120	110	230	102	2.7.12	212	198	72
78	2.4.6	127	146	224	103	2.8.9	216	92	182
79	2.4.7	133	174	214	104	2.8.10	219	128	154
80	2.4.8	138	195	199	105	2.8.11	221	156	118
81	2.4.9	142	210	178	106	2.8.12	222	177	73
82	2.4.10	145	220	150	107	2.9.10	225	85	155
83	2.4.11	147	226	114	108	2.9.11	227	121	119
84	2.4.12	148	229	69	109	2.9.12	228	149	74
85	2.5.6	155	107	225	110	2.10.11	230	77	120
86	2.5.7	161	143	215	111	2.10.12	231	113	75
87	2.5.8	166	171	200	112	2.11.12	232	68	76
88	2.5.9	170	192	179	113	3.4.5	75	111	231
89	2.5.10	173	207	151	114	3.4.6	83	147	226
90	2.5.11	175	217	115	115	3.4.7	90	175	217
91	2.5.12	176	223	70	116	3.4.8	96	196	203
92	2.6.7	182	103	216	117	3.4.9	101	211	183

TABLEAU DE TOUS LES EFFETS HARMONIQUES

de une à cinq notes inclusivement.

ACCORD D'UNE NOTE.

[1 : 1.]

État unique.

1 Simple son ou unisson.

ACCORDS DE DEUX NOTES.

[11 : de 2 à 12.]

État un.		Et. deux.	État un.		Et. deux.	État un.		Et. deux.	État un.		Et. deux.
2	2	12	5	5	9	8	8	6	11	11	3
3	3	11	6	6	8	9	9	5	12	12	2
4	4	10	7	7	7	10	10	4			

ACCORDS DE TROIS NOTES.

[55 : de 13 à 67.]

Etat un.		Et deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.
13	2.3	22	67	25	3.6	38	59	37	4.10	55	34
14	2.4	31	65	26	3.7	45	54	38	4.11	59	25
15	2.5	39	62	27	3.8	51	48	39	4.12	62	15
16	2.6	46	58	28	3.9	56	41	40	5.6	19	61
17	2.7	52	53	29	3.10	60	33	41	5.7	28	56
18	2.8	57	47	30	3.11	63	24	42	5.8	36	50
19	2.9	61	40	31	3.12	65	14	43	5.9	43	43
20	2.10	64	32	32	4.5	20	64	44	5.10	49	35
21	2.11	66	23	33	4.6	29	60	45	5.11	54	26
22	2.12	67	13	34	4.7	37	55	46	5.12	58	16
23	3.4	21	66	35	4.8	44	49	47	6.7	18	57
24	3.5	30	63	36	4.9	50	42	48	6.8	27	51

Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.
49	6.9	35	44	56	7.11	41	28	63	9.11	24	30
50	6.10	42	36	57	7.12	47	18	64	9.12	32	20
51	6.11	48	27	58	8.9	16	46	65	10.11	14	31
52	6.12	53	17	59	8.10	25	38	66	10.12	23	21
53	7.8	17	52	60	8.11	33	29	67	11.12	13	22
54	7.9	26	45	61	8.12	40	19				
55	7.10	34	37	62	9.10	15	39				

ACCORDS DE QUATRE NOTES.

[165 : de 68 à 232.]

Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Et. quatre.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Et. quatre.
68	2.3.4	76	112	232	93	2.6.8	187	139	201
69	2.3.5	84	148	229	94	2.6.9	191	167	180
70	2.3.6	91	176	223	95	2.6.10	194	188	152
71	2.3.7	97	197	213	96	2.6.11	196	203	116
72	2.3.8	102	212	198	97	2.6.12	197	213	71
73	2.3.9	106	222	177	98	2.7.8	202	98	202
74	2.3.10	109	228	149	99	2.7.9	206	134	181
75	2.3.11	111	231	113	100	2.7.10	209	162	153
76	2.3.12	112	232	68	101	2.7.11	211	183	117
77	2.4.5	120	110	230	102	2.7.12	212	198	72
78	2.4.6	127	146	224	103	2.8.9	216	92	182
79	2.4.7	133	174	214	104	2.8.10	219	128	154
80	2.4.8	138	195	199	105	2.8.11	221	156	118
81	2.4.9	142	210	178	106	2.8.12	222	177	73
82	2.4.10	145	220	150	107	2.9.10	225	85	155
83	2.4.11	147	226	114	108	2.9.11	227	121	119
84	2.4.12	148	229	69	109	2.9.12	228	149	74
85	2.5.6	155	107	225	110	2.10.11	230	77	120
86	2.5.7	161	143	215	111	2.10.12	231	113	75
87	2.5.8	166	171	200	112	2.11.12	232	68	76
88	2.5.9	170	192	179	113	3.4.5	75	111	231
89	2.5.10	173	207	151	114	3.4.6	83	147	226
90	2.5.11	175	217	115	115	3.4.7	90	175	217
91	2.5.12	176	223	70	116	3.4.8	96	196	203
92	2.6.7	182	103	216	117	3.4.9	101	211	183

Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Et. quatre.	Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Et. quatre.
118	3.4.10	105	221	156	156	4.6.7	118	105	221
119	3.4.11	108	227	121	157	4.6.8	125	141	208
120	3.4.12	110	230	77	158	4.6.9	131	169	189
121	3.5.6	119	108	227	159	4.6.10	136	190	163
122	3.5.7	126	144	218	160	4.6.11	140	205	129
123	3.5.8	132	172	204	161	4.6.12	143	215	86
124	3.5.9	137	193	184	162	4.7.8	153	100	209
125	3.5.10	141	208	157	163	4.7.9	159	136	190
126	3.5.11	144	218	122	164	4.7.10	164	164	164
127	3.5.12	146	224	78	165	4.7.11	168	185	130
128	3.6.7	154	104	219	166	4.7.12	171	200	87
129	3.6.8	160	140	205	167	4.8.9	180	94	191
130	3.6.9	165	168	185	168	4.8.10	185	130	165
131	3.6.10	169	189	158	169	4.8.11	189	158	131
132	3.6.11	172	204	123	170	4.8.12	192	179	88
133	3.6.12	174	214	79	171	4.9.10	200	87	166
134	3.7.8	181	99	206	172	4.9.11	204	123	132
135	3.7.9	186	135	186	173	4.9.12	207	151	89
136	3.7.10	190	163	159	174	4.10.11	214	79	133
137	3.7.11	193	184	124	175	4.10.12	217	115	90
138	3.7.12	195	199	80	176	4.11.12	223	70	91
139	3.8.9	201	93	187	177	5.6.7	73	106	222
140	3.8.10	205	129	160	178	5.6.8	81	142	210
141	3.8.11	208	157	125	179	5.6.9	88	170	192
142	3.8.12	210	178	81	180	5.6.10	94	191	167
143	3.9.10	215	86	161	181	5.6.11	99	206	134
144	3.9.11	218	122	126	182	5.6.12	103	216	92
145	3.9.12	220	150	82	183	5.7.8	117	101	211
146	3.10.11	224	78	127	184	5.7.9	124	137	193
147	3.10.12	226	114	83	185	5.7.10	130	165	168
148	3.11.12	229	69	84	186	5.7.11	135	186	135
149	4.5.6	74	109	228	187	5.7.12	139	201	93
150	4.5.7	82	145	220	188	5.8.9	152	95	194
151	4.5.8	89	173	207	189	5.8.10	158	131	169
152	4.5.9	95	194	188	190	5.8.11	163	159	136
153	4.5.10	100	209	162	191	5.8.12	167	180	94
154	4.5.11	104	219	128	192	5.9.10	179	88	170
155	4.5.12	107	225	85	193	5.9.11	184	124	137

Etat un.		Et. deux.	Et. trois.	Et. quatre.	Etat un.		Et deux.	Et. trois.	Et. quatre.
194	5.9.12	188	152	95	214	7.8.10	79	133	174
195	5.10.11	199	80	138	215	7.8.11	86	161	143
196	5.10.12	203	116	96	216	7.8.12	92	182	103
197	5.11.12	213	71	97	217	7.9.10	115	90	175
198	6.7.8	72	102	212	218	7.9.11	122	126	144
199	6.7.9	80	138	195	219	7.9.12	128	154	104
200	6.7.10	87	166	171	220	7.10.11	150	82	145
201	6.7.11	93	187	139	221	7.10.12	156	118	105
202	6.7.12	98	202	98	222	7.11.12	177	73	106
203	6.8.9	116	96	196	223	8.9.10	70	91	176
204	6.8.10	123	132	172	224	8.9.11	78	127	146
205	6.8.11	129	160	140	225	8.9.12	85	155	107
206	6.8.12	134	181	99	226	8.10.11	114	83	147
207	6.9.10	151	89	173	227	8.10.12	121	119	108
208	6.9.11	157	125	141	228	8.11.12	149	74	109
209	6.9.12	162	153	100	229	9.10.11	69	84	148
210	6.10.11	178	81	142	230	9.10.12	77	120	110
211	6.10.12	183	117	101	231	9.11.12	113	75	111
212	6.11.12	198	72	102	232	10.11.12	68	76	112
213	7.8.9	71	97	197					

ACCORDS DE CINQ NOTES.

[330 : de 233 à 562].

Etat un.		Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.	Etat un.		Et 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.
233	2.3.4.5	240	268	352	562	245	2.3.5.10	293	432	544	438
234	2.3.4.6	247	296	436	558	246	2.3.5.11	295	435	554	354
235	2.3.4.7	253	317	492	548	247	2.3.5.12	296	436	558	234
236	2.3.4.8	258	332	527	528	248	2.3.6.7	302	457	343	550
237	2.3.4.9	262	342	547	493	249	2.3.6.8	307	472	427	530
238	2.3.4.10	265	348	557	437	250	2.3.6.9	311	482	483	495
239	2.3.4.11	267	351	561	353	251	2.3.6.10	314	488	518	439
240	2.3.4.12	268	352	562	233	252	2.3.6.11	316	491	538	355
241	2.3.5.6	275	380	349	559	253	2.3.6.12	317	492	548	235
242	2.3.5.7	281	401	433	549	254	2.3.7.8	322	507	333	531
243	2.3.5.8	286	416	489	529	255	2.3.7.9	326	517	417	496
244	2.3.5.9	290	426	524	494	256	2.3.7.10	329	523	473	440

	Etat un.	Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.		Etat un.	Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.
257	2.3.7.11	331	526	508	356	295	2.4.10.12	435	554	354	246
258	2.3.7.12	332	527	528	236	296	2.4.11.12	436	558	234	247
259	2.3.8.9	336	537	318	497	297	2.5.6.7	442	263	345	553
260	2.3.8.10	339	543	402	441	298	2.5.6.8	447	291	429	535
261	2.3.8.11	341	546	458	357	299	2.5.6.9	451	312	485	502
262	2.3.8.12	342	547	493	237	300	2.5.6.10	454	327	520	448
263	2.3.9.10	345	553	297	442	301	2.5.6.11	456	337	540	366
264	2.3.9.11	347	556	381	358	302	2.5.6.12	457	343	550	248
265	2.3.9.12	348	557	437	238	303	2.5.7.8	462	375	335	536
266	2.3.10.11	350	560	269	359	304	2.5.7.9	466	396	419	503
267	2.3.10.12	351	561	353	239	305	2.5.7.10	469	411	475	449
268	2.3.11.12	352	562	233	240	306	2.5.7.11	471	421	510	367
269	2.4.5.6	359	266	350	560	307	2.5.7.12	472	427	530	249
270	2.4.5.7	365	294	434	551	308	2.5.8.9	476	452	320	504
271	2.4.5.8	370	315	490	532	309	2.5.8.10	479	467	404	450
272	2.4.5.9	374	330	525	498	310	2.5.8.11	481	477	460	368
273	2.4.5.10	377	340	545	443	311	2.5.8.12	482	483	495	250
274	2.4.5.11	379	346	555	360	312	2.5.9.10	485	502	299	451
275	2.4.5.12	380	349	559	241	313	2.5.9.11	487	512	383	369
276	2.4.6.7	386	378	344	552	314	2.5.9.12	488	518	439	251
277	2.4.6.8	391	399	428	533	315	2.5.10.11	490	532	271	370
278	2.4.6.9	395	414	484	499	316	2.5.10.12	491	538	355	252
279	2.4.6.10	398	424	519	444	317	2.5.11.12	492	548	235	253
280	2.4.6.11	400	430	539	361	318	2.6.7.8	497	259	336	537
281	2.4.6.12	401	433	549	242	319	2.6.7.9	501	287	420	505
282	2.4.7.8	406	455	334	534	320	2.6.7.10	504	308	476	452
283	2.4.7.9	410	470	418	500	321	2.6.7.11	506	323	511	371
284	2.4.7.10	413	480	474	445	322	2.6.7.12	507	333	531	254
285	2.4.7.11	415	486	509	362	323	2.6.8.9	511	371	321	506
286	2.4.7.12	416	489	529	243	324	2.6.8.10	514	392	405	453
287	2.4.8.9	420	505	319	501	325	2.6.8.11	516	407	461	372
288	2.4.8.10	423	515	403	446	326	2.6.8.12	517	417	496	255
289	2.4.8.11	425	521	459	363	327	2.6.9.10	520	448	300	454
290	2.4.8.12	426	524	494	244	328	2.6.9.11	522	463	384	373
291	2.4.9.10	429	535	298	447	329	2.6.9.12	523	473	440	256
292	2.4.9.11	431	541	382	364	330	2.6.10.11	525	498	272	374
293	2.4.9.12	432	544	438	245	331	2.6.10.12	526	508	356	257
294	2.4.10.11	434	551	270	365	332	2.6.11.12	527	528	236	258

Etat un.		Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.	Etat un.		Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.
333	2.7.8.9	531	254	322	507	371	3.4.8.9	321	506	323	511
334	2.7.8.10	534	282	406	455	372	3.4.8.10	325	516	407	461
335	2.7.8.11	536	303	462	375	373	3.4.8.11	328	522	463	384
336	2.7.8.12	537	318	497	259	374	3.4.8.12	330	525	498	272
337	2.7.9.10	540	366	301	456	375	3.4.9.10	335	536	303	462
338	2.7.9.11	542	387	385	376	376	3.4.9.11	338	542	387	385
339	2.7.9.12	543	402	441	260	377	3.4.9.12	340	545	443	273
340	2.7.10.11	545	443	273	377	378	3.4.10.11	344	552	276	386
341	2.7.10.12	546	458	357	261	379	3.4.10.12	346	555	360	274
342	2.7.11.12	547	493	237	262	380	3.4.11.12	349	559	241	275
343	2.8.9.10	550	248	302	457	381	3.5.6.7	358	264	347	556
344	2.8.9.11	552	276	386	378	382	3.5.6.8	364	292	431	541
345	2.8.9.12	553	297	442	263	383	3.5.6.9	369	313	487	512
346	2.8.10.11	555	360	274	379	384	3.5.6.10	373	328	522	463
347	2.8.10.12	556	381	358	264	385	3.5.6.11	376	338	542	387
348	2.8.11.12	557	437	238	265	386	3.5.6.12	378	344	552	276
349	2.9.10.11	559	241	275	380	387	3.5.7.8	385	376	338	542
350	2.9.10.12	560	269	359	266	388	3.5.7.9	390	397	422	513
351	2.9.11.12	561	353	239	267	389	3.5.7.10	394	412	478	464
352	2.10.11.12	562	233	240	268	390	3.5.7.11	397	422	513	388
353	3.4.5.6	239	267	351	561	391	3.5.7.12	399	428	533	277
354	3.4.5.7	246	295	435	554	392	3.5.8.9	405	453	324	514
355	3.4.5.8	252	316	491	538	393	3.5.8.10	409	468	408	465
356	3.4.5.9	257	331	526	508	394	3.5.8.11	412	478	464	389
357	3.4.5.10	261	341	546	458	395	3.5.8.12	414	484	499	278
358	3.4.5.11	264	347	556	381	396	3.5.9.10	419	503	304	466
359	3.4.5.12	266	350	560	269	397	3.5.9.11	422	513	388	390
360	3.4.6.7	274	379	346	555	398	3.5.9.12	424	519	444	279
361	3.4.6.8	280	400	430	539	399	3.5.10.11	428	533	277	391
362	3.4.6.9	285	415	486	509	400	3.5.10.12	430	539	361	280
363	3.4.6.10	289	425	521	459	401	3.5.11.12	433	549	242	281
364	3.4.6.11	292	431	541	382	402	3.6.7.8	441	260	339	543
365	3.4.6.12	294	434	551	270	403	3.6.7.9	446	288	423	515
366	3.4.7.8	301	456	337	540	404	3.6.7.10	450	309	479	467
367	3.4.7.9	306	471	421	510	405	3.6.7.11	453	324	514	392
368	3.4.7.10	310	481	477	460	406	3.6.7.12	455	334	534	282
369	3.4.7.11	313	487	512	383	407	3.6.8.9	461	372	325	516
370	3.4.7.12	315	490	532	271	408	3.6.8.10	465	393	409	468

Etat un.		Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.	Etat un.		Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.
409	3.6.8.11	468	408	465	393	447	4.5.7.12	291	429	535	298
410	3.6.8.12	470	418	500	283	448	4.5.8.9	300	454	327	520
411	3.6.9.10	475	449	305	469	449	4.5.8.10	305	469	411	475
412	3.6.9.11	478	464	389	394	450	4.5.8.11	309	479	467	404
413	3.6.9.12	480	474	445	284	451	4.5.8.12	312	485	502	299
414	3.6.10.11	484	499	278	395	452	4.5.9.10	320	504	308	476
415	3.6.10.12	486	509	362	285	453	4.5.9.11	324	514	392	405
416	3.6.11.12	489	529	243	286	454	4.5.9.12	327	520	448	300
417	3.7.8.9	496	255	326	517	455	4.5.10.11	334	534	282	406
418	3.7.8.10	500	283	410	470	456	4.5.10.12	337	540	366	301
419	3.7.8.11	503	304	466	396	457	4.5.11.12	343	550	248	302
420	3.7.8.12	505	319	501	287	458	4.6.7.8	357	261	341	546
421	3.7.9.10	510	367	306	471	459	4.6.7.9	363	289	425	521
422	3.7.9.11	513	388	390	397	460	4.6.7.10	368	310	481	477
423	3.7.9.12	515	403	446	288	461	4.6.7.11	372	325	516	407
424	3.7.10.11	519	444	279	398	462	4.6.7.12	375	335	536	303
425	3.7.10.12	521	459	363	289	463	4.6.8.9	384	373	328	522
426	3.7.11.12	524	494	244	290	464	4.6.8.10	389	394	412	478
427	3.8.9.10	530	249	307	472	465	4.6.8.11	393	409	468	408
428	3.8.9.11	533	277	391	399	466	4.6.8.12	396	419	503	304
429	3.8.9.12	535	298	447	291	467	4.6.9.10	404	450	309	479
430	3.8.10.11	539	361	280	400	468	4.6.9.11	408	465	393	409
431	3.8.10.12	541	382	364	292	469	4.6.9.12	411	475	449	305
432	3.8.11.12	544	438	245	293	470	4.6.10.11	418	500	283	410
433	3.9.10.11	549	242	281	401	471	4.6.10.12	421	510	367	306
434	3.9.10.12	551	270	365	294	472	4.6.11.12	427	530	249	307
435	3.9.11.12	554	354	246	295	473	4.7.8.9	440	256	329	523
436	3.10.11.12	558	234	247	296	474	4.7.8.10	445	284	413	480
437	4.5.6.7	238	265	348	557	475	4.7.8.11	449	305	469	411
438	4.5.6.8	245	293	432	544	476	4.7.8.12	452	320	504	308
439	4.5.6.9	251	314	488	518	477	4.7.9.10	460	368	310	481
440	4.5.6.10	256	329	523	473	478	4.7.9.11	464	389	394	412
441	4.5.6.11	260	339	543	402	479	4.7.9.12	467	404	450	309
442	4.5.6.12	263	345	553	297	480	4.7.10.11	474	445	284	413
443	4.5.7.8	273	377	340	545	481	4.7.10.12	477	460	368	310
444	4.5.7.9	279	398	424	519	482	4.7.11.12	483	495	250	311
445	4.5.7.10	284	413	480	474	483	4.8.9.10	495	250	311	482
446	4.5.7.11	288	423	515	403	484	4.8.9.11	499	278	395	414

Etat un.		Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.	Etat un.		Et. 2.	Et. 3.	Et. 4.	Et. 5.
485	4.8.9.12	502	299	451	312	524	5.9.10 11	494	244	290	426
486	4.8.10.11	509	362	285	415	525	5.9.10.12	498	272	374	330
487	4.8.10.12	512	383	369	313	526	5.9.11.12	508	356	257	331
488	4.8.11.12	518	439	251	314	527	5.10.11.12	528	236	258	332
489	4.9.10.11	529	243	286	416	528	6.7.8.9	236	258	332	527
490	4.9.10.12	532	271	370	315	529	6.7.8.10	243	286	416	489
491	4.9.11.12	538	355	252	316	530	6.7.8.11	249	307	472	427
492	4.10.11.12	548	235	253	317	531	6.7.8.12	254	322	507	333
493	5.6.7.8	237	262	342	547	532	6.7.9.10	271	370	315	490
494	5.6.7.9	244	290	426	524	533	6.7.9.11	277	391	399	428
495	5.6.7.10	250	311	482	483	534	6.7.9.12	282	406	455	334
496	5.6.7.11	255	326	517	417	535	6.7.10.11	298	447	291	429
497	5.6.7.12	259	336	537	318	536	6.7.10.12	303	462	375	335
498	5.6.8.9	272	374	330	525	537	6.7.11.12	318	497	259	336
499	5.6.8.10	278	395	414	484	538	6.8.9.10	355	252	316	491
500	5.6.8.11	283	410	470	418	539	6.8.9.11	361	280	400	430
501	5.6.8.12	287	420	505	319	540	6.8.9.12	366	301	456	337
502	5.6.9.10	299	451	312	485	541	6.8.10.11	382	364	292	431
503	5.6.9.11	304	466	396	419	542	6.8.10.12	387	385	376	338
504	5.6.9.12	308	476	452	320	543	6.8.11.12	402	441	260	339
505	5.6.10.11	319	501	287	420	544	6.9.10.11	438	245	293	432
506	5.6.10.12	323	511	371	321	545	6.9.10.12	443	273	377	340
507	5.6.11.12	333	531	254	322	546	6.9.11.12	458	357	261	341
508	5.7.8.9	356	257	331	526	547	6.10.11.12	493	237	262	342
509	5.7.8.10	362	285	415	486	548	7.8.9.10	235	253	317	492
510	5.7.8.11	367	306	471	421	549	7.8.9.11	242	281	401	433
511	5.7.8.12	371	321	506	323	550	7.8.9.12	248	302	457	343
512	5.7.9.10	383	369	313	487	551	7.8.10.11	270	365	294	434
513	5.7.9.11	388	390	397	422	552	7.8.10.12	276	386	378	344
514	5.7.9.12	392	405	453	324	553	7.8.11.12	297	442	263	345
515	5.7.10.11	403	446	288	423	554	7.9.10.11	354	246	295	435
516	5.7.10.12	407	461	372	325	555	7.9.10.12	360	274	379	346
517	5.7.11.12	417	496	255	326	556	7.9.11.12	381	358	264	347
518	5.8.9.10	439	251	314	488	557	7.10.11.12	437	238	265	348
519	5.8.9.11	444	279	398	424	558	8.9.10.11	234	247	296	436
520	5.8.9.12	448	300	454	327	559	8.9.10.12	241	275	380	349
521	5.8.10.11	459	363	289	425	560	8.9.11.12	269	359	266	350
522	5.8.10.12	463	384	373	328	561	8.10.11.12	353	239	267	351
523	5.8.11.12	473	440	256	329	562	9.10.11.12	233	240	268	352

NOTES

SUR DIFFÉRENTS POINTS D'HARMONIE.

—

NOTE I.

L'harmonie, c'est-à-dire la Science d'observation et d'analyse qui a pour objet l'étude raisonnée des procédés employés sans réflexion et presque à leur insu par les compositeurs de musique pour créer leurs œuvres à plusieurs parties, — *la grammaire,* si l'on veut, *des combinaisons et des successions harmoniques,* — est tellement à l'heure qu'il est dans l'enfance, qu'on peut douter, avec raison, qu'elle constitue d'ores et déjà une science à proprement parler, en ce sens qu'elle attend encore les esprits positifs qui doivent formuler ses principes fondamentaux. Le *pourquoi* de l'Art musical, l'explication des procédés inconsciemment mis en usage par nos grands maîtres pour réaliser les étonnantes créations de leur génie, ne sont pas, cependant, à dédaigner!

Nous venons d'analyser les accords à un point de vue qui avait été absolument négligé jusqu'ici : celui de l'*effet* réel que produit chacun d'eux, abstraction faite de tout autre élément. Nous allons maintenant les considérer au point de vue, non moins nouveau, des *dispositions* que peuvent affecter, entre elles, les notes qui les composent.

L'utilité d'une telle étude, si nouvelle pour les musiciens, a besoin avant tout d'être établie et justifiée en peu de mots. Il suffit de rappeler les solennels et sublimes accords plaqués de Gluck, les merveilleux écartements de notes de Beethoven, les splendides septièmes dilatées de Weber, les éclatants entrecroisements, les entrelacements de sons, si heureux, de Rossini, — qui n'ont rien de commun avec les trois lourdes et éternelles « positions » des auteurs de traités d'harmonie, — pour donner une idée de l'importance extrême qu'il y aurait à posséder des formules, claires et compréhensibles, pour rendre fidèlement, mathématiquement, *dans leur spécialité*, et abstraction faite de tout autre

caractère harmonique, toutes ces riches trouvailles de nos grands génies musicaux.

Tel accord, celui de septième de sensible par exemple, ne peut être employé (ce qu'ignorait Auguste Panseron) qu'à certaines dispositions. Dès lors, il devient nécessaire, indispensable, de faire connaître quelles sont ces dispositions, sans être pour cela obligé de recourir au luxe des exemples notés, dont le moindre défaut est de ne permettre aucune comparaison lumineuse, aucun rapprochement instructif. On a bien cherché, pour les cas spéciaux de ce genre, de créer des règles générales. Fétis a dit, par exemple, de l'accord plus haut cité, qu'on n'en faisait usage qu'en plaçant toujours la sus-dominante qu'il contient *à la partie supérieure.* Mais plusieurs compositeurs de génie, Beethoven à leur tête, ont prouvé, dans leurs partitions, que cette prétendue règle pouvait avoir des exceptions. Le moyen, donc, je le demande, si l'on n'a pas d'alphabet particulier, créé spécialement pour cet objet, d'indiquer *exactement* quelles sont les seules dispositions usitées, — et partant permises, — que peuvent affecter, et cet accord, et tant d'autres qui se trouvent avec lui dans le même cas?

L'Harmonie comprend nécessairement deux parties distinctes : la *composition* des accords, et leur *succession.* Or, cette dernière partie, sans contredit la plus importante, ne pourra être définitivement constituée, que lorsqu'on aura classé, d'une manière rigoureuse, *toutes les dispositions que peut comporter et affecter chaque accord, étant donnés tous les cas particuliers, possibles, de préparation et de succession.* On n'atteindra réellement ce but que lorsqu'on aura imaginé, pour toutes ces dispositions, une *notation* spéciale, renvoyant à des tables, précisément comme nous venons d'en créer une pour les *effets* de tous les accords. — Tel est le nouveau travail que nous allons résolûment essayer d'accomplir.

Nous voyons d'abord, d'un coup d'œil, que *deux signes* essentiellement différents nous seront forçément nécessaires pour rendre sur le papier chaque disposition : le premier, indiquant *le nombre de notes contenues dans l'accord, abstraction faite de celles qui sont redoublées;* le second, désignant *le numéro d'ordre de la disposition.*

Les cinq premières lettres minuscules de l'alphabet grec : α, β, γ, δ et ε, nous serviront à merveille pour désigner les accords de une, de deux, de trois, de quatre et de cinq notes. — Comme dans la notation précédente, nous ne pouvons avoir de meilleurs signes que les numéros suivis, pour marquer l'ordre respectif de chacune des *formules de composition.*

Ces formules et leurs signes représentatifs, — il est important

d'en faire la remarque, — s'appliqueront également à *tous* les accords imaginables, « directs » ou « renversés » ; c'est-à-dire, *quel que soit l'*ÉTAT *particulier qu'ils affectent.*

Pour classer toutes les dispositions possibles, nous rangerons leurs formules de composition dans l'ordre naturel (à compter de la basse) des chiffres cardinaux *par lesquels nous exprimerons, pour plus de simplicité, le nombre* ORDINAL *des notes.* Le chiffre 1 (représentant la première note) sera, on le comprend, toujours et dans tous les cas *le premier,* dans toutes les formules de composition. Les dispositions contenant, *comme second chiffre,* le chiffre 1 répété, viendront, ensuite, immédiatement avant celles dont le second chiffre est 2 (seconde note), lesquelles viendront elles-mêmes avant celles dont le second chiffre est 3 (troisième note), etc., et ainsi de suite pour les troisième, quatrième, cinquième chiffres, des formules de composition.

On me demandera peut-être ce que contiendront ces formules de composition? — Simplement toutes les combinaisons et permutations (sous la seule réserve de conserver 1 comme premier chiffre) des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, représentant, je l'ai déjà dit plus haut, la première note, la seconde note, la troisième note, la quatrième note, la cinquième note.

La vue du tableau suivant suppléera, du reste, à ce qui, dans mes explications, pourrait encore paraître obscur ou incomplet.

TABLEAU DE TOUTES LES DISPOSITIONS D'ACCORDS

à une, deux, trois, quatre et cinq parties.

Mélodie.

Une note. — Une combinaison.

α 1 — 1

Harmonie à deux parties.

Accords d'une seule note. — Une combinaison.

α 2 — 1 1

Accords de deux notes. — Une combinaison.

β 1 — 1 2

Harmonie à trois parties.

Accords d'une seule note. — Une combinaison.

α 3 — 1 1 1

Accords de deux notes. — 3 combinaisons.

β 2 — 1 1 2
β 3 — 1 2 1
β 4 1 2 2

Accords de trois notes. — 2 combinaisons.

γ 1 — 1 2 3
γ 2 — 1 3 2

Harmonie à quatre parties.

Accords d'une seule note. — Une combinaison.

α 4 — 1 1 1 1

Accords de deux notes. — 7 combinaisons.

β 5 — 1 1 1 2
β 6 — 1 1 2 1
β 7 — 1 1 2 2
β 8 — 1 2 1 1
β 9 — 1 2 1 2
β 10 — 1 2 2 1
β 11 — 1 2 2 2

Accords de trois notes. — 12 combinaisons.

γ 3 — 1 1 2 3
γ 4 — 1 1 3 2
γ 5 — 1 2 1 3
γ 6 — 1 2 2 3
γ 7 — 1 2 3 1
γ 8 — 1 2 3 2
γ 9 — 1 2 3 3
γ 10 — 1 3 1 2
γ 11 — 1 3 2 1
γ 12 — 1 3 2 2
γ 13 — 1 3 2 3
γ 14 — 1 3 3 2

Accords de quatre notes. — 6 combinaisons.

δ 1 — 1 2 3 4
δ 2 — 1 2 4 3
δ 3 — 1 3 2 4
δ 4 — 1 3 4 2
δ 5 — 1 4 2 3
δ 6 — 1 4 3 2

Harmonie à cinq parties.

Accords d'une seule note. — Une combinaison.

α 5 — 1 1 1 1 1

Accords de deux notes. — 15 combinaisons.

β 12 — 1 1 1 1 2
β 13 — 1 1 1 2 1
β 14 — 1 1 1 2 2
β 15 — 1 1 2 1 1
β 16 — 1 1 2 1 2
β 17 — 1 1 2 2 1
β 18 — 1 1 2 2 2
β 19 — 1 2 1 1 1
β 20 — 1 2 1 1 2
β 21 — 1 2 1 2 1
β 22 — 1 2 1 2 2
β 23 — 1 2 2 1 1
β 24 — 1 2 2 1 2
β 25 — 1 2 2 2 1
β 26 — 1 2 2 2 2

Accords de trois notes. — 50 combinaisons.

γ 15 — 1 1 1 2 3
γ 16 — 1 1 1 3 2
γ 17 — 1 1 2 1 3
γ 18 — 1 1 2 2 3
γ 19 — 1 1 2 3 1
γ 20 — 1 1 2 3 2
γ 21 — 1 1 2 3 3
γ 22 — 1 1 3 1 2
γ 23 — 1 1 3 2 1
γ 24 — 1 1 3 2 2
γ 25 — 1 1 3 2 3
γ 26 — 1 1 3 3 2
γ 27 — 1 2 1 1 3
γ 28 — 1 2 1 2 3
γ 29 — 1 2 1 3 1
γ 30 — 1 2 1 3 2
γ 31 — 1 2 1 3 3
γ 32 — 1 2 2 1 3
γ 33 — 1 2 2 2 3
γ 34 — 1 2 2 3 1
γ 35 — 1 2 2 3 2
γ 36 — 1 2 2 3 3
γ 37 — 1 2 3 1 1
γ 38 — 1 2 3 1 2

γ 39 — 1 2 3 1 3
γ 40 — 1 2 3 2 1
γ 41 — 1 2 3 2 2
γ 42 — 1 2 3 2 3
γ 43 — 1 2 3 3 1
γ 44 — 1 2 3 3 2
γ 45 — 1 2 3 3 3
γ 46 — 1 3 1 1 2
γ 47 — 1 3 1 2 1
γ 48 — 1 3 1 2 2
γ 49 — 1 3 1 2 3
γ 50 — 1 3 1 3 2
γ 51 — 1 3 2 1 1
γ 52 — 1 3 2 1 2
γ 53 — 1 3 2 1 3
γ 54 — 1 3 2 2 1
γ 55 — 1 3 2 2 2
γ 56 — 1 3 2 2 3
γ 57 — 1 3 2 3 1
γ 58 — 1 3 2 3 2
γ 59 — 1 3 2 3 3
γ 60 — 1 3 3 1 2
γ 61 — 1 3 3 2 1
γ 62 — 1 3 3 2 2
γ 63 — 1 3 3 2 3
γ 64 — 1 3 3 3 2

Accords de quatre notes.—60 combinaisons.

δ 7 — 1 1 2 3 4
δ 8 — 1 1 2 4 3
δ 9 — 1 1 3 2 4
δ 10 — 1 1 3 4 2
δ 11 — 1 1 4 2 3
δ 12 — 1 1 4 3 2
δ 13 — 1 2 1 3 4
δ 14 — 1 2 1 4 3
δ 15 — 1 2 2 3 4
δ 16 — 1 2 2 4 3
δ 17 — 1 2 3 1 4
δ 18 — 1 2 3 2 4
δ 19 — 1 2 3 3 4
δ 20 — 1 2 3 4 1
δ 21 — 1 2 3 4 2
δ 22 — 1 2 3 4 3
δ 23 — 1 2 3 4 4
δ 24 — 1 2 4 1 3
δ 25 — 1 2 4 2 3
δ 26 — 1 2 4 3 1
δ 27 — 1 2 4 3 2
δ 28 — 1 2 4 3 3
δ 29 — 1 2 4 3 4
δ 30 — 1 2 4 4 3
δ 31 — 1 3 1 2 4
δ 32 — 1 3 1 4 2
δ 33 — 1 3 2 1 4
δ 34 — 1 3 2 2 4
δ 35 — 1 3 2 3 4
δ 36 — 1 3 2 4 1
δ 37 — 1 3 2 4 2
δ 38 — 1 3 2 4 3
δ 39 — 1 3 2 4 4
δ 40 — 1 3 3 2 4
δ 41 — 1 3 3 4 2
δ 42 — 1 3 4 1 2
δ 43 — 1 3 4 2 1
δ 44 — 1 3 4 2 2
δ 45 — 1 3 4 2 3
δ 46 — 1 3 4 2 4
δ 47 — 1 3 4 3 2
δ 48 — 1 3 4 4 2
δ 49 — 1 4 1 2 3
δ 50 — 1 4 1 3 2
δ 51 — 1 4 2 1 3
δ 52 — 1 4 2 2 3
δ 53 — 1 4 2 3 1
δ 54 — 1 4 2 3 2
δ 55 — 1 4 2 3 3
δ 56 — 1 4 2 3 4
δ 57 — 1 4 2 4 3
δ 58 — 1 4 3 1 2
δ 59 — 1 4 3 2 1
δ 60 — 1 4 3 2 2
δ 61 — 1 4 3 2 3
δ 62 — 1 4 3 2 4

δ 63 — 1 4 3 3 2
δ 64 — 1 4 3 4 2
δ 65 — 1 4 4 2 3
δ 66 — 1 4 4 3 2

Accords de cinq notes. — 24 combinaisons.

ε 1 — 1 2 3 4 5
ε 2 — 1 2 3 5 4
ε 3 — 1 2 4 3 5
ε 4 — 1 2 4 5 3
ε 5 — 1 2 5 3 4
ε 6 — 1 2 5 4 3
ε 7 — 1 3 2 4 5
ε 8 — 1 3 2 5 4
ε 9 — 1 3 4 2 5
ε 10 — 1 3 4 5 2
ε 11 — 1 3 5 2 4
ε 12 — 1 3 5 4 2
ε 13 — 1 4 2 3 5
ε 14 — 1 4 2 5 3
ε 15 — 1 4 3 2 5
ε 16 — 1 4 3 5 2
ε 17 — 1 4 5 2 3
ε 18 — 1 4 5 3 2
ε 19 — 1 5 2 3 4
ε 20 — 1 5 2 4 3
ε 21 — 1 5 3 2 4
ε 22 — 1 5 3 4 2
ε 23 — 1 5 4 2 3
ε 24 — 1 5 4 3 2

Nous arrêtons là, à regret, notre Tableau, la place nous manquant pour donner les dispositions d'accords à six, sept et huit parties.

NOTE II.

Ma *Note sur la possibilité d'établir une notation représentant les successions harmoniques* a été, en général, peu comprise.

Plusieurs lecteurs, me prenant pour un émule de J.-J. Rousseau et de Pierre Galin, ont cru que je venais simplement proposer une nouvelle manière de noter la musique. Le mot *notation* possède en effet, dans notre langue, des acceptions très différentes, qui permettent et justifient jusqu'à un certain point, et au premier abord, une telle confusion. Mais comment ces personnes, même sans se donner la peine de lire attentivement mon travail, n'ont-elles pas vu, d'un seul coup d'œil, que l'exemple de Rossini transcrit d'après mon système, que j'ai donné à la fin de mon premier mémoire, et qui attire de suite les regards, ne pouvait reproduire, à proprement parler, ni les chants, ni les accompagnements du chœur des Suisses de *Guillaume Tell*, et conséquemment que ma transcription ne dispensait pas le moins du monde les musiciens de recourir au

texte de Rossini (1)? Aussi l'appréciation superficielle que nous venons de mentionner ne mérite-t-elle pas de nous arrêter davantage.

D'autres personnes, de l'opinion desquelles nous faisons beaucoup plus de cas, ont cru saisir de notre part l'intention de substituer à la considération des sept fonctions du Ton, qui sert de base même à l'écriture de la Musique, la considération des douze sons, placés à la distance uniforme d'un demi-ton les uns des autres (2). Ces personnes sont dans l'erreur; et si elles avaient lu notre *Essai sur la Tonalité moderne*, dans lequel nous nous appuyons concurremment et à tour de rôle sur ces deux ordres d'idées, très indispensables l'un et l'autre dans l'étude sérieuse de la Musique, elles n'auraient certainement pas été tentées de nous adresser un tel reproche.

Qu'avons-nous donc voulu faire dans notre première brochure, et dans les pages qui précèdent celles-ci? — *Simplement extraire des successions harmoniques,* pour l'utilité de nos études comparées, *un*

---

(1) En effet, ce n'est nullement à l'exécutant, au virtuose, au musicien proprement dit chargé de rendre, pour des auditeurs, l'effet voulu par le compositeur, que s'adressent mes chiffres et mes lettres : c'est à l'analyste, c'est au théoricien, c'est à l'homme désireux de se rendre compte, immédiatement, des faits harmoniques qui se cachent sous l'écriture ordinaire, et qu'une longue et patiente analyse pourrait seule lui faire découvrir. Or, ce sont précisément ces faits, qu'il cherche, que j'exprime *concrètement* pour lui, dans ma notation, et abstraction faite de tous les autres.

En un mot, je ne remplace pas une écriture courante par une autre ayant identiquement le même objet; *je fais ressortir* dans une notation scientifique, algébrique, — ce qui est bien différent, — des faits dont on ne peut, d'ordinaire, arriver à se rendre compte qu'à l'aide de calculs mentaux et d'une attention soutenue.

(2) Il serait facile de créer, ainsi que l'ont demandé Boisgelou et M. Biche-Latour, une écriture musicale où toutes les notes seraient séparées les unes des autres par un demi-ton, et dans laquelle les *effets* de la Musique seraient beaucoup plus reconnaissables que dans la nôtre. Mais aussi, qu'arriverait-il? C'est que la considération si importante des sept fonctions disparaîtrait complètement; ce qui jetterait la théorie de la Musique dans un désarroi complet, ce qui la fausserait du tout au tout.

Il est important de le dire, il y aurait certainement plus d'inconvénients à se passer, en théorie, de la considération des sept fonctions, sur laquelle est basée notre notation actuelle, qu'il n'y en a aujourd'hui à ne pas toujours saisir, instantanément, l'*effet* d'un morceau de musique que l'on a sous les yeux.

caractère que la notation actuelle ne représente pas du tout : *l'effet réel* des accords ; puis un autre caractère qu'elle ne représente que mêlé à d'autres, et que très imparfaitement d'ailleurs au gré de l'analyste : *les dispositions*.

Il est, en effet, éminemment utile d'abstraire d'un objet qu'on étudie tous ses caractères, les uns après les autres, et d'avoir, pour représenter *chacun d'eux à l'exclusion de tous les autres*, des notations particulières et spéciales. On arrive, de la sorte, à connaître cet objet intimement, complètement, et sous tous ses aspects possibles.

Notre intention, du reste, est si peu de supprimer la considération du mécanisme régulier des sept fonctions, tonales ou non tonales, qui, pour nous, doit au contraire primer toutes les autres, que nous nous sommes occupés, pour notre *Grand Traité d'Harmonie*, de créer une classification générale des accords, comprenant tous les cas possibles, et qui repose précisément sur ce même mécanisme, qui constitue, dans notre pensée, la base réelle, le principe fondamental de la Mélodie et de l'Harmonie.

Avant de placer sous les yeux des lecteurs cette classification, fruit de longues méditations, il nous paraît indispensable d'entrer dans quelques détails, au sujet des considérations qui, après beaucoup de recherches, d'essais et de tâtonnements instructifs, ont fini par nous guider.

Linnée, ayant à classer le nombre immense d'espèces de végétaux qui croissent à la surface du globe, eut la très heureuse idée de prendre *un caractère général, toujours le même* (les organes de la floraison et de la fructification), pour base de son système. Aussi sait-on de suite, dans sa classification, où l'on va trouver la plante que l'on cherche. Quelques-unes de ses divisions motivent, il est vrai, des rapprochements plus qu'arbitraires de végétaux ; mais plusieurs, en revanche, sont si heureuses et si légitimes, sous tous les rapports, qu'elles ont été conservées dans la méthode naturelle inaugurée par de Jussieu, et continuée et améliorée, jusqu'à nos jours, par nos premiers botanistes.

En harmonie, pour classer tous les accords, la tâche était, au fond, beaucoup plus facile, à cause du caractère éminemment mathématique des objets à classer. Par malheur, il ne s'est pas rencontré de Linnée parmi les musiciens. On s'est contenté, jusqu'ici, de diviser les accords qui se représentent le plus souvent dans la période harmonique, et qu'on a appelés *naturels*, en « consonnants » et en « dissonants » (division illogique, et absolument antiscientifique : je crois l'avoir démontré, preuves en mains, dans la

quatrième partie de mon *Essai sur la Tonalité moderne*): et on a réparti les autres, un peu au hasard, dans de vastes catégories, sous les vagues dénominations de retards, de prolongations, d'anticipations, de pédales,etc., etc. (1).

On sait par expérience, en histoire naturelle, quels pas nouveaux, considérables, inattendus, la formation et l'amélioration, successives et de plus en plus grandes, des classifications, ont fait faire à la Science (2). Soyons-en sûrs par analogie ; il en sera de même, en harmonie, une fois que nous nous serons débarrassés, à tout jamais, de ces divisions puériles, de ces dénominations absurdes, de ces considérations fausses et sans fondement qui obstruent, depuis trop longtemps déjà, le chemin de la vérité. Il est temps d'étudier, *jusqu'au dernier*, TOUS les accords employés par les compositeurs, et de rendre réellement raison de CHACUN D'EUX, *autrement que d'une manière générale et le plus souvent inexacte.*

En revenir, après tant de tâtonnements infructueux, *à une classification complète*, et vraiment méthodique, n'est donc nullement faire un pas en arrière, surtout lorsque l'on possède, comme nous, pour chaque caractère important, des notations particulières qui abrégent et facilitent si singulièrement les comparaisons. *Les accords et les successions*, que doit nous offrir le Traité d'harmonie idéal que nous rêvons, *existent dans les œuvres des compositeurs, et* N'EXISTENT QUE LA. Les partitions des grands maîtres sont notre Nature, à nous autres harmonistes. Sans classification, je mets qu'il est impossible d'étudier avec fruit les faits harmoniques. Il s'agit donc d'établir et de tracer *un vaste cadre comprenant et*

---

(1) Les exceptions, les irrégularités, les contradictions de toute sorte abondent, dans ces classements arbitraires et par grandes masses ; et c'est ce que nous nous chargerions volontiers de prouver d'une manière détaillée, si nous avions la place nécessaire à notre disposition. — Contentons-nous, pour le moment, d'un seul exemple :

Soit la succession des deux accords de tierce : *mi sol* et *fa la*. Faisons-les entendre avec la note de pédale : *ut*, à la basse. Est-ce dans les accords de pédale qu'il faudra ranger ces deux combinaisons harmoniques? Mais il n'y a pas un seul harmoniste qui ne les analyse ainsi : accord parfait majeur de tonique, « état direct » (État un) ; accord parfait majeur de sous-dominante, « deuxième renversement » (État trois)!!

(2) Certaines divisions, imaginées par Linnée en zoologie, ont été subdivisées à l'infini par Georges Cuvier ; et ce dernier a inauguré, dans les animaux inférieurs, non seulement des familles, mais encore *des ordres entiers*, que son illustre prédécesseur n'avait pas même soupçonnés.

embrassant à l'avance tous les cas possibles, et basé, qu'on ne le perde pas de vue, sur la considération des sept fonctions. Voici celui que je propose :

TABLEAU DES DIX-SEPT ESPÈCES D'ACCORDS

employées en harmonie moderne.

Accords d'une Note.

Accords de première espèce.

ÉTAT UNIQUE. — Unisson (ou octave).

Accords de deux Notes.

Accords de seconde espèce.

ÉTAT UN. — Tierce.
ÉTAT DEUX. — Sixte.

Accords de troisième espèce.

ÉTAT UN. — Quinte.
ÉTAT DEUX. — Quarte.

Accords de quatrième espèce.

ÉTAT UN. — Septième.
ÉTAT DEUX. — Seconde.

Accords de trois Notes.

Accords de cinquième espèce.

ÉTAT UN. — Tierce et Quinte.
ÉTAT DEUX. — Tierce et Sixte.
ÉTAT TROIS. — Quarte et Sixte.

Accords de sixième espèce.

ÉTAT UN. — Tierce et Septième.
ÉTAT DEUX. — Quinte et Sixte.
ÉTAT TROIS. — Seconde et Quarte.

Accords de septième espèce.

ÉTAT UN. — Quinte et Septième.
ÉTAT DEUX. — Tierce et Quarte.
ÉTAT TROIS. — Seconde et Sixte.

Accords de huitième espèce.

ÉTAT UN. — Seconde et Tierce.
ÉTAT DEUX. — Seconde et Septième.
ÉTAT TROIS. — Sixte et Septième.

Accords de neuvième espèce.

ÉTAT UN. — Seconde et Quinte.
ÉTAT DEUX. — Quarte et Septième.
ÉTAT TROIS. — Quarte et Quinte.

Accords de quatre Notes.

Accords de dixième espèce.

ÉTAT UN. — Tierce, Quinte et Septième.
ÉTAT DEUX. — Tierce, Quinte et Sixte.
ÉTAT TROIS. — Tierce, Quarte et Sixte.
ÉTAT QUATRE. — Seconde, Quarte et Sixte.

Accords de onzième espèce.

ÉTAT UN. — Seconde, Tierce et Quinte.
ÉT. DEUX. — Seconde, Quarte et Septième.
ÉTAT TROIS. — Tierce, Sixte et Septième.
ÉTAT QUATRE. — Quarte, Quinte et Sixte.

Accords de douzième espèce.

ÉTAT UN. — Seconde, Tierce et Septième.
ÉTAT DEUX. — Seconde, Sixte et Septième.
ÉTAT TROIS. — Quinte, Sixte et Septième.
ÉT. QUATRE. — Seconde, Tierce et Quarte.

Accords de treizième espèce.

ÉTAT UN. — Tierce, Quarte et Septième.
ÉTAT DEUX. — Seconde, Quinte et Sixte.
ÉT. TROIS. — Quarte, Quinte et Septième.
ÉT. QUATRE. — Seconde, Quarte et Quinte.

Accords de quatorzième espèce.

ÉTAT UN. — Seconde, Quinte et Septième.
ÉTAT DEUX. — Quarte, Sixte et Septième.
ÉTAT TROIS. — Tierce, Quarte et Quinte.
ÉTAT QUATRE. — Seconde, Tierce et Sixte.

Accords de cinq Notes.

Accords de quinzième espèce.

ÉTAT UN. — Seconde, Tierce, Quinte et Septième.
ÉTAT DEUX. — Seconde, Quarte, Sixte et Septième.
ÉTAT TROIS. — Tierce, Quinte, Sixte et Septième.
ÉTAT QUATRE. — Tierce, Quarte, Quinte et Sixte.
ÉTAT CINQ. — Seconde, Tierce, Quarte et Sixte.

Accords de seizième espèce.

ÉTAT UN. — Tierce, Quarte, Quinte et Septième.
ÉTAT DEUX. — Seconde, Tierce, Quinte et Sixte.
ÉTAT TROIS. — Seconde, Quarte, Quinte et Septième.
ÉTAT QUATRE. — Tierce, Quarte, Sixte et Septième.
ÉTAT CINQ. — Seconde, Quarte, Quinte et Sixte.

Accords de dix-septième espèce.

ÉTAT UN. — Seconde, Tierce, Quarte et Quinte.
ÉTAT DEUX. — Seconde, Tierce, Quarte et Septième.
ÉTAT TROIS. — Seconde, Tierce, Sixte et Septième.
ÉTAT QUATRE. — Seconde, Quinte, Sixte et Septième.
ÉTAT CINQ. — Quarte, Quinte, Sixte et Septième.

RÉCAPITULATION.

Une Note.

1	Unisson.	Accord de 1re espèce, Etat unique.

Accords de deux Notes.

2	Seconde.	Accord de 4e espèce, Etat deux.
3	Tierce.	Accord de 2e espèce, Etat un.
4	Quarte.	Accord de 3e espèce, Etat deux.
5	Quinte.	Accord de 3e espèce, Etat un.
6	Sixte.	Accord de 2e espèce, Etat deux.
7	Septième.	Accord de 4e espèce, Etat un.

Accords de trois Notes.

8	Seconde et Tierce.	Accord de 8e espèce, Etat un.
9	Seconde et Quarte.	Accord de 6e espèce, Etat trois.
10	Seconde et Quinte.	Accord de 9e espèce, Etat un.
11	Seconde et Sixte.	Accord de 7e espèce, Etat trois.
12	Seconde et Septième.	Accord de 8e espèce, Etat deux.
13	Tierce et Quarte.	Accord de 7e espèce, Etat deux.
14	Tierce et Quinte.	Accord de 5e espèce, Etat un.
15	Tierce et Sixte.	Accord de 5e espèce, Etat deux.
16	Tierce et Septième.	Accord de 6e espèce, Etat un.
17	Quarte et Quinte.	Accord de 9e espèce, Etat trois.
18	Quarte et Sixte.	Accord de 5e espèce, Etat tro

19	Quarte et Septième.	Accord de 9e espèce, Etat deux.
20	Quinte et Sixte.	Accord de 6e espèce, Etat deux.
21	Quinte et Septième.	Accord de 7e espèce, Etat un.
22	Sixte et Septième.	Accord de 8e espèce, Etat trois.

Accords de quatre Notes.

23	Seconde, Tierce et Quarte.	Accord de 12e espèce, Etat quatre.
24	Seconde, Tierce et Quinte.	Accord de 11e espèce, Etat un.
25	Seconde, Tierce et Sixte.	Accord de 14e espèce, Etat quatre.
26	Seconde, Tierce et Septième.	Accord de 12e espèce, Etat un.
27	Seconde, Quarte et Quinte.	Accord de 13e espèce, Etat quatre.
28	Seconde, Quarte et Sixte.	Accord de 10e espèce, Etat quatre.
29	Seconde, Quarte et Septième.	Accord de 11e espèce, Etat deux.
30	Seconde, Quinte et Sixte.	Accord de 13e espèce, Etat deux.
31	Seconde, Quinte et Septième.	Accord de 14e espèce, Etat un.
32	Seconde, Sixte et Septième.	Accord de 12e espèce, Etat deux.
33	Tierce, Quarte et Quinte.	Accord de 14e espèce, Etat trois.
34	Tierce, Quarte et Sixte.	Accord de 10e espèce, Etat trois.
35	Tierce, Quarte et Septième.	Accord de 13e espèce, Etat un.
36	Tierce, Quinte et Sixte.	Accord de 10e espèce, Etat deux.
37	Tierce, Quinte et Septième.	Accord de 10e espèce, Etat un.
38	Tierce, Sixte et Septième.	Accord de 11e espèce, Etat trois.
39	Quarte, Quinte et Sixte.	Accord de 11e espèce, Etat quatre.
40	Quarte, Quinte et Septième.	Accord de 13e espèce, Etat trois.
41	Quarte, Sixte et Septième.	Accord de 14e espèce, Etat deux.
42	Quinte, Sixte et Septième.	Accord de 12e espèce, Etat trois.

Accords de cinq Notes.

43	Seconde, Tierce, Quarte et Quinte.	Accord de 17e espèce, Etat un.
44	Seconde, Tierce, Quarte et Sixte.	Accord de 15e espèce, Etat cinq.
45	Seconde, Tierce, Quarte et Septième.	Accord de 17e espèce, Etat deux.
46	Seconde, Tierce, Quinte et Sixte.	Accord de 16e espèce, Etat deux.
47	Seconde, Tierce, Quinte et Septième.	Accord de 15e espèce, Etat un.
48	Seconde, Tierce, Sixte et Septième.	Accord de 17e espèce, Etat trois.
49	Seconde, Quarte, Quinte et Sixte.	Accord de 16e espèce, Etat cinq.
50	Seconde, Quarte, Quinte et Septième.	Accord de 16e espèce, Etat trois.
51	Seconde, Quarte, Sixte et Septième.	Accord de 15e espèce, Etat deux.
52	Seconde, Quinte, Sixte et Septième.	Accord de 17e espèce, Etat quatre.
53	Tierce, Quarte, Quinte et Sixte.	Accord de 15e espèce, Etat quatre.
54	Tierce, Quarte, Quinte et Septième.	Accord de 16e espèce, Etat un.
55	Tierce, Quarte, Sixte et Septième.	Accord de 16e espèce, Etat quatre.
56	Tierce, Quinte, Sixte et Septième.	Accord de 15e espèce, Etat trois.
57	Quarte, Quinte, Sixte et Septième.	Accord de 17e espèce, Etat cinq.

Pour créer la classification que je viens de mettre sous les yeux du lecteur, je me suis placé, on le voit, à un point de vue totalement différent de celui où s'étaient mis Rameau, Catel et Fétis. Embrassant *la totalité* des faits harmoniques (au lieu de considérer seulement *des cas particuliers* [1]) et d'essayer d'y rattacher tant bien que mal tous les autres), et *partant de l'ensemble pour arriver aux détails,* je bâtis *un système* (c'en est un bien réel, et je ne m'en défends pas) qui offre au moins cet avantage : de permettre de découvrir immédiatement quelle est l'*espèce* de l'accord que l'on a en vue, et dont on cherche à connaître le rôle et l'usage.

J'ose de plus assurer, mais ici, bien entendu, je ne demande pas à être cru *sur parole,* que ce système offre bien d'autres avantages; qu'étant mathématique comme les faits qu'il ordonne, il se trouve reposer sur la nature réelle des choses; et que les théoriciens de l'avenir n'auront pas à se préoccuper de le remplacer.

NOTE III.

Faisons maintenant quelques applications : prenons les deux catégories d'accords les plus fréquemment usitées [2] dans l'harmonie à plus de deux parties : les accords de cinquième espèce et les accords de dixième espèce, et dressons pour chacune d'elles le tableau de tous [3] les *effets* qu'elles renferment. J'ai réalisé pour moi-même chacune de ces combinaisons, si variées, sur tous les degrés du Ton où elles sont possibles.

Plusieurs d'entre elles, il est vrai, sont absolument inusitées et

---

(1) On trouvera peut-être que tout ceci est bien compliqué, habitué que l'on est aux traités enfantins de nos auteurs modernes; mais la science est la science! Il n'y a pas de routes royales en Algèbre; et les théoriciens n'ont pas à se préoccuper, après tout, si une théorie est difficile à apprendre et à retenir. Le seul point important, c'est *qu'elle soit vraie.*

(2) Ce sont même les seules dont parlent une foule de prétendus « Traités d'Harmonie »…..

(3) Nous n'avons cependant pas cru devoir grossir démesurément ces deux listes, déjà fort longues, des combinaisons pour ainsi dire *innombrables* (dont un petit nombre pourtant sont réellement usitées) qu'aurait offertes l'altération des *octaves* de chacune des notes qui composent ces accords.

le seront même probablement toujours. Il en est un certain nombre d'autres, au contraire, auxquelles nos compositeurs modernes ont donné un emploi des plus logiques, et qui attendent, cependant, encore leur inscription dans les *Traités d'Harmonie*. Le nôtre sera vraisemblablement le premier à enregistrer une foule de ces combinaisons, employées, d'ailleurs, le plus heureusement possible par nos plus grands maîtres.

ACCORDS DE CINQUIÈME ESPÈCE

A LEURS TROIS ÉTATS.

Etat un.	Etat deux.	Etat trois.
Effet 25. {3e diminuée. 5e doubl. dimin.	Effet 38. {3e mineure. 6e augmentée.	Effet 59. {4e doubl. augm. 6e majeure.
Effet 26. {3e diminuée. 5e diminuée.	Effet 45. {3e majeure. 6e augmentée.	Effet 54. {4e augmentée. 6e mineure.
Effet 27. {3e diminuée. 5e juste.	Effet 51. {3e augmentée. 6e augmentée.	Effet 48. {4e juste. 6e diminuée.
Effet 33. {3e mineure. 5e doubl. dimin.	Effet 29. {3e diminuée. 6e majeure.	Effet 60. {4e doubl. augm. 6e augmentée.
Effet 34. {3e mineure. 5e diminuée.	Effet 37. {3e mineure. 6e majeure.	Effet 55. {4e augmentée. 6e majeure.
Effet 35. {3e mineure. 5e juste.	Effet 44. {3e majeure. 6e majeure.	Effet 49. {4e juste. 6e mineure.
Effet 36. {3e mineure. 5e augmentée.	Effet 50. {3e augmentée. 6e majeure.	Effet 42. {4e diminuée. 6e diminuée.
Effet 41. {3e majeure. 5e diminuée.	Effet 28. {3e diminuée. 6e mineure.	Effet 56 {4e augmentée. 6e augmentée.
Effet 42. {3e majeure. 5e juste.	Effet 36. {3e mineure. 6e mineure.	Effet 50. {4e juste. 6e majeure.
Effet 43. {3e majeure. 5e augmentée.	Effet 43. {3e majeure. 6e mineure.	Effet 43. {4e diminuée. 6e mineure.
Effet 44. {3e majeure. 5e doubl. augm.	Effet 49. {3e augmentée. 6e mineure.	Effet 35. {4e doubl. dimin. 6e diminuée.
Effet 48. {3e augmentée. 5e juste.	Effet 27. {3e diminuée. 6e diminuée.	Effet 51. {4e juste. 6e augmentée.
Effet 49. {3e augmentée. 5e augmentée.	Effet 35. {3e mineure. 6e diminuée.	Effet 44. {4e diminuée. 6e majeure.
Effet 50. {3e augmentée. 5e doubl. augm.	Effet 42. {3e majeure. 6e diminuée.	Effet 36. {4e doubl. dimin. 6e mineure.

ACCORDS DE DIXIÈME ESPÈCE

A LEURS QUATRE ÉTATS.

	Etat un.	Etat deux.	Etat trois.	Etat quatre.
Effet 130.	3e diminuée. 5e doubl. dimin. 7e doubl. dimin.	3e mineure. 5e diminuée. 6e augmentée.	3e mineure. 4e doubl. augm. 6e majeure.	2e doubl. augm. 4e augmentée. 6e majeure.
Effet 135.	3e diminuée. 5e diminuée. 7e doubl. dimin.	3e majeure. 5e diminuée. 6e augmentée.	5e diminuée. 4e augmentée. 6e mineure.	2e doubl. augm. 4e augmentée. 6e augmentée.
Effet 138.	3e mineure. 5e doubl. dimin. 7e doubl. dimin.	3e diminuée. 5e doubl. dimin. 6e majeure.	3e mineure. 4e doubl. augm. 6e augmentée.	2e doubl. augm. 4e doubl. augm. 6e majeure.
Effet 103.	3e mineure. 5e diminuée. 7e doubl. dimin.	3e mineure. 5e doubl. dimin. 6e majeure.	3e diminuée. 4e augmentée. 6e majeure.	2e doubl. augm. 4e doubl. augm. 6e augmentée.
Effet 141.	3e diminuée. 5e doubl. dimin. 7e diminuée.	3e mineure. 5e juste. 6e augmentée.	3e majeure. 4e doubl. augm. 6e majeure.	2e augmentée. 4e juste. 6e mineure.
Effet 136.	3e diminuée. 5e diminuée. 7e diminuée.	3e majeure. 5e juste. 6e augmentée.	3e mineure. 4e augmentée. 6e mineure.	2e augmentée. 4e juste. 6e majeure.
Effet 140.	3e diminuée. 5e juste. 7e diminuée.	3e augmentée. 5e juste. 6e augmentée.	3e diminuée. 4e juste. 6e diminuée.	2e augmentée. 4e juste. 6e augmentée.
Effet 139.	3e mineure. 5e doubl. dimin. 7e diminuée.	3e diminuée. 5e diminuée. 6e majeure.	3e majeure. 4e doubl. augm. 6e augmentée.	2e augmentée. 4e augmentée. 6e mineure.
Effet 164.	3e mineure. 5e diminuée. 7e diminuée.	3e mineure. 5e diminuée. 6e majeure.	3e mineure. 4e augmentée. 6e majeure.	2e augmentée. 4e augmentée. 6e majeure.
Effet 168.	3e mineure. 5e juste. 7e diminuée.	3e majeure. 5e diminuée. 6e majeure.	3e diminuée. 4e juste. 6e mineure.	2e augmentée. 4e augmentée. 6e augmentée.
Effet 165.	3e majeure. 5e diminuée. 7e diminuée.	3e diminuée. 5e doubl. dimin. 6e mineure.	3e mineure. 4e augmentée. 6e augmentée.	2e augmentée. 4e doubl. augm. 6e majeure.
Effet 169.	3e majeure. 5e juste. 7e diminuée.	3e mineure. 5e doubl. dimin. 6e mineure.	3e diminuée. 4e juste. 6e majeure.	2e augmentée. 4e doubl. augm. 6e augmentée.
Effet 132.	3e diminuée. 5e doubl. dimin. 7e mineure.	3e mineure. 5e augmentée. 6e augmentée.	3e augmentée. 4e doubl. augm. 6e majeure.	2e majeure. 4e diminuée. 6e diminuée.

Etat un.	Etat deux.	Etat trois.	Etat quatre.
Effet 137. 3e diminuée. 5e diminuée. 7e mineure.	Effet 193. 3e majeure. 5e augmentée. 6e augmentée.	Effet 184. 3e majeure. 4e augmentée. 6e mineure.	Effet 124. 2e majeure. 4e diminuée. 6e mineure.
Effet 141. 3e diminuée. 5e juste. 7e mineure.	Effet 208. 3e augmentée. 5e augmentée. 6e augmentée.	Effet 157. 3e mineure. 4e juste. 6e diminuée.	Effet 125. 2e majeure. 4e diminuée. 6e majeure.
Effet 160. 3e mineure. 5e doubl. dimin. 7e mineure.	Effet 140. 3e diminuée. 5e juste. 6e majeure.	Effet 205. 3e augmentée. 4e doubl. augm. 6e augmentée.	Effet 129. 2e majeure. 4e juste. 6e diminuée.
Effet 165. 3e mineure. 5e diminuée. 7e mineure.	Effet 168. 3e mineure. 5e juste. 6e majeure.	Effet 185. 3e majeure. 4e augmentée. 6e augmentée.	Effet 130. 2e majeure. 4e juste. 6e mineure.
Effet 169. 3e mineure. 5e juste. 7e mineure.	Effet 189. 3e majeure. 5e juste. 6e majeure.	Effet 158. 3e mineure. 4e juste. 6e mineure.	Effet 131. 2e majeure. 4e juste. 6e majeure.
Effet 172. 3e mineure. 5e augmentée. 7e mineure.	Effet 204. 3e augmentée. 5e juste. 6e majeure.	Effet 123. 3e diminuée. 4e diminuée. 6e diminuée.	Effet 132. 2e majeure. 4e juste. 6e augmentée.
Effet 186. 3e majeure. 5e diminuée. 7e mineure.	Effet 135. 3e diminuée. 5e diminuée. 6e mineure.	Effet 186. 3e majeure. 4e augmentée. 6e augmentée	Effet 135. 2e majeure. 4e augmentée. 6e mineure.
Effet 190. 3e majeure. 5e juste. 7e mineure.	Effet 168. 3e mineure. 5e diminuée. 6e mineure.	Effet 159. 3e mineure. 4e juste. 6e majeure.	Effet 136. 2e majeure. 4e augmentée. 6e majeure.
Effet 193. 3e majeure. 5e augmentée. 7e mineure.	Effet 184. 3e majeure. 5e diminuée. 6e mineure.	Effet 124. 3e diminuée. 4e diminuée. 6e mineure.	Effet 137. 2e majeure. 4e augmentée. 6e augmentée.
Effet 205. 3e augmentée. 5e juste. 7e mineure.	Effet 129. 3e diminuée. 5e doubl. dimin. 6e diminuée.	Effet 160. 3e mineure. 4e juste. 6e augmentée.	Effet 140. 2e majeure. 4e doubl. augm. 6e majeure.
Effet 208. 3e augmentée. 5e augmentée. 7e mineure.	Effet 157. 3e mineure. 5e doubl. dimin. 6e diminuée.	Effet 125. 3e diminuée. 4e diminuée. 6e majeure.	Effet 141. 2e majeure. 4e doubl. augm. 6e augmentée.
Effet 138. 3e diminuée. 5e diminuée. 7e majeure.	Effet 195. 3e majeure. 5e doubl. augm. 6e augmentée.	Effet 199. 3e augmentée. 4e augmentée. 6e mineure.	Effet 80. 2e mineure. 4e doubl. dimin. 6e diminuée.
Effet 142. 3e diminuée. 5e juste. 7e majeure.	Effet 210. 3e augmentée. 5e doubl. augm. 6e augmentée.	Effet 178. 3e majeure. 4e juste. 6e diminuée.	Effet 81. 2e mineure. 4e doubl. dimin. 6e mineure.
Effet 166. 3e mineure. 5e diminuée. 7e mejeura.	Effet 171. 3e mineure. 5e augmentée. 6e majeure.	Effet 200. 3e augmentée. 4e augmentée. 6e majeure.	Effet 87. 2e mineure. 4e diminuée. 6e diminuée.
Effet 170. 3e mineure. 5e juste. 7e majeure.	Effet 192. 3e majeure. 5e augmentée. 6e majeure.	Effet 179. 3e majeure. 4e juste. 6e mineure.	Effet 88. 2e mineure. 4e diminuée. 6e mineure.

Etat un.		Etat deux.		Etat trois.		Etat quatre.	
Effet 173.	3e mineure. 5e augmentée. 7e majeure.	Effet 207.	3e augmentée. 5e augmentée. 6e majeure.	Effet 151.	3e mineure. 4e diminuée. 6e diminuée.	Effet 89.	2e mineure. 4e diminuée. 6e majeure.
Effet 187.	3e majeure. 5e diminuée. 7e majeure.	Effet 139.	3e diminuée. 5e juste. 6e mineure.	Effet 201.	3e augmentée. 4e augmentée. 6e augmentée.	Effet 93.	2e mineure. 4e juste. 6e diminuée.
Effet 191.	3e majeure. 5e juste. 7e majeure.	Effet 167.	3e mineure. 5e juste. 6e mineure.	Effet 180.	3e majeure. 4e juste. 6e majeure.	Effet 94.	2e mineure. 4e juste. 6e mineure.
Effet 194.	3e majeure. 5e augmentée. 7e majeure.	Effet 188.	3e majeure. 5e juste. 6e mineure.	Effet 152.	3e mineure. 4e diminuée. 6e mineure.	Effet 95.	2e mineure. 4e juste. 6e majeure.
Effet 196.	3e majeure. 5e doubl. augm. 7e majeure.	Effet 203.	3e augmentée. 5e juste. 6e mineure.	Effet 116.	3e diminuée. 4e doubl. dimin. 6e diminuée.	Effet 96.	2e mineure. 4e juste. 6e augmentée.
Effet 206	3e augmentée. 5e juste. 7e majeure.	Effet 134.	3e diminuée. 5e diminuée. 6e diminuée.	Effet 181.	3e majeure. 4e juste. 6e augmentée.	Effet 99.	2e mineure. 4e augmentée. 6e mineure.
Effet 209.	3e augmentée. 5e augmentée. 7e majeure.	Effet 162.	3e mineure. 5e diminuée. 6e diminuée.	Effet 153.	3e mineure. 4e diminuée. 6e majeure.	Effet 100.	2e mineure. 4e augmentée. 6e majeure.
Effet 211.	3e augmentée. 5e doubl. augm. 7e majeure.	Effet 183.	3e majeure. 5e diminuée. 6e diminuée.	Effet 117.	3e diminuée. 4e doubl. dimin. 6e mineure.	Effet 101.	2e mineure. 4e augmentée. 6e augmentée.
Effet 85.	3e mineure. 5e juste. 7e augmentée.	Effet 44.	3e majeure. 5e doubl. augm. 6e majeure.	Effet 49.	3e augmentée. 4e juste. 6e mineure.	Effet 35.	2e diminuée. 4e doubl. dimin. 6e diminuée.
Effet 86.	3e mineure. 5e augmentée. 7e augmentée.	Effet 50.	3e augmentée. 5e doubl. augm. 6e majeure.	Effet 42.	3e majeure. 4e diminuée. 6e diminuée.	Effet 36.	2e diminuée. 4e doubl. dimin. 6e mineure.
Effet 42.	3e majeure. 5e juste. 7e augmentée.	Effet 36.	3e mineure. 5e augmentée. 6e mineure.	Effet 50.	3e augmentée. 4e juste. 6e majeure.	Effet 42.	2e diminuée. 4e diminuée. 6e diminuée.
Effet 43.	3e majeure. 5e augmentée. 7e augmentée.	Effet 43.	3e majeure. 5e augmentée. 6e mineure.	Effet 43.	3e majeure. 4e diminuée. 6e mineure.	Effet 43.	2e diminuée. 4e diminuée. 6e mineure.
Effet 48.	3e augmentée. 5e juste. 7e augmentée.	Effet 27.	3e diminuée. 5e juste. 6e diminuée.	Effet 51.	3e augmentée. 4e juste. 6e augmentée.	Effet 48.	2e diminuée. 4e juste. 6e diminuée.
Effet 49.	3e augmentée. 5e augmentée. 7e augmentée.	Effet 35.	3e mineure. 5e juste. 6e diminuée.	Effet 44.	3e majeure. 4e diminuée. 6e majeure.	Effet 49.	2e diminuée. 4e juste. 6e mineure.
Effet 50.	3e augmentée. 5e doubl. augm. 7e augmentée.	Effet 42.	3e majeure. 5e juste. 6e diminuée.	Effet 36.	3e mineure. 4e doubl. dimin. 6e mineure.	Effet 50.	2e diminuée. 4e juste. 6e majeure.

NOTE IV.

Dans notre précédent travail, sur la possibilité d'établir une notation représentant les successions harmoniques, après avoir exposé : 1° la manière de représenter les accords ; 2° la manière de représenter le mode de succession des accords, nous avons ajouté : « Resterait maintenant à indiquer le ton *général* ou *abstrait* et les » modulations *relatives,* chose facile, à l'aide d'un troisième alpha- » bet. »

Ce troisième alphabet, voici comment nous proposerions de l'établir :

a	*b*	*c*
Tonique.	Tonique haussée. Sus-Tonique baissée.	Sus-Tonique.
d	*e*	*f*
Sus-Tonique haussée. Médiante mineure.	Médiante majeure.	Sous-Dominante.
g	*h*	*i*
Sous-Dominante haussée. Dominante baissée.	Dominante.	Dominante haussée. Sus-Dominante mineure.
j	*k*	*l*
Sus-Dominᵗᵉ majeure.	Sus-Dominante haussée. Sensible dure.	Sensible.

Si nous n'avons pas donné cet alphabet dans notre première brochure, c'est qu'à vrai dire nous reconnaissions que notre notation pouvait se passer de son concours, et que les successions étaient parfaitement indiquées sans lui. En revanche, cet alphabet peut devenir un instrument de clarté extrêmement précieux, et que rien ne saurait remplacer, pour les étudiants qui veulent se rendre un compte exact et vraiment scientifique des DOUZE SONS servant à exprimer les *dix-sept degrés* du Ton moderne, et du *mécanisme unique des modulations,* découvert, et exposé pour la première fois dans la cinquième partie de l'*Essai sur la Tonalité moderne,* par celui qui écrit ces lignes.

Pour mieux faire comprendre aux harmonistes en quoi consiste le mécanisme dont nous venons de parler,— d'une simplicité, nous osons le dire, *enfantine,* et dont l'évidence saute aux yeux de ceux qui l'ont une fois compris, — il nous paraît utile de *faire ressortir*

ce mécanisme dans la Mélodie même, — où il existe aussi bien et de la même manière que dans l'Harmonie, — et d'appliquer dans ce but, comme exemple, l'alphabet que nous venons de donner à l'un des récitatifs les plus compliqués et les mieux réussis, au point de vue des modulations, du répertoire de l'Opéra moderne :

G. MEYERBEER. — *Les Huguenots.* Récitatif entre les N^os^ 3 et 4.

Ton de mi. *h e h h h a h e e e h ha h a l f f f f f f*
COSSÉ. Eh! mais plus je le vois et plus il me rappelle Un soldat qui jadis aux murs de

h j j c c l a c e f f f c f h e j j
La Rochelle... MARCEL. Vous me reconnaissez? COSSÉ. Oui, vrai Dieu, je le crois! Cette

j l a a c c c c h l a a j j a d d d
large blessure... MARCEL. Elle venait de moi! RAOUL, O ciel! Marcel! COSSÉ. C'était de

c a l c h a l j i j h f e c h e a h
Modulation en La. *c f f f c l*
lonne guerre, Et, pour te le prouver, vide avec moi ce verre! MARCEL. Merci! je ne bois pas!

Modulation en Fa. *e e e e e e f h*
h j l a c e h e f h a a a a a a
COSSÉ. Avec un fils d'enfer! RAOUL. Grâce, excusez-le! NEVERS. Alors, s'il ne boit pas, qu'il

f e h h e h h a a a a a a
Modulation en quatrième son. *c c a a*
chante! RAOUL. Mais, messieurs! COSSÉ. Il le faut, qu'il chante! MARCEL. Volontiers, un

Modulation en neuvième son. *c f l h a l c l a h*
a a a c e e e e e f h h h e h **Modulation en Si.** *e*
vieux air Huguenot contre les gens du Pape et le sexe damnable. Vous le connaissez bien, c'est

Modulation en Ut. *l l l l l l a a h h h e a e e f h j*
a l c l a a a a a a
notre air des combats, celui de La Rochelle. C'était alors qu'au bruit des tambours, des

l a a h h h **Modulation en Ut.** *f l l a h*
Modulation en Fa. *c c c f h l c h c f e e a*
cymbales, Accompagné du piff, paff, piff, des balles, Je chantais, je chantais!

Encore une notation, exprimant *un* des caractères de la musique *abstraction faite de tous les autres,* et dont l'usage nécessite et sous-entend, d'ailleurs, la vue du texte ordinaire. Le caractère isolé, représenté ici, est la relation qui existe entre le son tonique et les autres sons du système, relation d'où résultent : d'une part, *la constitution du Ton moderne;* de l'autre, *la formation et la réalisation des modulations.*

L'utilité pratique des notations et des classifications que je publie aujourd'hui a déjà été expérimentée par moi depuis de longues années. Les services que ces inventions m'ont rendus pour mon *Grand Traité d'Harmonie* sont immenses; et si je parviens un jour à donner à ma science favorite une physionomie absolument nouvelle, si j'arrive à opérer une véritable révolution dans l'étude des accords, ce sera certainement à leur indispensable secours que je le devrai.

En consignant, aujourd'hui, dans le présent opuscule, les résultats les plus généraux des travaux qui m'ont occupé pendant vingt années révolues, mon but, comme je l'ai dit en commençant, est surtout de prendre date. Il est si ordinaire de se voir enlever, par le fait d'une antériorité apparente, l'honneur et la paternité de ses propres travaux! Ayant déjà commencé depuis longtemps à prendre mes précautions à cet égard, j'ose espérer n'avoir rien à redouter, de ce côté du moins, de mes confrères les Harmonistes. Quelle que soit, d'ailleurs, la portée réelle de mes idées et de mes découvertes, il est naturel que je tienne à ce qu'elles paraissent sous mon nom.

THÉORIE MATHÉMATIQUE

DES

EXPÉRIENCES ACOUSTIQUES

DE KUNDT

PAR J. BOURGET

Introduction.

Nous résumerons d'abord ici les expériences acoustiques de M. Kundt, dont nous voulons donner la théorie (1).

Prenons un tube de verre d'environ 2 mètres de longueur et de 4 ou 5 centimètres de diamètre intérieur. Fermons l'une des extrémités par un bouchon, mobile au moyen d'une tige. Fermons aussi l'autre extrémité par un bouchon traversé par un tube plus étroit, que le bouchon serre fortement en son milieu. L'extrémité de ce tube intérieur est muni d'une sorte de piston qui ne remplit pas complètement le tube plus large, et tellement disposé qu'il ne touche pas la paroi intérieure de ce tube.

Si nous frottons maintenant la partie extérieure du tube étroit, nous déterminerons des vibrations longitudinales qui mettront en vibration le piston se trouvant à l'extrémité renfermée dans le large tube. Ce piston vibrant met en mouvement l'air situé dans ce dernier, et il suffit, pour étudier le mouvement de cet air, de saupoudrer légèrement de lycopode la surface intérieure du tube le plus large.

---

(1) *Annales de Physique et de Chimie*, 4e série, t. IX, p. 290, 1866. — *Annales de Poggendorff*, t. CXXVII, p. 497. — TYNDALL, Le Son, p. 220.

Voici les principaux faits qu'on peut observer dans ces expériences :

1° Quelle que soit la longueur du tube d'air, il se met en vibration sous l'influence du mouvement périodique du piston, parfois difficilement, parfois facilement. Les nœuds sont généralement marqués par des accumulations de lycopode dans la partie inférieure du tube.

2° Si l'on fait mouvoir le bouchon fixe, au moyen de la tige à l'extrémité de laquelle il est attaché, on trouve des positions d'agitations maxima et minima de la colonne d'air. La position qui correspond au mouvement le plus intense est celle pour laquelle la distance de deux nœuds est une partie aliquote de la longueur du tube d'air. Si la longueur du tube vaut un nombre impair de demi-distances nodales, le mouvement de l'air atteint le minimum d'intensité.

3° Le premier nœud est toujours au piston fixe, le dernier est à une distance variable du piston vibrant. Il peut être très voisin du piston vibrant, mais il ne peut pas évidemment coïncider avec lui. Kundt a constaté qu'il pouvait, *physiquement parlant,* se trouver en coïncidence avec ce piston, et ce fait lui semble inexplicable.

4° Quand la colonne d'air vibrante est égale à un nombre entier de distances nodales, le lycopode, au lieu de se rassembler en tas vers les nœuds, y forme une couronne elliptique vide de poussière.

5° En général, deux nœuds principaux sont séparés par un grand nombre de stries nodales très rapprochées. Ces stries sont perpendiculaires à la longueur du tube, et, au moment où l'air vibre, on voit s'élever la lycopode qui les forme en lames fines équidistantes. Kundt parle à peine de ces nœuds secondaires et n'en donne aucune explication.

Le mémoire de Kundt montre tout le parti qu'on peut tirer des figures nodales observées pour la détermination de la vitesse du son dans divers corps, mais il ne donne point la théorie des divers phénomènes que nous avons rapportés. Je me suis proposé, dans ce Mémoire, de faire voir que l'on peut facilement déduire

cette théorie de quelques principes posés par l'éminent et regretté Duhamel (1).

La théorie de ces expériences fournit aussi l'explication des anomalies observées par divers physiciens, et en particulier par Masson, dans la série des sons qu'un tuyau peut rendre.

I. **Analyse.** — La théorie des lignes acoustiques de M. Kundt dépend évidemment de la solution du problème suivant :

L'une des extrémités d'un tuyau fermé est animée d'un mouvement périodique permanent, dont la vitesse est

$$V = H \sin 2n\pi t ; \tag{1}$$

trouver le mouvement qu'elle communiquera au gaz renfermé dans le tube.

Nous désignerons par A l'extrémité fixe, que nous prendrons pour origine; par B l'extrémité mobile, dont la vitesse est donnée par la formule (1); par l la longueur du tube, par a la vitesse du son à l'air libre, par u la vitesse d'une tranche d'air quelconque, par s la condensation définie par la formule

$$\rho = D(1+s), \tag{2}$$

ρ étant la densité variable de l'air pendant le mouvement, et D la densité au repos. Si φ est une certaine fonction de x et de t, dont la dérivée par rapport à x représente la vitesse, on sait que l'air du tuyau doit satisfaire dans son mouvement à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{3}$$

et, φ étant connu, on aura à la distance x de l'origine

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \tag{4}$$

puis

$$s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{5}$$

(Voir le *Cours de Mécanique* de Duhamel, t. II, p. 311.)

---

(1) Mémoire sur les vibrations d'un système quelconque de points matériels. (*Journal de l'École Polytechnique*, 23e cahier.)

II. Premier mouvement simple possible. — On peut satisfaire à l'équation (3) et aux conditions aux limites, sans s'occuper des conditions initiales données, en posant

$$\varphi = H \sin 2n\pi t \left(P \sin \frac{2n\pi x}{a} + Q \cos \frac{2n\pi x}{a} \right),$$

P et Q étant des constantes. On déduit, en effet, de là

$$u = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{2n\pi}{a} H \sin 2n\pi t \left(P \cos \frac{2n\pi x}{a} - Q \sin \frac{2n\pi x}{a} \right).$$

Or, pour $x = 0$ on doit avoir $u = 0$; donc $P = 0$, et, par suite,

$$u = -\frac{2n\pi}{a} QH \sin 2n\pi t \sin \frac{2n\pi x}{a};$$

pour $x = l$, u doit devenir identique à V (1); donc

$$-\frac{2n\pi}{a} Q \sin \frac{2n\pi l}{a} = 1,$$

et

$$-Q = \frac{a}{2n\pi} \frac{1}{\sin \frac{2n\pi l}{a}}.$$

Nous aurons donc enfin, comme solution compatible avec les conditions aux limites, le système de formules que voici :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = -\dfrac{aH}{2n\pi} \sin 2n\pi t \dfrac{\cos \dfrac{2n\pi x}{a}}{\sin \dfrac{2n\pi l}{a}}, \\ u = H \sin 2n\pi t \dfrac{\sin \dfrac{2n\pi x}{a}}{\sin \dfrac{2n\pi l}{a}}, \\ s = -\dfrac{H}{a} \cos 2n\pi t \dfrac{\cos \dfrac{2n\pi x}{a}}{\sin \dfrac{2n\pi l}{a}}. \end{array} \right.$$

Nous allons étudier toutes les particularités qu'il présente, avant de chercher l'intégrale la plus générale.

Désignons par

Ω la vitesse de propagation des vibrations longitudinales de la tige vibrante dans l'appareil de Kundt;

L la longueur de la tige vibrante.

Nous avons, comme l'on sait,

$$\Omega = 2Ln . \tag{7}$$

Désignons aussi par

n' le son fondamental du tuyau d'air fermé aux deux extrémités.

Nous avons, d'après la théorie des tuyaux,

$$a = 2ln' . \tag{8}$$

De là résulte qu'on peut donner au système (6) la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= -\frac{n'lH}{n\pi}\sin 2n\pi t\,\frac{\cos\frac{n'}{n}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}, \\ u &= H\sin 2n\pi t\,\frac{\sin\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}, \\ s &= -\frac{H}{2n'l}\cos 2n\pi t\,\frac{\cos\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi} . \end{aligned}\right. \tag{9}$$

De ces formules nous pouvons déduire les conséquences suivantes :

1° *L'air du tube vibre à l'unisson de la tige qui détermine le mouvement périodique de l'extrémité* B.

En effet, le mouvement donné par les formules (9) est un des

mouvements possibles de l'air du tuyau, puisqu'il correspond à un état initial

$$(10)\qquad \begin{cases} u_0 = 0\,, \\ s_0 = -\dfrac{H}{2n'l}\,\dfrac{\cos\dfrac{n}{n'}\pi\dfrac{x}{l}}{\sin\dfrac{n}{n'}\pi}\,; \end{cases}$$

qui pourrait avoir été donné. Le temps T de la période se détermine en posant $2n\pi T = 2\pi$, d'où $T = \frac{1}{n}$. Le son rendu par l'air pendant ce mouvement est $\frac{1}{T} = n$; il est donc identique au son de la tige vibrante.

2° *Il est impossible, physiquement, que l'air possède seulement le mouvement vibratoire synchrone avec celui de la tige.*

En effet, il faudrait que l'état initial de l'air fût précisément celui que donnent les équations (10). Or cet état est très particulier; on ne fait rien au début de l'expérience pour le produire, et il n'est point celui de l'air à l'origine du mouvement. Donc l'air du tube doit posséder d'autres mouvements simples, coexistant avec le mouvement défini par les équations (9). Le mouvement de l'air dans le tuyau est donc moins simple que Kundt ne le pensait, et c'est dans sa complication que nous trouverons l'explication des stries remarquables qui accompagnent toujours les nœuds principaux.

3° *Le mouvement simple, synchrone avec celui de la tige vibrante, cesse d'exister, si le son n est un multiple exact du son n' du tuyau.*

En effet, si nous avions *exactement*

$$n = kn'\,, \qquad (k \text{ étant entier})$$

nous en déduirions

$$u = \infty\,, \qquad s = -\infty\,,$$

pour les divers points de la colonne d'air, sauf quelques points exceptionnels. Donc, au moment où par le mouvement du piston qui forme l'extrémité fixe de la colonne, on atteint le rapport k, le mouvement vibratoire de l'air produit par la friction de la tige

cesse de se manifester; il lui reste les autres mouvements concomitants que nous étudierons plus loin. Nous retrouvons là le fait exceptionnel que nous avons signalé le premier dans les expériences de Melde. Ajoutons qu'il doit être difficile, si l'on n'est pas prévenu d'avance de cette exception, d'en manifester la réalité; car si $\frac{n}{n'}$, au lieu d'être *exactement* égal à k, n'est qu'approché de k, les formules (9) ne représentent rien d'illusoire, et le mouvement ordinaire se produit avec une grande intensité.

4° *Les nœuds de vibration sont équidistants à partir de l'extrémité fixe; le dernier nœud est à une distance variable du piston vibrant.*

En effet, si l'on cherche les valeurs de x qui annulent u des équations (9), on trouve :

$$\frac{x}{l}=0\,,\quad \frac{n'}{n}\,,\quad 2\frac{n'}{n}\,,\quad 3\frac{n'}{n}\,,\ldots,\ k\frac{n'}{n}\,.$$

Supposons

$$n=n'k+\varepsilon\,;$$

nous aurons

$$k\frac{n'}{n}=1-\frac{\varepsilon}{n}\,;$$

donc le dernier nœud sera donné par l'équation

$$\frac{x}{l}=1-\frac{\varepsilon}{n}\,,\quad \text{d'où}\quad x=l-\frac{\varepsilon l}{n}\,;$$

donc il sera à une distance $\frac{\varepsilon l}{n}$ du piston vibrant. Cette distance est variable et dépend de ε. On voit de plus que, si ε est très petit, le nœud semblera se trouver au piston même. C'est ce qui se vérifie très bien dans les expériences de Kundt.

5° *Le mouvement de l'air présente le maximum ou le minimum d'intensité, suivant que la longueur de la colonne est un multiple pair ou impair de la demi-distance nodale.*

En effet, désignons par 2λ la distance des deux nœuds; nous avons, d'après ce qui précède,

$$2\lambda = \frac{n'}{n} l, \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{n'} = \frac{l}{2\lambda};$$

donc

$$u = \mathrm{H} \sin 2n\pi t \frac{\sin \pi \frac{x}{2\lambda}}{\sin \pi \frac{2\lambda}{l}}.$$

Si $\frac{l}{2\lambda}$ est *très voisin* d'un nombre entier, le coefficient de $\sin 2n\pi t$, ou l'amplitude du mouvement vibratoire est très grande, l'intensité du mouvement est à son maximum, à tous les points autres que les nœuds. Si $\frac{l}{\lambda}$ est un nombre entier, le dénominateur $\sin \pi \frac{l}{2\lambda}$ atteint son maximum en valeur absolue; donc le mouvement présente alors l'intensité minimum. Ces résultats sont entièrement conformes aux expériences de Kundt.

6° *Dans le cas singulier, les nœuds possèdent un mouvement semblable à celui du piston vibrant.*

En effet, reprenons la formule de la vitesse

$$u = \mathrm{H} \sin 2n\pi t \frac{\sin \frac{n}{n'} \pi \frac{x}{l}}{\sin \frac{n'}{n} \pi}.$$

Remplaçons d'abord $\frac{x}{l}$ par le nombre $\frac{i}{k}$, i et k étant entiers et i étant l'un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, k$. Nous aurons, aux points correspondants, la vitesse donnée par

$$u = \mathrm{H} \sin 2n\pi t \frac{\sin \frac{n}{n'} \pi \frac{i}{k}}{\sin \frac{n}{n'} \pi}.$$

Maintenant supposons $\frac{n}{n'} = k + \varepsilon$, ε étant très petit; il viendra

$$u = \mathrm{H} \sin 2n\pi t \frac{\sin \left(1 + \frac{\varepsilon}{k}\right) i\pi}{\sin (k + \varepsilon) \pi}.$$

Si maintenant nous faisons tendre i vers zéro, nous aurons la vitesse en un point quelconque des divisions qui seraient des nœuds, si l'on n'était pas dans le cas singulier. On trouve

$$u = (-1)^{i+k} \frac{i}{k} H \sin 2n\pi t . \tag{11}$$

Donc en ces points, quand on se trouve dans les circonstances du *cas singulier,* il y a un mouvement *semblable* à celui de la tige du piston. Le lycopode ne doit donc pas s'accumuler en ces points, et les nœuds observés dans tous les autres cas doivent disparaître au moment même où l'on atteint le cas singulier par un mouvement progressif du piston mobile.

Nous croyons que c'est à cette circonstance qu'il faut attribuer la formation des anneaux singuliers du lycopode au moment où le mouvement prend son amplitude maximum.

On voit que le seul point qui reste toujours un nœud est l'extrémité fixe du tube, pour laquelle $i = 0$.

7° *La distance* 2λ *de deux nœuds est liée au rapport qui existe entre la vitesse a du son dans l'air et la vitesse* Ω *du son dans la matière de la tige vibrante. Cette relation est donnée par la formule* $\frac{\Omega}{a} = \frac{L}{2\lambda}$.

En effet, si nous désignons par n et n' les sons fondamentaux et par L la longueur de la tige vibrante, nous avons

$$a = 2n'l = Ln\lambda$$

et

$$\Omega = 2nL ;$$

donc

$$\frac{\Omega}{a} = \frac{L}{2\lambda} . \tag{12}$$

Cette relation ramène la recherche du rapport des vitesses du son à la mesure de deux longueurs. C'est le procédé suivi par Kundt.

Si nous prenons successivement deux gaz, en gardant les mêmes dimensions de tubes, nous aurons

$$a = Ln\lambda , \qquad a' = Ln\lambda' ;$$

donc

$$\frac{a}{a'} = \frac{\lambda}{\lambda'} . \tag{13}$$

Cette relation permet de trouver facilement la vitesse du son dans un gaz quelconque, quand on connaît la vitesse du son dans un seul.

Nous venons de résumer tout ce qu'il y a d'important dans le Mémoire de Kundt et de tirer de la théorie générale des tuyaux sonores l'explication de tous les phénomènes observés par lui. Il ne nous reste qu'à donner la raison des stries nodales très rapprochées, qui accompagnent, dans la plupart des cas, les accumulations nodales principales. Nous croyons pouvoir le faire au moyen de l'intégrale générale, que nous allons maintenant chercher.

III. Intégrale générale de l'équation du problème de Kundt. — Admettons que les deux extrémités du tuyau l soient immobiles ; nous pourrons satisfaire à l'équation différentielle (3) et aux conditions aux limites que nous nous imposons, en posant

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi = \left(A_i \sin\dfrac{i\pi a t}{l} + B_i \cos\dfrac{i\pi a t}{l}\right)\cos\dfrac{i\pi x}{l}, \\ u = -\dfrac{i\pi}{l}\left(A_i \sin\dfrac{i\pi a t}{l} + B_i \cos\dfrac{i\pi a t}{l}\right)\sin\dfrac{i\pi x}{l}, \\ s = -\dfrac{i\pi}{al}\left(A_i \cos\dfrac{i\pi a t}{l} - B_i \sin\dfrac{i\pi a t}{l}\right)\cos\dfrac{i\pi x}{l}, \end{cases}$$

dans laquelle A_i , B_i désignent deux constantes arbitraires, et i un nombre entier positif, différent de zéro.

Une somme de solutions pareilles, ne différant que par le nombre entier i et les constantes, sera une nouvelle solution plus générale satisfaisant aux mêmes conditions. Posons donc

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi = \displaystyle\sum_1^\infty{}_i \left(A_i \sin\dfrac{i\pi a t}{l} + B_i \cos\dfrac{i\pi a t}{l}\right)\cos\dfrac{i\pi x}{l}, \\ u = -\displaystyle\sum_1^\infty{}_i \dfrac{i\pi}{l}\left(A_i \sin\dfrac{i\pi a t}{l} + B_i \cos\dfrac{i\pi a t}{l}\right)\sin\dfrac{i\pi x}{l}, \\ s = -\displaystyle\sum_1^\infty{}_i \dfrac{i\pi}{al}\left(A_i \cos\dfrac{i\pi a t}{l} - B_i \sin\dfrac{i\pi a t}{l}\right)\cos\dfrac{i\pi x}{l}, \end{cases}$$

A cette solution (15) ajoutons la solution (9) déjà trouvée; nous en aurons une nouvelle qui satisfera à toutes les conditions *aux limites*; elle sera

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi = \displaystyle\sum_1^\infty{}_i \left(A_i \sin\frac{i\pi at}{l} + B_i \cos\frac{i\pi at}{l}\right)\cos\frac{i\pi x}{l} - \frac{n'lH}{n\pi}\sin 2n\pi t \frac{\cos\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}, \\ u = -\displaystyle\sum_1^\infty{}_i \frac{i\pi}{l}\left(A_i \sin\frac{i\pi at}{l} + B_i\cos\frac{i\pi at}{l}\right)\sin\frac{i\pi x}{l} + H\sin 2n\pi t \frac{\sin\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}, \\ s = -\displaystyle\sum_1^\infty{}_i \frac{i\pi}{al}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{l} - B_i\sin\frac{i\pi at}{l}\right)\cos\frac{i\pi x}{l} - \frac{H}{2n'l}\cos 2n\pi t \frac{\cos\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}. \end{cases}$$

Cette solution sera l'intégrale générale, si nous pouvons choisir les constantes arbitraires A_i et B_i de manière à satisfaire à l'état initial donné.

Or, au début de l'expérience, on a

$$u_0 = 0, \qquad s_0 = 0.$$

Donc A_i et B_i doivent satisfaire aux équations

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^\infty{}_i \frac{i\pi}{l} B_i \sin\frac{i\pi x}{l} = 0, \\ \displaystyle\sum_1^\infty{}_i \frac{i\pi}{al} A_i \cos\frac{i\pi x}{l} + \frac{H}{2n'l}\frac{\cos\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi} = 0. \end{cases}$$

Par conséquent

$$(18)\qquad B_i = 0,$$

et

$$\frac{i\pi}{2a}A_i = -\frac{H}{2n'l\sin\frac{n}{n'}\pi}\int_0^l \cos\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}\cos\frac{i\pi x}{l}\,dx$$

En effectuant l'intégration, on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(19) \qquad A_i = (-1)^{i+1} \frac{2Hl}{i\pi^2} \frac{\left(\frac{n}{n'}\right)}{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - i^2}.$$

Ces résultats trouvés, on aura enfin, pour l'intégrale la plus générale du problème que nous nous sommes proposé,

$$(20) \begin{cases} \varphi = \sum_1^\infty (-1)^{i+1} \dfrac{2Hl}{i\pi^2} \dfrac{\left(\frac{n}{n'}\right)}{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - i^2} \sin 2in'\pi t \cos\dfrac{i\pi x}{l} - \dfrac{n'Hl}{n\pi} \sin 2n\pi t \dfrac{\cos\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}, \\ u = \sum_1^\infty (-1)^i \dfrac{2H}{\pi} \dfrac{\left(\frac{n}{n'}\right)}{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - i^2} \sin 2in'\pi t \sin\dfrac{i\pi x}{l} + H \sin 2n\pi t \dfrac{\sin\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}, \\ s = \sum_1^\infty (-1)^i \dfrac{H}{n'\pi l} \dfrac{\left(\frac{n}{n'}\right)}{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - i} \cos 2in'\pi t \cos\dfrac{i\pi x}{l} - \dfrac{H}{2n'l} \cos 2n\pi t \dfrac{\cos\frac{n}{n'}\pi\frac{x}{l}}{\sin\frac{n}{n'}\pi}. \end{cases}$$

Cette intégrale (20) montre que le mouvement est bien plus compliqué qu'on ne pouvait le supposer tout d'abord ; de plus, elle fait voir que les sons qui accompagnent celui du piston vibrant sont ceux d'un tuyau complètement fermé de même longueur. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans l'expérience de Kundt, la colonne d'air vibre à l'unisson de la tige, et de plus elle rend tous les sons d'un tuyau fermé.*

REMARQUE. — On peut même dire que le mouvement de la colonne est encore plus complexe. En effet, nous avons supposé que la tige en vibrant produisait le seul son n ; mais nous savons qu'elle produit en même temps les harmoniques $2n$, $3n$, etc. Chacun d'eux produit un état vibratoire semblable à celui qui est donné par les équations (20), et le mouvement réel de l'air est la superposition de tous ces mouvements.

IV. Explication des stries. -- Si nous jetons les yeux sur l'intégrale générale, nous voyons que n acquiert une valeur très grande, par deux de ses termes, lorsque $\frac{n}{n'}$ devient égal à un nombre très voisin d'un entier i.

Ce que nous venons de dire s'applique à l'un quelconque des sons n rendus par la tige de verre qui met l'air en vibration.

Cela étant, nous pouvons dire que, dans tous les cas, le rapport $\frac{n}{n'}$ est égal à un nombre entier plus une fraction; posons donc

$$\frac{n}{n'} = i + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Nous en déduirons

$$\frac{\beta n}{n'} = \beta i + \alpha.$$

Posons

$$\beta n = \mathrm{N}, \qquad \beta i + \alpha = \mathrm{I}.$$

On voit que le rapport $\frac{\mathrm{N}}{n'}$ sera exactement égal au nombre entier I.

De là résulte que l'harmonique $\mathrm{N} = \beta n$ de la tige vibrante produira un mouvement vibratoire coexistant avec le mouvement principal, et d'une amplitude très marquée.

Ce mouvement produira des nœuds situés à la distance

$$\lambda' = \frac{n'}{\mathrm{N}} l = \frac{l}{\left(\frac{\mathrm{N}}{n'}\right)} = \frac{l}{\beta i + \alpha} = \frac{\lambda}{\beta},$$

λ étant la distance $\frac{n'}{n} l$ de deux nœuds principaux.

L'explication des stries nodales qui paraissent diviser en parties égales la distance de deux nœuds principaux est tout entière dans ce que nous venons de dire. On voit que ces stries sont les lignes nodales correspondantes à un harmonique élevé, variable avec le rapport $\frac{n}{n'}$, qui coexiste avec le son principal de la tige vibrante.

Nous remarquons maintenant que le phénomène se produira lorsque la relation $\frac{n}{n'} = i + \frac{\alpha}{\beta}$ sera approximativement satisfaite;

car les formules deviennent illusoires, lorsque $\frac{N}{n'}$ est *exactement* un nombre entier. D'après cela, il est facile de voir que le nombre des stries peut varier avec l'énergie du mouvement vibratoire imprimé à la tige-piston. Si le mouvement est peu énergique, les seuls harmoniques un peu sensibles seront les 1er $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, ... ; $5n$ sera par exemple le dernier. Cela posé, il existe un nombre de *cinquièmes* sensiblement égal à $\frac{n}{n'}$; donc nous pouvons poser approximativement

$$\frac{n}{n'} = i + \frac{\alpha}{5} ;$$

par suite

$$\frac{5n}{n'} = 5i + \alpha = \mathrm{I} .$$

Dans ce cas, chaque internœud principal présenterait 5 stries. Si le mouvement vibratoire de la tige-piston est très énergique, elle rendra les harmoniques élevés $7n$, $8n$, $9n$, ... L'un d'eux prédominant, $11n$ par exemple, donnera lieu à 11 stries dans chaque internœud, parce que le rapport $\frac{n}{n'}$ peut être évalué approximativement en *onzièmes*.

D'une manière générale, nous pouvons dire que le mouvement à amplitude maximum l'emportera sur les autres, et se produira seul. Donc $\frac{n}{n'}$ s'exprimera *spontanément* en une fraction approximative, ayant pour dénominateur le numéro d'ordre de l'harmonique sensible le plus élevé de la tige vibrante. Donc chaque intervalle formé par deux nœuds principaux se trouvera partagé en plus petits intervalles par un nombre de stries égal à ce numéro d'ordre.

V. Réflexions sur la théorie des tuyaux sonores. — La théorie des phénomènes acoustiques de Kundt nous conduit naturellement à modifier la théorie, généralement donnée en physique mathématique, des tuyaux sonores.

On suppose ordinairement qu'un état initial est donné, et que la colonne d'air est abandonnée aux influences des forces élastiques et des parois immobiles qui en limitent l'étendue. En réalité, le mouvement vibratoire est produit et entretenu à l'une

des extrémités par des procédés variables, et la colonne d'air du tuyau entre en vibration sous l'influence de ce premier mouvement. Il y a donc la plus grande analogie entre un tuyau sonore et le tube de l'expérience de Kundt. Si le son rendu par l'embouchure est un multiple du son fondamental de la colonne d'air, cette colonne se met à vibrer avec énergie; si, au contraire, le son de l'embouchure n'a pas de rapport entier avec celui de l'air intérieur, la vibration du tuyau est pénible ou insensible.

Toutefois, d'après la théorie que nous venons d'exposer, le tuyau peut entrer en vibration avec un son quelconque de l'embouchure; mais l'amplitude est très variable; par suite, le son rendu est ou n'est pas perceptible à l'oreille.

Ceci explique des anomalies nombreuses observées dans certaines circonstances. Masson, dans un mémoire sur les tuyaux sonores (*Annales de Physique et de Chimie*, t. XX, 3ᵉ série), a montré que, si l'on met la colonne d'air en vibration au moyen du mouvement vibratoire produit par l'écoulement de l'air à travers une ouverture circulaire, on peut obtenir, outre les sons qui suivent la loi de Bernoulli, un grand nombre d'autres sons qui ne sont pas compris dans cette loi. Les résultats de Masson sont fort nombreux, et il n'est pas possible d'attribuer les anomalies qu'il signale à des erreurs d'expérience. Il faut donc en conclure qu'avec des précautions convenables on peut faire rendre à un tuyau sonore des sons non compris dans la série de Bernoulli.

L'explication de ce fait se trouve dans la théorie que nous avons donnée des expériences de Kundt. Le mouvement permanent, produit à l'embouchure, peut provoquer une vibration sensible de la colonne d'air, sans qu'il y ait un rapport simple entier entre le son de cette embouchure et le son fondamental de la colonne d'air.

Les sons normaux se distinguent de ces sons exceptionnels par leur intensité et leur plénitude relatives.

Paris, 10 novembre 1872.

ANALYSE D'UN MÉMOIRE

de M. le Capitaine du Génie FRITSCH

SUR LES DYNAMITES

PAR A. RATHEAU

La nitroglycérine et ses dérivées, les dynamites, ont beaucoup occupé l'opinion publique depuis la dernière guerre, qui a popularisé des noms et des substances à peine connus autrefois. Plusieurs de mes collègues à la Société des Sciences physiques et naturelles m'ayant demandé des renseignements à ce sujet, j'ai pensé qu'il leur serait agréable d'avoir l'analyse d'un excellent Mémoire de M. le capitaine du Génie Fritsch sur cette question, et j'en ai fait l'objet d'une communication à la Société.

Cette analyse comprend d'abord quelques idées théoriques sur le mode d'explosion des différents corps explosifs, qui sont généralement des composés azotés. Vient ensuite l'étude de la nitroglycérine et de ses dérivées, les dynamites. Je donnerai la composition et les préparations industrielles de cette substance, puis la manière dont elle se comporte sous l'action des différentes forces physiques; je parlerai de son action physiologique.

Je décrirai ensuite rapidement les principaux usages de la nitroglycérine et des dynamites tant à la guerre que dans l'industrie, en fournissant quelques données d'expériences.

Enfin, je dirai aussi quelques mots de différents autres mélanges

détonants comme le coton-poudre ou pyroxyle, les poudres au picrate, au chlorate, etc.

La puissance explosive des différents mélanges détonants se mesure en prenant pour base la pression exercée au moment de la détonation sur l'unité de surface par l'unité de poids de la substance renfermée dans un vase ayant juste la capacité nécessaire pour cette unité de poids, en supposant l'enveloppe indéfiniment résistante. La force inouïe de cette pression, qui peut s'élever à des milliards de kilogrammètres pour un kilogramme de substance, ne permet pas de la mesurer directement; mais on peut la calculer théoriquement avec une certaine approximation, car elle est évidemment proportionnelle à la quantité de gaz produit et à la température à laquelle il est élevé : ce sont deux éléments connus.

Il est un troisième élément qui modifie les résultats et les amoindrit, de telle sorte que la puissance théorique est plus grande que la puissance pratique; c'est le temps. Il agit de deux manières très différentes : d'abord il est impossible d'obtenir une déflagration absolument instantanée; si rapide qu'elle soit, elle est toujours successive, et l'action produite est successive aussi; elle est d'autant moindre évidemment que cette succession est plus lente. Ensuite l'action de la dissociation n'est pas généralement simple; il peut et il doit y avoir, sous l'effet de la haute chaleur produite, des compositions et des décompositions successives, et ces réactions affaiblissent encore l'effort immédiat produit en en prolongeant la durée.

On peut donc classer les différentes substances suivant leur puissance explosive, mais en faisant encore sur ce classement une double restriction. La première, c'est que la composition chimique de la substance ne suffit pas à déterminer sa place; le mode de fabrication, l'arrangement moléculaire sont encore une cause de variation : suivant que la poudre ordinaire est granulée d'une manière ou de l'autre et plus ou moins comprimée, suivant que le pyroxyle est plus ou moins comprimé, suivant que la nitroglycérine est congelée ou liquide, la puissance explosive

varie notablement. La seconde, c'est qu'elle varie aussi suivant le mode d'obtenir l'explosion. La chaleur et le choc sont les deux modes d'action employés, et le dernier n'agit que comme producteur de chaleur, toute force vive se transformant en chaleur produite. Or, les résultats diffèrent suivant la chaleur employée; au-dessous de 190° la nitroglycérine brûle sans faire explosion, vers 160° ou 170°; si elle est enfermée, l'explosion peut avoir lieu à cette température inférieure, les gaz produits brisant l'enveloppe; c'est alors le choc qui agit. La poudre ordinaire enflammée avec une allumette ne détone pas de la même manière que sous l'action d'un fulminate.

Ce sont surtout les effets du choc que l'on a dû étudier; on sait combien certains fulminants y sont sensibles; la nitroglycérine n'a que trop prouvé que des chocs relativement faibles suffisaient pour opérer sa déflagration; la poudre-coton détone aussi sous le choc, et la poudre de guerre elle-même n'y serait pas insensible, dit-on. Or, d'une part, les chocs sont à redouter à chaque instant dans le maniement des substances explosibles, et, de l'autre, on a recours à eux en beaucoup de cas pour obtenir l'explosion voulue.

M. Berthelot donne l'explication suivante des effets produits par le choc : quand un corps dur vient frapper une certaine quantité de substance explosible, il se produit sur le point frappé une transformation de force vive en chaleur assez intense pour déterminer l'explosion de quelques molécules de la substance, cette chaleur ne pouvant se transmettre assez rapidement dans la masse. Le choc produit par cette explosion première sur les molécules voisines est assez puissant pour les faire détoner à leur tour, et l'explosion se produit ainsi de proche en proche avec plus ou moins de rapidité, suivant la nature de la substance explosible.

Cette explication me paraît rendre bien compte du phénomène général; cependant je crois que, pour certains fulminates très instables, on ne peut dire que le choc agisse par transformation de force vive en chaleur; les vibrations moléculaires suffisent pour amener la dissociation brusque des éléments.

Quoi qu'il en soit, comme la température à laquelle a lieu la déflagration est variable dans les différents corps explosifs, suivant leur constitution physique, et qu'elle varie dans le même corps suivant son état, la force vive nécessaire pour les faire détoner sera aussi variable. Le coup de marteau suffisant pour faire éclater la nitroglycérine ne le sera pas pour produire les mêmes effets sur le pyroxile; si la nitroglycérine est congelée, ce coup devra être plus fort. L'explosion du pyroxile produit toujours celle de la nitroglycérine au contact; l'inverse n'a pas lieu. Une fusée ordinaire de pulvérin plongée dans la nitroglycérine et allumée, ne la fait pas détoner mais seulement brûler.

La nitroglycérine pure est un liquide huileux, incolore, inodore, d'une densité de 1,60. Dans le commerce elle est toujours colorée en jaune. Ce liquide peut s'employer et s'emploie, en effet, dans l'industrie, mais son usage est assez dangereux, et son emploi militaire serait impossible. On a heureusement trouvé un moyen de réduire beaucoup le danger; c'est de mélanger la nitroglycérine avec certaines substances dont la propriété principale est d'absorber le liquide sans le décomposer, la réunion formant une masse pulvérulente ou un peu pâteuse dont la nitroglycérine ne se sépare que sous une pression assez forte. Ces mélanges portent le nom générique de dynamites. Le transport et le maniement des dynamites sont plus faciles et moins dangereux que ceux de la nitroglycérine, et l'action explosive répond à la quantité de cette substance introduite dans la masse.

Généralement la matière à laquelle on incorpore la nitroglycérine est inerte; elle sert seulement à la diviser, à la solidifier. Ce sont des terres siliceuses en poudre, des tripolis, des cendres de charbon de terre purifiées, etc. La dynamite est dite alors à base inerte. Ces substances peuvent absorber de 25 à 80 pour 100 de nitroglycérine; il ne faut pas aller jusqu'à l'extrême saturation, car si l'on force la dose, la substance explosible suinte du mélange, et le danger reparaît, plus grand, parce que l'on se méfie moins. La dynamite employée en Autriche est à base siliceuse, et elle absorbe normalement 75 pour 100 de son poids de nitrogly-

cérine. Les différents résultats que je rapporterai plus loin supposent l'emploi de cette dynamite.

Dans le but d'augmenter les effets produits, on fabrique aussi des dynamites à bases actives, c'est-à-dire dans lesquelles la matière absorbante est par elle-même très oxygénée. On choisit des poudres de différentes compositions, du pyroxile, etc., en se guidant sur la plus ou moins grande facilité d'absorption de ces matières.

La nitroglycérine est le résultat de la réaction sur la glycérine d'une certaine quantité d'acide nitrique mélangé d'acide sulfurique : sa composition en équivalents chimiques est la suivante : $C^6H^5O^{18}Az^3$. D'après M. Berthelot, les résultats de l'explosion seraient les matières suivantes : $C.(Co^2) + 5HO + 3.Az + O$; mais ce mode de décomposition n'est pas admis par tous les chimistes.

La fabrication industrielle de la nitroglycérine est un problème à peine résolu, à cause des dangers qu'elle présente. Le procédé *Nobel,* que M. Fritsch n'a pas cru devoir décrire parce qu'il est, par brevets, réservé à l'inventeur, est, dit-on, le meilleur. Je regrette d'autant plus la réserve de M. Fritsch, qu'il m'a été assuré que M. Nobel, protégé par ses brevets, avait publié ce procédé; toutefois je n'ai pu encore me procurer sa publication.

MM. Girard, Millot et Vogt ont, pendant le siége de Paris, donné à l'Académie des Sciences (séance du 14 novembre 1870) un mode de fabrication qui paraît assez convenable. Ce fut d'après leurs idées, si je ne me trompe, que fut établie l'usine des Carrières d'Amérique, qui fournissait jusqu'à 300 kilos de dynamite par jour. On employait pour un appareil 2^k00 d'acide sulfurique à 66° de Baumé, 1^k000 d'acide azotique à 40° et enfin 0^k450 de glycérine purifiée. L'appareil consiste en un vase de fonte plongé dans un baquet plein d'eau à 15 ou 18° au plus. La glycérine est introduite goutte à goutte dans le mélange des deux acides; fait à l'avance dans le vase. Un courant d'air entretient l'agitation dans le liquide, et l'eau du baquet se renouvelle constamment. La réaction, qui produit beaucoup de chaleur et de nombreuses vapeurs, dure environ vingt minutes. Quand elle est terminée on

verse le contenu du vase de fonte dans le baquet, et on lave à grande eau : il se dépose au fond environ 0ᵏ650 de nitroglycérine, c'est-à-dire à peu près une fois et demie le poids de la glycérine employée. Cette matière, lavée avec soin, est recueillie par décantation; elle est fort acide; on la neutralise en la mélangeant avec du bicarbonate de soude et du carbonate de chaux; on la soumet à un nouveau lavage et on sèche à l'étuve, à une température qui ne doit pas dépasser 35°.

Ce mode de fabrication est encore assez dangereux. Je sais qu'il en existe un qui offre, dit-on, peu de danger; mais je n'ai pas le droit de le faire connaître pour le moment.

Le mélange de la nitroglycérine avec les poudres inertes, qui constitue la dynamite, se fait sur des tables recouvertes en plomb, à bords un peu relevés, à l'aide de spatules en bois.

La nitroglycérine se conserve dans des vases terreux ou métalliques, qu'il convient de ne pas fermer hermétiquement pour laisser dégager les vapeurs.

Les dynamites se serrent et s'expédient soit dans des boîtes en zinc, soit sous forme de cartouches pour lesquelles il est bon d'employer un papier spécial, sinon du parchemin. Il convient aussi de les recouvrir d'un papier d'étain.

Voici maintenant d'une manière concise comment se comportent la nitroglycérine et les dynamites sous l'action des différentes force physiques.

Sous l'action d'une chaleur légèrement supérieure à 100°, la nitroglycérine éprouve une décomposition lente; lorsque l'on en approche une allumette enflammée, un fer rouge, elle prend feu à la manière des huiles volatiles et brûle lentement, tant que cette chaleur n'atteint pas 175° ou 180°. Si la chaleur est supérieure à 190°, il y a détonation. La nitroglycérine se congèle et prend en masse solide à 8° au-dessus de zéro.

La chaleur exerce sur les dynamites les mêmes effets.

L'action de la lumière sur la nitroglycérine est absolument nulle.

Celle de l'électricité ordinaire est nulle aussi. On a pu faire

passer des décharges de bouteilles de Leyde, soit dans la nitroglycérine, soit dans la dynamite, sans obtenir d'autre effet qu'une faible décomposition locale due à la chaleur de l'étincelle; cela tient sans doute à ce que cette substance est bonne conductrice. Il n'en est pas de même avec l'électricité d'induction; sous l'action d'un courant électro-magnétique, la nitroglycérine détone après un commencement de décomposition lente; mais le même effet n'a pas lieu avec les dynamites : le présence du corps inerte annule l'effet du courant.

L'action du choc a été étudiée avec le plus grand soin, car c'est à elle que sont dus la plupart des accidents, et c'est par le choc que l'on arrive généralement à la détonation intentionnelle. Placée entre deux corps choquants métalliques durs, la nitroglycérine fait toujours explosion; mais la détonation ne se produit pas, si l'un des deux corps est moins dur, si c'est du bois, de la pierre tendre, etc. A la température ordinaire, il y a explosion sous le choc d'un fulminate détonant; si la nitroglycérine est congelée, il faut augmenter la force du choc en augmentant la quantité de fulminate.

La dynamite éprouve les mêmes effets quoique à un degré moindre, et d'autant moindre qu'elle renferme moins de nitroglycérine; les corps qui choquent doivent être très durs et les chocs très brusques; les fulminates doivent être en plus grande quantité. C'est ainsi que les balles tirées même à $50^{m}00$ ne produisent sur elle qu'un effet incertain.

La nitroglycérine et surtout les dynamites offrent une composition stable, pourvu qu'elles soient bien privées d'acide. On en a fait voyager pendant plus d'une année, à des températures extrêmes d'été et d'hiver, sans qu'il y ait eu trace de décomposition.

L'eau ne dissout guère que $\frac{1}{800}$ de son poids de nitroglycérine, et c'est ce qui fait que cette substance peut être employée sous l'eau et y faire explosion même après un séjour de 30 à 40 minutes.

La nitroglycérine et ses dérivées sont un poison violent; cette

substance agit par absorption, au contact; ses vapeurs, à la température ordinaire, ont peu d'action; il faut donc éviter de la manier à la main. Elle agit sur le cœur et produit des congestions au cerveau. On donne comme contre-poison du café noir fort, et en Autriche de l'acétate de morphine.

Je vais maintenant décrire succinctement les services que la nitroglycérine et les dynamites peuvent rendre, soit comme effets militaires, soit comme effets industriels.

La guerre demande aux substances explosibles des effets de plusieurs sortes : il faut lancer un projectile dans une arme à feu, ou faire éclater celui-ci lorsqu'il arrive; ou renverser des obstacles, des murs, des palissades, des portes, des grilles de fer, etc.; ou dans les mines militaires, détruire à de grandes distances par des explosions souterraines, les travaux de l'ennemi; ou détruire des ouvrages d'art, des ponts, des parties de chemin de fer. Suivant les cas, il faut varier les substances à employer. Pour les armes à feu, il faut que l'explosion se fasse avec une certaine lenteur; les substances trop actives ne conviennent pas; elles ne valent pas grand'chose non plus pour les mines militaires; l'explosion trop instantanée ne se communique pas à une assez grande distance. Il en est de même sous l'eau, pour charger les torpilles; l'action ne se produit pas généralement au contact, elle se transmet à distance, et une déflagration moyennement lente, comme celle de la poudre, produit plus d'effet que la détonation instantanée de nitroglycérine ou de dynamite. Pour les destructions à l'air libre, au contraire, toutes les fois qu'il faut agir rapidement, sans bourrage, et cependant avec force, il faut employer les substances brisantes. Pour la même raison, toutes les fois qu'il y a lieu de localiser l'action de l'explosion, les poudres brisantes conviennent mieux que les poudres lentes; alors et sous la condition d'un contact immédiat, la localisation augmente l'effet produit.

La nitroglycérine est trop dangereuse pour être employée à la guerre, il faut se contenter de l'usage de la dynamite, et celle-ci devra être aussi forte que possible, c'est-à-dire à 75 pour 100; les

expériences que je vais citer répondent généralement à ce titre de dosage. La dynamite est livrée et conservée sous forme de cartouches contenant 50, 75 ou 100 grammes de cette substance; si l'on est pressé, et c'est le cas ordinaire, il faut l'employer sous cette forme; sinon il y aura presque toujours avantage à mettre la dynamite dans des boîtes confectionnées spécialement pour chaque espèce de destruction.

Pour faire brèche dans un mur ordinaire de 0^m35 à 0^m40 d'épaisseur, il suffit d'un chapelet de cartouches contenant par mètre courant un nombre de kilogrammes égal à 9 fois le cube de l'épaisseur exprimée en mètres. C'est environ 600 grammes ou douze cartouches de 50 grammes par mètre pour un mur de 0^m40 d'épaisseur.

Pour renverser une file de palissades de 0^m35 de diamètre, jointives, il faut employer environ 3^k000 par mètre courant, soit 30 cartouches de 100 grammes; on les place au pied des palissades et on les contrebutte par quelques sacs à terre.

Pour les pièces de bois isolées, il y a deux procédés : si l'on n'est pas trop pressé, on perce suivant un rayon un trou horizontal de 2 à 3 centimètres de diamètre, et l'on y introduit une cartouche qui doit contenir 70 grammes de dynamite pour briser un arbre de 0^m25 de diamètre, et 200 grammes pour un arbre de 0^m35 de diamètre. Si l'on est pressé on entoure le tronc d'un collier de dynamite placée dans un sac en toile; il en faut 3^k00 pour un arbre de 0^m35 de diamètre. On emploie les mêmes procédés pour détruire les pièces sous l'eau.

Pour détruire des bâtiments peu considérables, comme une maison de cantonnier de chemin de fer, une charge de 8 à 10^k000 disposée à l'intérieur sur le plancher, est suffisante; si la maison est plus grande, il faut s'attaquer aux murs d'après la règle donnée ci-dessus.

Les voûtes, les culées, les piles de pont en maçonnerie sont renversées par des quantités de dynamite calculées d'après la règle posée ci-dessus; mais il importe de choisir les points d'application de manière à obtenir le plus grand effet possible.

La poudre produit peu d'effet sur les constructions en fer; la dynamite les détruit au contraire assez facilement. Pour rompre un rail ordinaire, il faut de 400 à 500 grammes de dynamite posée simplement sur le rail. L'effet est plus certain quand on recouvre les cartouches de un ou deux sacs à terre. Pour les poutres en tôle formées de lames de tôles réunies par des fers cornières, l'effet est tout à fait différent suivant que dans un cas pressé on se contente de déposer la charge en un seul tas sur la poutre, ou suivant qu'on la dispose dans des points spécialement choisis, ceux qui offrent le plus de résistance. Il faut trois ou quatre fois plus de dynamite dans le premier cas que dans le second. En outre, les charges seront réduites à environ moitié, si on peut les contrebutter par des sacs à terre. Pour rompre une poutre ordinaire de 4 à $5^{m}00$ de longueur, formée de deux semelles de $0^{m}30$ de largeur sur $0^{m}02$ d'épaisseur et d'une pièce verticale de même épaisseur et de $0^{m}35$ de hauteur, le tout réuni par quatre cornières rivées, il faudrait employer une charge de $4^{k}00$ répartie à raison de $2^{k}00$ sur la semelle supérieure et de deux paquets de $1^{k}00$ sur les deux cornières inférieures. Si l'on ne mettait qu'une seule charge sur la semelle supérieure, il conviendrait de la porter à 12 ou $13^{k}000$. Ces procédés, convenablement modifiés, peuvent s'employer pour les poutres armées des grands ponts. Chaque poutre exige une charge spéciale.

La destruction rapide des bouches à feu en campagne est un problème que la dynamite a permis de résoudre. On place dans l'âme de la pièce à $0^{m}80$ ou $1^{m}00$ de la bouche une charge de dynamite, qui varie de $0^{k}500$ à $4^{k}000$ suivant la grosseur de la pièce et on ferme la bouche avec un tampon de terre glaise de $0^{m}40$ à $0^{m}50$ de longueur; la détonation de la dynamite brise la pièce à peu près au point où la charge a été placée, et fendille le métal en arrière; la partie antérieure de la volée est projetée en éclats plus ou moins gros.

Afin d'obtenir plus d'effets dans l'éclatement des projectiles creux, on a essayé de les charger avec de la dynamite à 30 pour 100 environ. Quelques-uns de ces essais ont réussi; mais

dans beaucoup de cas, le choc que reçoit le projectile à son départ suffit pour faire détoner la dynamite; le projectile éclate alors dans l'âme, et la pièce est brisée. Ce genre de chargement est incertain et dangereux; ce problème n'est pas encore résolu.

L'emploi de la dynamite dans les mines militaires est aussi à l'étude; il est à prévoir que cette substance ne pourra remplacer la poudre pour les fourneaux qui doivent agir à de grandes distances; l'action trop instantanée des gaz produits ne se propage pas aussi loin. Mais pour les mines dites camouflets, il semble que la dynamite doit être supérieure à la poudre.

Le même effet doit être prévu dans le chargement des torpilles. Par les grands fonds, lorsque le bâtiment doit être atteint à 30 ou 40 mètres de distance, la poudre sera préférable. Il vaudra mieux au contraire employer la dynamite quand la torpille doit éclater à peu de distance du bâtiment.

Dans ce qui précède, je n'ai pas parlé de la manière de mettre le feu; elle a cependant une grande importance. C'est par l'explosion des fulminates que l'on obtient celle des dynamites, et l'on fait détoner le premier par l'action de la chaleur, que celle-ci soit produite par un courant électrique faisant rougir un fil de platine, ou par un cordeau porte-feu. Le fulminate est renfermé dans une petite gaîne métallique; seulement il faudrait pouvoir faire varier la quantité de fulminate suivant la force de la dynamite, suivant la température, etc., sous peine d'avoir des ratés. Pour éviter cet inconvénient, on prépare des cartouches-amorces, composées d'une certaine quantité de dynamite à base active (au coton-poudre généralement) et d'une capsule de fulminate calculée pour toujours amener la détonation de la dynamite de la cartouche-amorce. La détonation de cette cartouche détermine celle de la charge de dynamite ordinaire.

Les dynamites ne rendent pas moins de services à l'industrie qu'à la guerre. Pour l'exploitation des mines, lorsque le minerai est suffisamment dur, et principalement lorsque l'humidité rend l'emploi de la poudre difficile, pour l'exploitation des carrières, la dynamite à 30 pour 100 offre de grands avantages sur la poudre;

elle coûte plus cher que celle-ci, il est vrai, mais il en faut beaucoup moins, et les trous de mine sont beaucoup moins longs à forer. Il y a là des causes d'économie notables. En outre, dans les carrières on dirige mieux l'exploitation avec la dynamite; on règle mieux les effets produits, les blocs obtenus sont de dimensions plus régulières.

La dynamite a rendu encore de grands services pour le dérasement des roches qui obstruent des passes ou des entrées de rades. Certaines roches d'une dureté spéciale offraient de grandes difficultés lorsqu'il fallait les enlever dans les travaux d'art, pour le creusement des bassins de radoub ou des fossés de fortification, par exemple; avec la dynamite on en aura facilement raison.

Enfin, on est arrivé à débiter soit avec de la nitroglycérine pure, soit avec de la dynamite à 75 pour 100, les masses métalliques accumulées au pied des hauts-fourneaux. Ces masses de 4 à 5 mètres cubes, pesant jusqu'à 35 quintaux, obstruaient la base de ces hauts-fourneaux, et le travail à faire pour s'en débarrasser était tellement onéreux que l'on préférait abandonner la position. On fora un trou de 0^m65 de profondeur et de 0^m02 de diamètre au centre de l'une de ces masses; on y introduisit 80 grammes de nitroglycérine dans un tube, et on mit par dessus un bourrage en sable. L'explosion de la nitroglycérine amena la séparation d'un premier bloc de 8500 kilos. Des opérations semblables et successives permirent de débiter la masse en morceaux transportables.

Les dynamites à bases actives sont encore seulement à l'état d'essai; mais il résulte de ces essais que, sauf certains cas spéciaux, leur emploi est toujours beaucoup plus dangereux que celui des dynamites et ne présente pas sur lui de grands avantages d'action. Je me contenterai donc de donner leur nomenclature. La dynamite noire Martel a pour base du coke pulvérisé et du sable; elle contient 45 pour 100 de nitroglycérine. La composition du lithofracteur allemand est tenue secrète; il semble résulter de diverses analyses que la base est une poudre de mine légèrement modifiée. Il contient environ 50 pour 100 de nitroglycérine.

La dualine a pour base de la sciure de bois traitée par l'acide nitrique ou autrement dit de la cellulose; elle renferme encore 50 pour 100 de nitroglycérine. En y ajoutant de l'azotate de potasse, on obtient la poudre ternaire.

La poudre-coton a été pendant longtemps l'objet d'essais toujours malheureux, qui la firent successivement abandonner. Le dernier accident a eu lieu à l'usine de Stow-Market (Angleterre) en 1871, et il a été très grave. Dans cette usine le coton, nettoyé et traité par un mélange d'acide nitrique et d'acide azotique, était ensuite réduit en une pâte analogue à celle qui sert à la fabrication du papier, puis comprimé par une presse hydraulique de manière à prendre la forme de cylindres de différentes dimensions, constituant chacun une cartouche. Ces cylindres étaient durs, assez compactes, et sous l'action d'un fulminate ils détonaient en produisant des effets presque analogues à ceux donnés par les dynamites. Mais cette composition ne paraît pas stable, et l'on ne connaît pas exactement les causes d'une instabilité à laquelle sont probablement dus les accidents divers qui ont successivement arrêté les essais.

En Autriche, M. le lieutenant Trauzl a obtenu une dynamite à base active très puissante en faisant absorber par du coton-poudre en pâte 75 pour 100 de nitroglycérine. C'est avec ce mélange qu'il confectionne les cartouches-amorces.

Il y a encore d'autres substances fulminantes ayant pour bases des chlorates ou des picrates qui ont été mises à l'étude; mais les résultats sont incertains, et des accidents inexpliqués, comme celui de la place de la Sorbonne en 1869, doivent rendre très prudents dans leur emploi.

NOTICE

SUR

DEUX TRAITÉS RÉCENTS DE BALISTIQUE

ET SUR L'ÉTAT ACTUEL DE CETTE SCIENCE;

PAR J.-M. DE TILLY,

CAPITAINE DE L'ARTILLERIE BELGE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BRUXELLES.

La Balistique, ou la science du mouvement des projectiles, se divise en trois parties, correspondant respectivement aux trois portions de la trajectoire complète d'un projectile : dans le canon, dans l'air, et dans un obstacle ou un milieu plus résistant que l'air.

Mais dans les deux Traités récents dont nous nous proposons de faire le sujet de cette étude, il s'agit principalement de la Balistique extérieure, ou du mouvement des projectiles dans l'air. L'un de ces ouvrages (1) a été publié en 1872 par le général Mayevski, de l'artillerie russe, connu par de nombreux et remarquables travaux antérieurs. L'autre (2), publié presque en même temps par M. le comte de Saint-Robert, ancien officier supérieur de l'artillerie italienne, n'est pas, à proprement parler, un Cours de Balistique; c'est une édition nouvelle, revue et corrigée, de différents Mémoires que l'auteur avait

---

(1) *Traité de Balistique extérieure*, par N. Mayevski. Paris, Gauthier-Villars, 1872.

(2) Paul de Saint-Robert, *Mémoires scientifiques*, t. Ier, Balistique. Turin, Vincent Dona, 1872.

fait paraître de 1855 à 1861; mais, comme il le dit dans un *Avertissement* préliminaire, il suffirait de développer davantage quelques parties, de combler quelques lacunes, de ménager des transitions, pour faire de l'ensemble de ces Mémoires un véritable Traité.

Nous ne nous proposons pas ici de suivre, de chapitre en chapitre, les deux auteurs dont nous voulons faire connaître les ouvrages et apprécier le mérite; nous préférons présenter un aperçu très succinct de la marche progressive et de l'état actuel de la Balistique extérieure, en signalant les questions dont la solution appartient en propre à l'un des artilleurs-géomètres cités plus haut, ou sur lesquelles leurs Traités peuvent être consultés avec fruit.

Nous avons cru pouvoir introduire dans cet exposé quelques divisions et subdivisions; nous pensons qu'il y gagnera sous le rapport de la clarté.

La *trajectoire normale* des projectiles lancés par une bouche à feu, dans des circonstances données, est celle qu'ils décriraient si le tir s'exécutait, à chaque coup, dans des circonstances absolument identiques, et quand nous disons que les projectiles décriraient chaque fois la même trajectoire, nous n'entendons pas seulement que leurs centres de gravité décriraient la même courbe, mais encore qu'après un temps donné la position de ces centres serait la même sur cette courbe, ainsi que la position des projectiles par rapport à la trajectoire, et leur mouvement total après le temps donné, en translation et en rotation.

Comme la trajectoire normale nous est toujours inconnue, nous ne pouvons en approcher davantage qu'en la confondant avec la *trajectoire moyenne* entre un grand nombre de trajectoires directement mesurées et obtenues dans des circonstances que l'on s'efforce de rendre semblables.

Il est vrai que la trajectoire normale peut être étudiée d'une manière purement abstraite, mais les résultats obtenus renferment souvent des constantes qu'il faut déterminer par l'assimilation de la trajectoire normale à la trajectoire moyenne.

SECTION I.

Trajectoires normales ou moyennes.

Considérons un projectile tiré dans des circonstances données et décrivant sa trajectoire normale. Si son centre de gravité était lancé exactement dans le prolongement de l'axe du canon, ou tout au moins dans le plan vertical contenant cet axe (souvent nommé *plan vertical de tir*), et si les forces qui agiront sur le mobile pendant son trajet, ramenées au centre de gravité, donnaient à chaque instant une résultante comprise dans ce même plan de tir, le centre de gravité resterait toujours dans ce plan, et la projection horizontale de la trajectoire serait une ligne droite.

En réalité, il n'en est pas toujours ainsi, mais la projection horizontale ne s'éloignant jamais beaucoup d'une ligne droite, l'étude de la projection verticale (sur le plan de tir) reste la plus importante.

Dans l'état actuel de la science, on peut faire utilement sur les trajectoires trois études distinctes, savoir :

Étude géométrique séparée de la projection verticale et de la projection horizontale.

Étude mécanique isolée de la projection verticale.

Étude mécanique simultanée des deux projections.

L'étude géométrique séparée de la projection verticale et de la projection horizontale de la trajectoire conduit à des résultats pratiques très utiles et quelquefois curieux, bien que les premières notions de Géométrie et de Géométrie descriptive suffisent pour les établir. La plupart de ces résultats sont connus de tous les artilleurs, au moins d'une manière suffisante pour la pratique, mais pas toujours sous la forme la plus précise et la plus exacte.

Dans cette Balistique géométrique, on ne se préoccupe pas de la forme rigoureuse de la courbe décrite par le projectile, mais on cherche des relations générales entre les éléments de

cette courbe, ou bien entre ces mêmes éléments et certaines dimensions mesurées sur l'arme.

Nous ferons observer qu'il n'est pas absolument nécessaire pour cela de séparer les deux projections; mais cette méthode ajoute à la clarté de l'exposition, indique nettement la raison des analogies qui existent entre diverses formules, et dispense de répéter les mêmes explications à propos des deux projections, ou, si l'on veut, à propos des hausses et des écarts.

La Balistique géométrique n'est traitée d'une manière complète, à notre connaissance, dans aucun ouvrage, pas même dans celui du général Mayevski, bien qu'il touche à ce sujet dans son Chapitre III (1). Nous nous proposons de publier prochainement le résumé des leçons que nous avons rédigées sur cette matière pour les élèves de l'École militaire de Bruxelles; mais nous l'abandonnerons en ce moment, pour ne pas nous écarter du but principal de cette Notice.

§ Ier. — ÉTUDE MÉCANIQUE ISOLÉE DE LA PROJECTION VERTICALE DE LA TRAJECTOIRE.

C'est cette question qui a donné lieu au plus grand nombre de spéculations mathématiques, mais elle n'a pas toujours été posée comme nous la posons aujourd'hui.

Cette étude, qui ne comprend que le mouvement de translation du centre de gravité, repose sur l'admission, au moins tacite, de deux hypothèses. Si, pour chacune des positions du centre de gravité d'un projectile donné sur sa trajectoire normale, on décompose l'ensemble des forces agissantes (pesanteur et résistance de l'air), reportées au centre de gravité, suivant trois directions, savoir : une perpendiculaire au plan du tir, une parallèle à la tangente à la projection verticale cherchée de la trajectoire, et enfin une verticale (2), la première composante n'aura évidemment aucune influence sur la projection

(1) Mayevski, p. 143 à 147.

(2) Cette dernière composante comprend naturellement la pesanteur tout entière.

verticale, mais il faudra admettre, en ce qui concerne les deux autres :

1° Que la composante tangentielle n'est fonction que de la vitesse actuelle du centre de gravité, projetée orthogonalement sur le plan vertical de tir.

2° Que la composante verticale peut être, sinon confondue rigoureusement avec la valeur mg de la pesanteur, du moins remplacée par une valeur moyenne constante mg' (m étant la masse du projectile).

Les anciens géomètres, qui n'avaient en vue que les projectiles sphériques, trouvaient ces hypothèses si naturelles (pour les trajectoires normales ou moyennes), qu'ils n'ont généralement pas pris la peine de les formuler. Aujourd'hui que nous employons des projectiles de formes bien différentes, et ordinairement animés d'une rotation initiale énergique, on pourrait contester ces hypothèses, mais alors il ne serait plus possible de traiter isolément la projection verticale; il faudrait recourir aux méthodes comprises dans le § II de cette section (*Étude simultanée des deux projections*), et la méthode des anciens géomètres ne serait applicable qu'aux projectiles sphériques.

Si, au contraire, on admet, au moins par approximation, les deux principes indiqués, la recherche de la projection verticale de la trajectoire d'un projectile allongé quelconque se réduit à celle de la trajectoire d'un projectile sphérique, ou, plus simplement, elle se réduit, comme cette dernière, à la recherche de la trajectoire d'un point matériel, lancé sous un angle donné et soumis à chaque instant à deux forces, l'une constante et verticale, l'autre variable, dirigée suivant la tangente à la trajectoire, mais uniquement fonction de la vitesse actuelle du point.

La forme de la fonction et les constantes qu'elle renfermera pourront dépendre, d'ailleurs, de la forme du projectile et d'autres circonstances. Il suffit que la loi de la résistance tangentielle, ainsi que la valeur absolue de la force verticale, restent constantes dans un même calcul, et il est bien entendu que ce calcul ne doit pas forcément s'étendre au parcours complet du projectile : on peut partager une trajec-

toire en plusieurs arcs tels que, pour chacun d'eux, les hypothèses fondamentales soient admissibles. D'un arc à l'autre, la force verticale et la loi de la résistance peuvent varier.

Ayant ainsi posé nettement la question, examinons, dans l'ordre historique, les solutions qu'elle a reçues, mais dont la plupart se rapportaient, à l'origine, à un énoncé moins précis ou moins complet.

Les anciens artilleurs avaient, sur la nature de la courbe décrite par les projectiles, les idées les plus étranges. Galilée démontra le premier que cette courbe serait une parabole, si l'on pouvait négliger la résistance de l'air.

Bien que Newton se fût occupé déjà de la solution du problème en tenant compte de la résistance de l'air, qu'il considérait comme proportionnelle au carré de la vitesse, cette idée resta pendant plus d'un siècle à l'état de spéculation mathématique, les praticiens admettant toujours la *théorie parabolique* de Galilée et considérant la résistance de l'air comme négligeable.

Il est intéressant de pouvoir apprécier l'importance de l'erreur qu'ils commettaient ainsi, et de connaître la cause qui les empêchait d'apercevoir cette erreur.

La résistance de l'air croît avec la surface exposée à cette résistance, mais son effet diminue quand la masse du projectile augmente; or la masse augmente, en général, plus rapidement que la surface et par conséquent les trajectoires des gros projectiles (par exemple des bombes lancées par les mortiers) sont moins influencées par la résistance de l'air que celles des petits (par exemple des balles de fusil). D'un autre côté, la valeur absolue de la résistance augmente, toutes choses égales d'ailleurs, avec la vitesse; et la vitesse des balles de fusil est beaucoup plus grande que celle des bombes; cette nouvelle raison s'ajoute évidemment à la première pour prouver que l'air modifie plus la trajectoire des balles que celle des bombes.

En nous tenant à ces deux limites et pour fixer les idées, nous pouvons dire qu'en cherchant la portée d'une bombe par l'emploi de la trajectoire du vide, pour une distance d'environ 600 mètres, on ne se tromperait pas du quart de la portée

réelle, tandis qu'en se servant de la même méthode pour la balle de l'ancien fusil d'infanterie, lancée sous un angle de $4^{o}\frac{1}{2}$, ce qui correspond à peu près à la même distance, on trouverait une portée six fois trop grande.

Mais, pour établir cette comparaison, il faut connaître les vitesses initiales; or, les anciens artilleurs n'avaient aucun moyen de les mesurer directement. Ils considéraient donc, dans leurs équations, la vitesse initiale v comme une indéterminée à laquelle ils attribuaient ensuite la valeur nécessaire pour faire concorder la portée théorique avec celle de l'expérience. Sans doute, ils ne pouvaient arriver à un haut degré d'exactitude, même pour le calcul des portées, car la valeur de v, ainsi déterminée, devait varier plus ou moins avec la distance, les autres circonstances restant les mêmes, et il devenait nécessaire d'adopter une valeur moyenne. Mais les erreurs du calcul restant comparables aux déviations qui se produisaient alors dans le tir, l'illusion était possible (1).

Elle eût persisté longtemps encore, peut-être, sans l'invention du *pendule balistique* (2) faite par Robins, vers 1742 (3).

Cette grande invention, en donnant le moyen de mesurer avec exactitude les vitesses des projectiles et de constater combien elles différaient des valeurs hypothétiques admises jusqu'alors, fit reconnaître définitivement la nécessité de tenir compte de la résistance de l'air et transforma toute la Balistique.

Alors une double difficulté se présenta. Il fallait, d'une part, connaître *la loi de la résistance* en fonction de la vitesse; d'autre part, savoir *intégrer* les équations différentielles du mouvement, lesquelles, pour une loi de résistance bien définie, n'étaient pas plus difficiles à poser que dans le vide.

---

(1) On peut remarquer cependant qu'une étude sérieuse des angles de chute et des durées des trajets aurait pu la détruire. Il ne paraît pas que cette étude ait été faite.

(2) La description et la théorie du pendule balistique se trouvent dans plusieurs traités, par exemple dans celui du général Didion, dont nous parlerons plus loin.

(3) Cette date est celle de la publication de l'ouvrage dans lequel Robins décrit ses expériences.

a. *Recherche de la loi de la résistance de l'air.*

Analyse du chapitre Ier de l'ouvrage du général Mayevski et de quelques parties indiquées plus loin des Mémoires de M. de Saint-Robert.

Comme nous l'avons dit, Newton s'était occupé de la résistance de l'air et avait été amené à la considérer comme proportionnelle au carré de la vitesse.

Dans son Chapitre Ier, qui traite de cette résistance, le général Mayevski rapporte le raisonnement très imparfait qui sert à établir cette loi, pour un plan normal à la direction du mouvement. Ce raisonnement, ainsi que d'autres ayant le même objet, ne diffèrent pas, au fond, du suivant, qui est plus simple :

Si la vitesse du mobile était n fois plus grande, il mettrait en mouvement n fois plus de molécules égales d'air dans le même temps, et il communiquerait aussi à chacune de ces molécules une vitesse n fois plus grande; donc l'impulsion totale communiquée aux molécules d'air serait n^2 fois plus grande, et, comme le temps est le même de part et d'autre, la pression moyenne exercée sur l'air (donc aussi la réaction de ce fluide) serait n^2 fois plus grande, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse.

Pour une raison analogue et plus simple encore, la résistance doit être proportionnelle à la surface du plan.

Les mêmes déductions peuvent évidemment s'appliquer à un mobile quelconque, aussi bien qu'à un plan normal à la direction du mouvement, pourvu que la vitesse soit le seul élément variable, et même à deux mobiles géométriquement semblables, qui ne différeraient que par les dimensions linéaires et par les vitesses.

Comme on le verra plus loin, l'expérience en confirme les résultats, au moins pour des vitesses très grandes ou très petites. Pour les vitesses moyennes, la loi du carré ne se vérifie pas, et cette circonstance remarquable a rappelé l'attention sur un fait signalé depuis longtemps (1), relatif à

(1) Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle*, p. 535.

l'action que l'air peut exercer sur la partie postérieure des projectiles ou des mobiles quelconques et à la vitesse de rentrée de l'air dans le vide postérieur.

Bien que la question soit loin d'être élucidée, il semble résulter des faits connus que la loi du carré de la vitesse serait assez exacte quant à l'action antérieure de l'air (la seule dont on se soit occupé dans l'explication précédente), mais que, aux vitesses moyennes seulement, cette loi serait sensiblement modifiée par l'action postérieure, laquelle serait ainsi négligeable pour les vitesses faibles ou fortes.

Lorsqu'on veut comparer les résistances sur deux mobiles qui diffèrent autrement que par les circonstances indiquées plus haut (vitesses et dimensions, les projectiles étant semblables), il faut les rapporter comme il suit au cas le plus simple.

On considère d'abord un plan se mouvant obliquement. Alors on trouve, par un raisonnement analogue au précédent et en admettant le glissement libre des molécules d'air dans le sens du plan lui-même, que la résistance est normale au plan, proportionnelle à sa surface, au carré de la vitesse, et aussi au carré du cosinus de l'angle que fait la normale avec la direction du mouvement.

Du plan oblique on peut passer au cas d'une surface quelconque, se mouvant aussi suivant une direction quelconque, par la décomposition en facettes infiniment petites et la recomposition des résistances partielles. Comme il ne s'agit évidemment, dans ce calcul, que de la résistance antérieure de l'air, il semble que l'on puisse employer la loi du carré trouvée pour le plan.

C'est ce que le général Mayevski a fait dans les exemples qu'il présente. Il reproduit aussi les calculs donnés en premier lieu par M. de Saint-Robert (1), relativement à la résistance sur une surface de révolution dont l'axe est oblique à la direction du mouvement.

Ces calculs reposent, comme on vient de le voir, sur beau-

(1) De Saint-Robert, p. 251 à 256.

coup d'hypothèses, et on n'y tient pas compte non plus de l'influence que pourrait avoir le mouvement de rotation du projectile; le général Mayevski fait observer, toutefois, qu'ils ont pour eux la simplicité, et qu'ils donnent le moyen de connaître la relation entre la résistance de l'air sur les surfaces de révolution et les angles que font les axes de figure de celles-ci avec la direction du mouvement, ce que l'on ne peut pas déduire des expériences faites jusqu'à ce jour sur la résistance de l'air. Cette observation trouvera son application dans le § II; ici nous avons admis que la résistance tangentielle ne dépend que de la vitesse projetée, et dès lors nous ne devons pas nous préoccuper de l'influence que pourrait avoir l'inclinaison de l'axe de figure.

L'insuffisance évidente des considérations physiques et mécaniques a fait recourir depuis longtemps à l'expérience pour déterminer la loi d'après laquelle la résistance varie avec la vitesse, et avec la section transversale, pour chaque espèce de projectiles.

Abstraction faite de quelques procédés indirects, dont nous nous abstiendrons de parler ici, d'abord parce qu'il n'en est guère question dans les ouvrages de MM. Mayevski et de Saint-Robert; ensuite parce qu'il n'est pas encore établi que ces procédés doivent entrer définitivement dans la science; la recherche expérimentale de la loi de la résistance a été basée dès l'invention du pendule balistique, et jusqu'à aujourd'hui, sur la méthode suivante :

Mesurer les vitesses d'un projectile dans le sens horizontal en deux points de sa trajectoire, assez voisins l'un de l'autre. — En déduire la résistance moyenne de l'air, dans le sens horizontal, par l'équation des forces vives. — Admettre que cette résistance horizontale moyenne corresponde à la vitesse horizontale moyenne. — Passer, au besoin, de la vitesse et de la résistance horizontales à la vitesse et à la résistance réelles, en remplaçant par une ligne droite la portion peu étendue de trajectoire qui réunit les deux points où l'on a mesuré les vitesses. — Ramener, au besoin, la résistance à ce qu'elle serait pour la densité moyenne de l'air.

Ayant ainsi la résistance qui correspond à une vitesse déter-

minée, on pourra, en répétant l'expérience pour des vitesses assez différentes, obtenir une relation approximative entre la résistance et la vitesse.

En agissant de même sur des projectiles différents, on découvrira l'influence de la section transversale et de la forme des projectiles.

Cette méthode exige que l'on opère à une distance suffisante de l'arme, sans quoi, les gaz de la poudre exerçant encore une certaine action sur le projectile qu'ils poursuivent, la résistance obtenue serait nécessairement trop faible. Cette condition importante n'a pas toujours été observée.

Les premières expériences, dues à l'inventeur même du pendule balistique, lui avaient déjà fait voir que la résistance de l'air (au moins sur des balles de fusil) peut croître plus rapidement que le carré de la vitesse, et elles avaient conduit Euler à exprimer cette résistance par un binôme dont le premier terme était proportionnel au carré et le second terme à la quatrième puissance de la vitesse. Nous retrouverons plusieurs fois dans la suite cette loi remarquable.

Les expériences de Hutton, exécutées à Woolwich, de 1787 à 1791, avec des canons de petits calibres, semblaient prouver que la résistance variait plus rapidement que le carré de la vitesse pour les vitesses inférieures à 440 mètres par seconde, et comme le carré de la vitesse depuis 440 mètres jusqu'à 600 mètres. Le général Didion, de l'artillerie française, dans son excellent *Traité de Balistique*, a rapporté des objections faites contre les conclusions de Hutton; celles-ci s'accordent toutefois avec des expériences récentes et précises.

En 1839 et 1840, MM. Piobert, Morin et Didion, tous de l'artillerie française, ont fait à Metz des expériences, principalement relatives au tir des canons lisses de 12 centimètres et de 15 centimètres. Leurs résultats ont conduit le général Didion à adopter, dans son Traité, une expression binôme de la résistance dont le premier terme renferme le carré et le second le cube de la vitesse. Mais M. de Saint-Robert a trouvé (1) que

(1) De Saint-Robert, p. 132.

ces résultats se représentent plus exactement encore par la loi d'Euler (carré et quatrième puissance).

Les trois séries d'expériences qui précèdent ont été faites, comme nous l'avons dit, au moyen du pendule balistique inventé par Robins.

Mais ce pendule, dont l'invention fit faire de si notables progrès à la Balistique, est cependant un instrument incommode, dont l'emploi, nécessairement limité, ne permettait pas la multitude de mesures nécessaires pour la découverte des lois réelles du mouvement des projectiles.

Par exemple, dans la recherche de la loi de la résistance, telle que l'ont pratiquée Robins, Hutton et la Commission de 1839, il fallait prendre, comme appartenant à un même projectile, en deux points de son trajet, les vitesses moyennes déduites du tir avec des projectiles différents, car le pendule balistique ne permet évidemment de mesurer la vitesse d'un même projectile qu'en un seul point de sa trajectoire.

Cette cause d'erreur a été supprimée par l'invention des appareils électro-balistiques (1), qui permettent de mesurer les vitesses d'un même projectile en plusieurs points, et qui ont été exclusivement employés dans les expériences subséquentes, conduites d'ailleurs d'après les mêmes principes.

L'artillerie française a repris à Metz, en 1856, 1857 et 1858, ses expérienees antérieures (1839 et 1840), sur des projectiles sphériques de divers calibres, avec deux *pendules électro-balistiques* du major Navez, de l'artillerie belge (2).

Les résultats ont conduit, cette fois, à admettre, pour la résistance, une expression monôme, proportionnelle au cube de la vitesse. Cette loi est ordinairement attribuée au chef d'escadron Welter, de l'artillerie française. Le général Mayevski l'attribue à la Commission elle-même, qui était présidée par le colonel Virlet.

---

(1) Pour la description et la théorie des appareils électro-balistiques, on peut consulter les Mémoires des inventeurs.

(2) Le major Navez est l'inventeur du premier appareil électro-balistique qui ait pu fonctionner utilement dans les polygones.

D'après M. Resal (1), cet exposant 3 ne serait admis que par simplification et l'exposant le plus exact serait 2,88. Alors il y aurait une concordance remarquable entre ces expériences et d'autres plus récentes, dont nous allons parler.

Le général Mayevski nous fait connaître le résultat des importantes expériences exécutées, sous sa direction, près de Saint-Pétersbourg, en 1868 et 1869, par l'artillerie russe, pour une nouvelle détermination de la loi de la résistance de l'air, au moyen de deux *chronographes électro-balistiques* du capitaine Le Boulengé, de l'artillerie belge.

Cette fois on a tiré, non seulement des projectiles sphériques, comme dans les expériences précédentes, mais aussi des projectiles cylindro-ogivaux de divers calibres.

Des résultats de ces expériences, combinés, en ce qui concerne les plus gros calibres, avec ceux que M. Bashforth a trouvés en Angleterre en 1868, au moyen de son chronographe, le général Mayevski a déduit les lois suivantes, qui constituent aujourd'hui le dernier mot de la question :

1° La résistance de l'air sur les projectiles de même espèce peut être considérée comme proportionnelle à l'aire de la section transversale.

2° Si l'on veut exprimer la résistance en général par un monôme, et appliquer cette loi moyenne à toutes les circonstances, l'exposant le plus probable de la vitesse dans cette expression est 2,86 pour les projectiles sphériques et 3,86 pour les projectiles oblongs. Ces exposants peuvent être remplacés respectivement, par approximation, par 3 et 4.

3° Si l'on veut une exactitude plus grande, il faut faire varier la loi d'après la vitesse, comme il suit :

Projectiles sphériques : Vitesse comprise entre 530 et 376 mètres par seconde : résistance proportionnelle au carré de la vitesse ;

Vitesse inférieure à 376 mètres : loi d'Euler ;

Projectiles oblongs : Vitesse comprise entre 510 et 360 mètres : résistance proportionnelle au carré de la vitesse ;

---

(1) *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 388. 1873.

Entre 360 et 280 mètres : résistance proportionnelle à la sixième puissance de la vitesse;

Vitesse inférieure à 280 mètres : loi d'Euler.

b. *Méthodes d'intégration.*

On sait aujourd'hui que les erreurs auxquelles donnent lieu les applications des formules balistiques, proviennent bien plus de l'incertitude où l'on est encore sur la loi vraie de la résistance de l'air, que de la difficulté des intégrations, lesquelles se font par des méthodes approchées très suffisantes pour la pratique. Mais on n'est arrivé à ces méthodes qu'après des recherches assez nombreuses, que nous allons résumer.

Newton, qui avait posé le premier la loi de proportionnalité de la résistance au carré de la vitesse, n'avait pas fait d'application complète de cette loi au mouvement des projectiles.

Jean Bernoulli démontra en 1719 que le problème balistique se réduit aux quadratures lorsque la résistance de l'air s'exprime par un monôme tel que bu^n (u représentant la vitesse).

D'Alembert fit voir en 1744 qu'il en est de même pour les expressions $a + bu^n$, et $a + b\log u$. La première de ces deux formes peut s'appliquer à la rigueur à la pénétration dans les milieux plus résistants que l'air; la seconde ne conduit qu'à un simple jeu d'analyse.

Les méthodes de Bernoulli et de d'Alembert ont été exposées succinctement par M. de Saint-Robert (1).

Mais, la réduction aux quadratures ne constituant pas une solution complète, on dut rechercher des méthodes d'approximation. Nous les diviserons en trois groupes.

Dans le premier, nous rangerons les méthodes de calcul de la trajectoire par points, méthodes susceptibles d'une

---

(1) De Saint-Robert, p. 94 à 107.

approximation indéfinie, dans lesquelles on remplace les différentielles par des accroissements très petits.

Euler, partant de l'expression finie qu'il avait trouvée pour l'arc, en fonction de l'inclinaison, dans l'hypothèse du carré de la vitesse (1), a ouvert cette voie, où Legendre l'a suivi.

M. de Saint-Robert a donné (2) une méthode reposant sur la même idée et qui peut être appliquée, non seulement lorsque la fonction de la vitesse, exprimant la loi de la résistance du milieu, est définie analytiquement d'une manière quelconque, mais encore lorsque cette loi est donnée par une table de valeurs numériques correspondantes.

Le deuxième groupe comprend les développements en séries. Lambert, Borda, Tempelhof et Français les ont appliqués à l'hypothèse de Newton.

M. de Saint-Robert (3) donne les valeurs de tous les éléments principaux, développées en séries suivant les puissances ascendantes de l'abscisse, quelle que soit la fonction qui représente la résistance.

Enfin, dans les méthodes d'approximation du troisième groupe, une très légère modification de l'expression de la résistance sert, soit à séparer les variables quand cette séparation ne peut s'effectuer autrement, soit à faciliter les quadratures.

Borda, Bézout, Legendre et Français avaient suivi une marche analogue pour l'hypothèse du carré.

Le général Didion a, le premier, appliqué cette méthode à une autre hypothèse dans le *Traité* complet de *Balistique extérieure* qu'il a fait paraître en 1847 et qui est basé sur l'expression binôme qu'il avait déduite des expériences faites à Metz en 1839 et 1840.

Cet ouvrage, excellent par son plan et par son exécution, a

---

(1) Après avoir cherché une solution basée sur la loi qu'il avait adoptée d'après les expériences de Robins, Euler renonça à cette loi, comme on le voit dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1753, et en revint à celle de Newton. (De Saint-Robert, p. 26.)

(2) De Saint-Robert, p. 108 à 118.

(3) *Idem*, p. 125 à 130.

été pris, par le général Mayevski, pour point de départ, lorsqu'il fut appelé, en 1858, à professer la Balistique à l'Académie d'artillerie de Saint-Pétersbourg et l'a aidé beaucoup dans la rédaction de son Traité actuel.

Le général Didion a fait aussi une chose fort utile en dressant des tables donnant les valeurs numériques des coefficients par lesquels ses formules diffèrent des formules correspondantes du vide. Quelques-unes de ces tables, n'étant pas spéciales à l'hypothèse adoptée, ont pu être utilisées par le général Mayevski.

C'est encore M. de Saint-Robert qui a généralisé la troisième méthode d'approximation, en l'appliquant à une loi quelconque de résistance (1).

Il a publié, de plus (2), une étude remarquable sur les propriétés générales des trajectoires, c'est-à-dire les propriétés qui subsistent, abstraction faite de la loi de la résistance, pourvu que cette résistance augmente indéfiniment avec la vitesse et soit moindre que le poids du projectile pour une vitesse infiniment petite.

Toutes les méthodes indiquées par le général Mayevski, dans son Chapitre II, pour l'étude des trajectoires, sont empruntées aux parties citées plus haut des Mémoires de M. de Saint-Robert. En particulier, l'auteur a adopté la troisième méthode d'intégration pour appliquer toutes les lois de résistance déduites des expériences de Saint-Pétersbourg, et il donne les tables des coefficients qui, pour chacune de ces lois, différencient les résultats de ceux que l'on obtiendrait dans le vide. Quelques tables ont pu être empruntées à la *Balistique* du général Didion; les autres ont été calculées sous la surveillance du général Mayevski.

Bien que le chapitre qui renferme ces calculs soit intitulé: *Mouvement dans l'air des projectiles sphériques*, l'auteur y introduit aussi les lois trouvées aux expériences de Saint-Pétersbourg pour les projectiles allongés. Il reconnaît ainsi que

---

(1) De Saint-Robert, p. 119 à 121.
(2) *Idem*, p. 68 à 98.

la même marche peut être adoptée pour trouver la trajectoire de ces projectiles (en projection verticale), lorsque l'on admet les deux hypothèses que nous avons placées en tête de ce paragraphe. C'est, en effet, la seule marche réellement utile dans la pratique et celle que l'auteur lui-même a employée dans son Chapitre V.

L'application des méthodes précédentes au calcul des diverses trajectoires et à la solution des principaux problèmes du tir est développée dans le Chapitre VI du premier mémoire de M. de Saint-Robert (1) et dans les Chapitres III et V de l'ouvrage du général Mayevski. Nous nous bornerons à faire observer :

1° Que la vitesse initiale à introduire dans les calculs n'est pas la vitesse réelle, mais une vitesse corrigée, déduite de celle que l'on a mesurée par un appareil balistique, à une distance suffisante de la bouche pour qu'on puisse admettre que les gaz, à cette distance, n'agissent plus sur le projectile. La vitesse initiale corrigée doit être telle qu'elle reproduise la vitesse mesurée, quand on l'introduit dans les équations du mouvement, tandis que la vitesse initiale réelle peut être différente, vu que la loi de résistance admise n'est certainement pas applicable à la portion de trajectoire dans laquelle les gaz poussent encore le projectile.

2° Que l'angle de projection à introduire dans les équations du mouvement n'est pas toujours égal à l'angle formé par l'axe de l'âme avec l'horizon; dans nos canons rayés, par exemple, le projectile se relève à la sortie, c'est-à-dire que le premier angle est un peu plus grand que le second; la différence, supposée constante, peut s'obtenir par une expérience directe, ou par une comparaison attentive des angles de projection apparents (c'est-à-dire déduits de la position de l'*axe* de l'âme), pour le tir aux diverses distances. On observe que ces angles convergent vers une valeur-limite négative, lorsque la distance converge vers zéro. On peut encore déduire l'écart angulaire de l'étude d'une trajectoire correspondante à une

(1) De Saint-Robert, p. 131 à 168.

distance très faible, parce qu'alors le choix de la loi de résistance est presque indifférent.

On pourra donc trouver l'angle de projection réel, qui donne la portée voulue, et en retrancher l'angle de projection apparent.

On a expliqué de plusieurs manières l'existence de l'écart initial, mais cette étude n'a pas été poussée bien loin.

§ II. — Étude mécanique simultanée des deux projections de la trajectoire.

On conçoit que, si l'on connaissait le mouvement relatif de rotation d'un projectile cylindro-ogival autour de son centre de gravité pendant toute la durée de son trajet, on pourrait en déduire des indications utiles sur les composantes de la résistance de l'air à chaque instant, et procéder ainsi à une étude simultanée des deux projections de la trajectoire. Aussi les travaux les plus remarquables publiés jusqu'à ce jour sur la question, sont presque exclusivement consacrés à l'étude du mouvement de rotation.

Nous avons déjà dit que M. de Saint-Robert a, le premier, déterminé la résistance de l'air (1), c'est-à-dire son point d'application et ses deux composantes (situées dans le plan qui contient l'axe de figure et la direction actuelle du mouvement), pour une position donnée du projectile par rapport à la direction du mouvement, moyennant un assez grand nombre d'hypothèses, parmi lesquelles nous signalerons seulement la suppression des actions non symétriques par rapport au plan dont nous venons de parler. Cette même hypothèse sera conservée dans tout ce qui suit.

Le calcul montre que le point d'application de la résistance est généralement en avant du centre de gravité du projectile,

(1) De Saint-Robert, p. 251 à 256.

ce qui s'accorde avec les résultats des expériences de Magnus (1).

Le même auteur a donné, dans deux Mémoires publiés, l'un en 1859, l'autre en 1861 (2), une théorie géométrique du mouvement de rotation, autour du centre de gravité, d'un corps de révolution animé d'une grande vitesse angulaire initiale autour de son axe de figure, et soumis à une force qui tendrait à chaque instant, avec une énergie constante ou un moment constant, à faire tourner ce corps autour d'un autre axe variable, perpendiculaire à l'axe de figure, mais situé dans un plan fixe.

L'auteur a trouvé les lois suivantes :

Dans la suite du temps, l'axe instantané de rotation du corps ne s'écarte pas sensiblement de l'axe de figure (3), et la vitesse angulaire de *rotation* reste à très peu près constante. L'axe de figure décrit un cône autour de la normale au plan fixe, avec une vitesse angulaire de *précession* sensiblement uniforme et dirigée dans le même sens que la rotation du corps sur son axe, lorsque la force perturbatrice tend à éloigner l'axe de figure de la normale au plan fixe.

Le cône décrit diffère très peu d'un cône droit à base circulaire, ou, en d'autres termes, la *nutation* est négligeable.

Ces lois s'accordent avec la seconde série des expériences de Magnus, relatives au mouvement de rotation des projectiles allongés dans lesquels la résultante des pressions de l'air agit en avant du centre de gravité.

Elles s'appliqueraient aussi à la rotation, considérée isolément, d'un véritable projectile lancé dans l'air, si l'on supposait que la trajectoire du centre de gravité fût rectiligne, que la vitesse de translation fût constante, mais que l'axe de

---

(1) Le Mémoire dans lequel Magnus a décrit ses remarquables expériences a été publié en français dans la *Revue de Technologie militaire*, t. Ier. Les expériences se divisent en deux séries : la première relative aux projectiles sphériques, la seconde aux projectiles allongés.

(2) De Saint-Robert, p. 173 à 250 et 277 à 312.

(3) Il importe de ne pas perdre de vue que cette loi n'est qu'approximative, car, ainsi que Poinsot l'a si bien remarqué, l'axe de rotation ne saurait être immobile dans le corps sans être aussi immobile dans l'espace.

figure du projectile, tout en coïncidant à l'origine avec l'axe instantané de rotation, fît, dès le début, un certain angle avec la direction du mouvement de translation.

Bien que l'auteur ait cru pouvoir négliger l'effet des forces centrifuges, ce qui rend inexacte sa valeur de la vitesse de précession; bien que l'application de cette théorie aux trajectoires réelles (qui sont courbes et dans lesquelles la vitesse de translation est variable) ne soit pas encore éclaircie aujourd'hui, l'analogie a conduit M. de Saint-Robert à admettre que le mouvement conique très lent de l'axe se produit aussi dans les trajectoires réelles, autour de leur tangente variable, le plan normal à la trajectoire remplaçant alors le plan fixe de la théorie précédente.

Il en a déduit l'explication de la dérivation horizontale des projectiles allongés, phénomène que l'on avait attribué jusqu'alors au frottement de l'air, que l'on supposait plus grand à la partie inférieure du projectile qu'au dessus.

Dans un paragraphe spécial (1), il réfute cette ancienne opinion, et prouve que, si le frottement était assez énergique pour produire les déviations que l'on observe, il devrait aussi diminuer notablement, et même annuler dans certains cas, la vitesse de rotation.

Dans l'édition de 1872, l'auteur a ajouté à cette explication une note assez curieuse :

Si le frottement était la cause principale de la dérivation, un projectile oblong et un projectile sphérique, lancés tous deux par une arme rayée, dans les mêmes circonstances, devraient dériver du même côté. Si, au contraire, l'explication vraie résulte des expériences de Magnus, pour les deux espèces de projectiles, leurs déviations doivent avoir lieu dans deux sens opposés, et c'est ce que l'expérience confirme.

Nous avons dit que la valeur trouvée en 1859 par M. de Saint-Robert, pour la vitesse angulaire de précession, était inexacte. Le général Mayevski, en intégrant, pour le cas dont il s'agit, les équations d'Euler, est parvenu,

(1) De Saint-Robert, p. 246 à 250.

en 1865 (1), aux lois indiquées plus haut, sauf que la vitesse de précession n'est que périodiquement uniforme, et il a trouvé, en même temps, la véritable valeur de la vitesse moyenne de précession. Sa méthode est reproduite, avec quelques modifications, dans son Traité actuel (2).

M. de Saint-Robert, à son tour, a repris la question dans son édition de 1872 (3), et a montré comment sa solution géométrique se modifie, par l'introduction des forces centrifuges, de manière à conduire au même résultat que la méthode de M. Mayevski, au moins quant à la vitesse angulaire moyenne de précession. Il donne aussi une démonstration de ce résultat, basée sur l'analyse, et qui, seule, lui indique l'existence de la période.

Ce qui précède est surtout important au point de vue théorique, mais n'est pas directement applicable à la trajectoire réelle, à cause de l'abaissement incessant de la tangente et de la variation du moment de la résistance de l'air.

M. de Saint-Robert avait pensé qu'il suffirait de diviser la trajectoire en arcs assez petits pour que, dans chacun d'eux, la tangente et la résistance pussent être considérées comme constantes pour l'évaluation de la rotation. Chacun des arcs eût été obtenu comme la trajectoire d'un simple point matériel; on aurait trouvé alors la nouvelle position du projectile, au bout de l'arc considéré, par l'intermédiaire de la vitesse angulaire de précession, et ainsi de suite. L'auteur n'a pas appliqué cette méthode à un exemple numérique, mais une application faite, en 1865, par le général Mayevski, avait conduit ce dernier à admettre que l'axe du projectile faisait plusieurs révolutions entières autour de la tangente, résultat qu'il déclare aujourd'hui inexact.

Dans son Traité actuel, M. Mayevski arrive, par une autre méthode, à conclure que l'axe de figure exécute autour de la tangente une suite d'oscillations dont l'amplitude est toujours

---

(1) *Bulletins de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. VIII, et *Revue de Technologie militaire*, t. V.

(2) Mayevski, p. 154 à 171.

(3) De Saint-Robert, p. 224 à 226 et 239 à 245.

moindre que π. Pour montrer clairement le sens que l'auteur attache à cette proposition, nous ne pouvons mieux faire que de reproduire le tableau suivant, relatif au mouvement de rotation d'un obus de 8 centimètres, tiré sous l'angle de projection de 10° avec une vitesse initiale de 305 mètres (1).

TEMPS.	ANGLE DE DEUX PLANS se coupant suivant la tangente dont l'un est vertical et dont l'autre contient l'axe du projectile.	ANGLE de L'AXE DU PROJECTILE avec la tangente.
0" 000	0°	0°00'
1" 273	90°	1°32'
2" 342	133°49'	0°39'
2" 711	90°	0°17'
3" 085	42°6'	0°44'
4" 308	90°	1°54'
5" 478	116°28'	1°10'
6" 116	90°	0°44'
6" 768	56°56'	1°20'
8" 178	90°	2°28'
9" 585	104°21'	1°55'
10" 582	90°	1°29'

Nous nous abstiendrons d'émettre un jugement sur une question dont la difficulté est suffisamment établie par les deux solutions successives et contradictoires du savant géomètre russe, mais nous croyons pouvoir indiquer la principale des raisons qui nous empêchent d'être pleinement convaincu de l'exactitude de la solution actuelle. On a vu que, dans le cas le plus simple, la vitesse de précession n'est pas uniforme, mais seulement périodiquement uniforme. Elle oscille, en réalité, entre zéro et le double de sa valeur moyenne. A l'origine du mouvement et à la fin de chaque période, la vitesse de précession est nulle, et la coïncidence de l'axe instantané avec l'axe de figure est alors absolue. De là résulte que, pour pouvoir adopter une vitesse moyenne, pendant un temps

(1) Mayevski, p. 196.

déterminé et d'ailleurs quelconque, il faut que ce temps soit assez grand par rapport à la durée d'une période. C'est ce que l'on pouvait réaliser, mais au prix d'autres inconvénients ou causes d'erreurs sur lesquels il est inutile d'insister, dans la méthode proposée par M. de Saint-Robert et appliquée d'abord par le général Mayevski. Mais, aujourd'hui, ce dernier fait entrer la vitesse moyenne dans une équation différentielle. Or, l'instant auquel se rapporte cette équation peut appartenir à une partie quelconque de la période, et le temps doit être compté, non pas à partir de l'origine du mouvement de rotation réel du projectile, mais à partir de l'origine inconnue d'un mouvement de rotation fictif, qui aurait amené le projectile dans la position et dans les conditions où il se trouve à l'instant considéré, mais qui aurait correspondu à un courant d'air constant de direction et d'intensité, ou, en d'autres termes, à un mouvement de translation dans lequel la direction du centre de gravité et sa vitesse eussent conservé toujours leurs valeurs actuelles.

On voit donc que cette origine du temps, à laquelle devrait correspondre la coïncidence absolue de l'axe instantané de rotation avec l'axe de figure, est entièrement indéterminée, et dès lors l'équation différentielle l'est aussi.

Il nous semble donc qu'il est permis de révoquer en doute les résultats auxquels cette méthode conduit, et dont on peut voir le détail dans le chapitre IV de la *Balistique* de M. Mayevski.

Nous pensons qu'il serait plus sûr de ne pas se servir du résultat obtenu dans un cas purement idéal, mais de remonter aux équations générales du mouvement de rotation et d'y introduire directement l'hypothèse de la double variation du moment de la résistance de l'air, et du plan qui était fixe dans le cas le plus simple. C'est ce qui a été fait par M. Resal, dans la solution qu'il a proposée récemment pour le mouvement des projectiles oblongs (1).

Mais cette solution renferme plusieurs approximations dont la dernière, celle qui conduit l'auteur aux équations différen-

(1) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 367 à 376 et 386 à 396.

tielles du mouvement de l'axe de figure (1), nous paraît sujette à des objections analogues à celles que nous avons adressées plus haut à la méthode du général Mayevski. Il est remarquable, d'ailleurs, que les résultats des deux savants géomètres soient parfaitement d'accord entre eux, quant aux équations différentielles dont nous venons de parler, abstraction faite des notations.

L'expérience de Magnus, qui confirme les résultats obtenus par MM. de Saint-Robert et Mayevski dans le cas le plus simple, dont il a été question précédemment, pourrait être répétée en rendant variables la direction et l'intensité du courant d'air, comme elles le sont dans le mouvement relatif du projectile réel. Dans cette nouvelle expérience, il faudrait observer autant que possible les lois, aujourd'hui bien connues, de la similitude mécanique, dont nous allons bientôt signaler une application.

Le jour où le mouvement de rotation du projectile aura été exactement déterminé, soit par l'expérience, soit par le calcul, on devra, pour trouver par points les deux projections de la trajectoire (à défaut de méthode plus exacte), diviser cette trajectoire en parties assez petites pour que, dans chacune d'elles, on puisse considérer les forces agissantes comme constantes, pour le mouvement de translation. Chacune de ces parties sera donc un arc de parabole. A l'extrémité de chacun des arcs, on placera le projectile sur sa trajectoire, son axe de figure étant parallèle à celui du projectile fictif que l'on considère dans le mouvement isolé de rotation, après le même temps. La position du projectile, la direction et la vitesse connues de son centre de gravité donneront (soit par les calculs de M. de Saint-Robert, soit encore par des expériences directes) les forces qui agissent dans le parcours de l'arc suivant, et l'on continuera ainsi de proche en proche.

En supposant qu'il soit impossible de trouver le mouvement complet d'un projectile allongé, il est intéressant de déterminer les conditions nécessaires pour que deux projectiles différents décrivent des trajectoires géométriquement sem-

(1) De Saint-Robert, p. 374 et 376.

blables. Nous citerons, à cet égard, le théorème général suivant, dû à M. de Saint-Robert (1) :

Deux projectiles quelconques, qui se meuvent dans des milieux différents, dont la résistance est en raison composée du carré de la vitesse, de l'aire de la surface sur laquelle la résistance s'exerce et de la densité du milieu, décrivent des trajectoires semblables lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1° Que les deux projectiles sont semblables, tant par la forme extérieure que par la constitution interne;

2° Que, sur chacune des trajectoires, il existe un point où la direction de la vitesse du centre de gravité est la même, où les deux projectiles sont disposés parallèlement et où leurs axes instantanés de rotation sont parallèles;

3° Que, dans ces points homologues, les vitesses des centres de gravité des projectiles sont proportionnelles aux racines carrées de leurs dimensions linéaires;

4° Que, dans ces mêmes points, les vitesses angulaires de rotation des projectiles sont réciproquement proportionnelles aux racines carrées de leurs dimensions linéaires;

5° Que les densités des projectiles sont proportionnelles aux densités des milieux résistants.

Ces conditions étant remplies, on aura :

6° Les vitesses des projectiles dans les points homologues des deux trajectoires, les vitesses absolues de rotation en ces points, et les temps nécessaires pour y arriver, proportionnels aux racines carrées des dimensions linéaires des projectiles;

7° Les dimensions linéaires des deux trajectoires proportionnelles aux dimensions linéaires des projectiles.

La condition introduite par M. de Saint-Robert, que la résistance de l'air soit proportionnelle au carré de la vitesse, n'est pas absolument indispensable; mais il faut, tout au moins, que cette résistance s'exprime par un monôme, c'est-à-dire soit proportionnelle à une puissance quelconque, n, de la vitesse.

---

(1) De Saint-Robert, p. 335 à 356.

Alors tout ce qui précède subsiste, sauf que la condition 5° doit être modifiée comme il suit :

Que les densités des projectiles soient en raison composées des densités des milieux résistants et des puissances $n-2$ des vitesses.

En satisfaisant aux quatre premières conditions ci-dessus (dont la deuxième serait remplie à l'origine) et faisant varier la densité de l'un au moins des projectiles, jusqu'à ce que les portées totales fussent proportionnelles aux calibres (7°), on déterminerait approximativement l'exposant moyen n.

Par vérification, les dérivations devraient être dans le même rapport (7°); les durées des trajets et les vitesses finales devraient être proportionnelles aux racines carrées des dimensions linéaires (6°) (1).

SECTION II.

Trajectoires réelles ou accidentelles.

La question de la répartition des trajectoires réelles ou accidentelles, par rapport à la trajectoire normale ou moyenne, constitue une partie de la Balistique peut-être aussi importante que celle qui traite des trajectoires normales elles-mêmes. C'est à regret que nous devons lui donner ici une place beaucoup moindre, mais il n'en est presque pas question dans les ouvrages de MM. Mayevski (2) et de Saint-Robert, et d'ailleurs nous avons été entraîné à donner à la première partie de cette Notice (section I) un développement peut-être exagéré.

---

(1) Sur ces divers points, voir les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2me série, t. XXXVI.

(2) Du moins dans l'édition française. L'édition russe contient, au contraire, quatre chapitres sur ce sujet.

On pourrait diviser l'étude des trajectoires accidentelles en deux parties : la *théorie mathématique des erreurs* et l'*étude des causes d'erreurs ou des causes de déviations* des projectiles.

§ Ier. — Théorie des erreurs.

La théorie des erreurs proprement dite trouverait dans l'artillerie trois applications principales : le calcul des séries servant à relier, par une relation continue, des résultats d'observations (méthode des moindres carrés); la détermination des chances d'atteindre divers buts d'après les écarts constatés dans le tir; enfin, la recherche de la manière la plus rationnelle de diriger et de rectifier le tir dans diverses circonstances. Le général Didion a publié, en 1858, un ouvrage intitulé : *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*, dans lequel il a donné beaucoup de renseignements importants relatifs à la théorie des erreurs.

On trouve, dans la *Balistique* de M. Mayevski (1), des formules précieuses pour l'interpolation par la méthode des moindres carrés, données par M. Tchebychef et encore bien peu connues, quoiqu'elles aient été publiées : les unes en 1859, dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg;* les autres en 1870, dans les *Mémoires* (in-8°) *de l'Académie royale de Belgique.*

M. Tchebychef a considéré le cas des séries de la forme

$$u = F(x)(a + bx + cx^2 + \ldots),$$

dans lesquelles $F(x)$ est une fonction déterminée d'avance, et $a, b, c, \ldots$ sont les inconnues de la question, tandis que l'on connaît des systèmes de valeurs correspondantes : $x_1, u_1; x_2, u_2; \ldots$ en nombre quelconque, des variables x et u.

Pour ce cas spécial, mais très utile, les formules de M. Tchebychef présentent un avantage incontestable sur les formules

(1) Mayevski, p. 267 à 286.

ordinaires de la méthode des moindres carrés, parce qu'elles rendent les calculs moins prolixes lorsque le nombre des termes surpasse deux, et qu'elles permettent de calculer la série terme par terme. De cette manière, d'après la somme des carrés des erreurs avec lesquelles les termes trouvés expriment les valeurs données, somme obtenue par les mêmes formules, on reconnaît tout de suite le terme auquel on peut s'arrêter.

Nous nous proposons de publier, en même temps que la *Balistique géométrique*, notre Exposition de la théorie des erreurs accidentelles, au point de vue des applications à l'artillerie.

§ II. — Étude des causes d'erreurs ou des causes de déviations des projectiles.

Cette étude doit se rapporter principalement aux erreurs accidentelles et aux moyens de les éviter. Elle a été faite avec soin dans la *Balistique* du général Didion et dans le *Cours sur les armes portatives* de M. Cavelier de Cuverville, de la marine française; mais il y aurait peut-être avantage, aujourd'hui, à la reprendre au point de vue spécial du tir des armes rayées, et en séparant d'une manière plus rigoureuse les déviations constantes et régulières des déviations accidentelles.

Nous nous bornerons ici à parler, en terminant, de la seule cause de déviation dont s'occupent les auteurs dont nous avons analysé les œuvres, c'est-à-dire de la déviation due à la rotation diurne du globe.

Remarquons d'abord qu'elle ne peut être considérée comme accidentelle que pour une série très étendue de résultats obtenus par plusieurs tirs exécutés, soit à diverses latitudes, soit dans des directions différentes.

Dans un tir déterminé, l'erreur, se manifestant dès le premier coup, peut être corrigée comme les erreurs constantes, et rentre alors dans la catégorie de ces dernières.

Cette observation peut s'appliquer à un assez grand nombre de causes de déviations, qui ne deviennent accidentelles que

lorsqu'on réunit les résultats du tir de plusieurs bouches à feu ou de plusieurs époques différentes.

Poisson s'est occupé, en 1837 (1), de l'influence du mouvement diurne sur la trajectoire des projectiles de l'artillerie. Mais l'analyse de cet illustre géomètre est assez laborieuse, et M. de Saint-Robert l'a remplacée, en 1858 (2), par une méthode purement géométrique. Après avoir cherché le sens des déviations qui peuvent se produire dans les différents tirs, il en calcule la grandeur.

Sans entrer dans le détail de sa méthode, nous citerons, pour fixer les idées sur le degré d'importance de cette étude, le résultat numérique suivant :

Un canon de 16 centimètres, rayé au pas de 3^m77 *(dextrorsum)*, tirant, à la charge de 3 kilog. de poudre, un projectile oblong du poids de 30 kilog., sous l'angle de 25° (tir à 5,000 mètres), successivement dans les azimuts de 143°49' (donc à peu près vers le Sud-Est), et de 323°49' (donc en sens inverse du premier tir), donneraient des déviations à droite dont la différence serait 2^m88. La déviation la plus grande aurait lieu dans le tir vers le Sud-Est.

L'auteur fait observer que, eu égard à la grande justesse du tir des canons rayés, on devrait pouvoir apprécier ces différences de déviation dans les moyennes de longues séries d'épreuves; on les apprécierait certainement, si l'on consentait à diriger des expériences vers ce but, plus scientifique que militaire.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 26me cahier.
(2) De Saint-Robert, p. 357 à 404.

EXAMEN COMPARATIF

DE LA COMPOSITION CHIMIQUE

DU SABLE DES DUNES

DU DÉPARTEMENT DE LA GIRONDE

ET DE

CELLE DES CENDRES DES VÉGÉTAUX

qui croissent à leur surface

PAR A. BAUDRIMONT ET J. DELBOS

La végétation qui s'accomplit sur les dunes mérite d'attirer l'attention des observateurs. Ces immenses amas de sable, rejetés par l'Océan, transportés et accumulés par le vent, sembleraient, au premier abord, ne pouvoir entretenir la vie des végétaux. Effectivement, pour que ce phénomène s'accomplisse, il faut, non seulement qu'ils puissent se fixer dans le sol par leurs racines, mais il faut de plus que ces dernières y trouvent les produits indispensables à leur alimentation, ainsi que l'eau qui peut dissoudre ces dernières et les transporter dans toutes les parties de l'être qui les réclame.

Il y a là plusieurs problèmes à résoudre.

Les végétaux peuvent-ils se passer de matières minérales? ou s'il leur en faut et s'ils en consomment réellement, d'où viennent-elles?

N'y a-t-il pas là aussi quelques éclaircissements à tirer sur la production de la matière organique?

La chimie pouvant intervenir dans la solution de ces ques-

tions, on est conduit à examiner, d'une part, la composition de cette terre qui, au premier abord, paraît exclusivement formée de sable siliceux, et, d'autre part, la composition des cendres abandonnées par la combustion des végétaux.

Il y avait encore à se demander si toutes les plantes consomment les matières minérales dans le même rapport, et si quelques-unes d'entre elles, les plus humbles par exemple, ne se contenteraient pas du superflu abandonné par les végétaux arborescents.

Les végétaux qui croissent spontanément ou par le semis sur les dunes d'Arcachon sont principalement :

Le pin (*Pinus pinaster*, SOLANDER).

Un chêne à feuilles profondément découpées (*Quercus toza*).

L'arbousier (*Arbutus unedo*, L.).

Le houx (*Ilex aquifolium*).

Le genêt (*Sarothamnus scoparius*, WIMM.).

L'ajonc (*Ilex europœus*, L.).

Deux espèces de bruyères (*Erica cinerea*, et *Er. scoparia*, L.).

La fougère (*Pteris aquilina*, L.).

Dès l'annnée 1854, ces plantes, après avoir été desséchées, ont été brûlées et réduites en cendre sur des tuiles canaliculées. Malheureusement il n'y a que cinq de ces cendres qui aient pu être analysées, à cause du temps considérable que chacune d'elles a exigé, principalement parce que plusieurs procédés ont été employés pour avoir, autant que possible, des résultats positifs.

Les cendres analysées ont été celles du *Pinus pinaster*, du *Quercus toza*, du *Sarothamnus scoparius*, de l'*Ilex aquifolium* et du *Pteris aquilina*. Encore cette dernière analyse a-t-elle été incomplète. Quoi qu'il en soit, les résultats obtenus suffisent pour donner une idée précise des phénomènes qui s'accomplissent dans les dunes, et des difficultés qu'il reste à surmonter pour en avoir une idée entièrement satisfaisante.

EXAMEN DU SABLE DES DUNES.

Ce sable est en grains assez grossiers, ainsi qu'on va le voir, il est d'un blanc sensiblement rougeâtre, qui semble indiquer la présence du fer. Lorsqu'il est sec, ses parties sont très mobiles, et l'on peut comprendre alors qu'il soit entraîné par le vent.

Un kilogramme de sable sec des dunes a été tamisé successivement dans deux tamis : l'un de soie et l'autre en fil de fer très serré. Il s'est ainsi partagé en trois parties.

1° Sable fin d'un diamètre de 0mm30 à 0mm35.....	82gr6
2° Sable moyen dont le diamètre variait de 0mm40 à 0mm50...	830 7
3° Sable grossier dont le diamètre, de 0mm60, atteignait 1mm00.	86 7
	1,000gr0

Un décilitre du sable des dunes pèse 162 grammes. Si l'on en remplit les interstices avec de l'eau, il pèse 200 gr. 3; d'où il résulte qu'il a fallu 38 gr. 3 d'eau pour obtenir ce résultat.

Le décilitre ayant une capacité de 100 centimètres cubes, l'eau en représentant 38,3, il en résulte que la différence, ou 61,7 représente le volume du sable en centimètres cubes.

Le poids du sable, 162 grammes, divisé par son volume, 61,7, donne 2,625 pour quotient. Nombre qui est sensiblement la densité du quartz, 2,65, qui est généralement admise.

Il résulte de ce fait que les espaces capillaires du sable des dunes sont les 0,383 de son volume total, et que cet espace est à celui occupé par le sable, comme 383 est à 617.

En chauffant 10 grammes de ce sable avec de la chaux sodée, il a constamment donné de l'ammoniaque, dont la quantité a été déterminée, et qui indique qu'il contient 0,000375 à 0,000625 d'azote.

Le sable analysé a été pris sur une dune qui est située en face et un peu sur la gauche du débarcadère du chemin de fer d'Arcachon, en lui tournant le dos.

Voici les résultats donnés par deux de ces terres : l'une, prise à la partie supérieure ; l'autre, à la partie inférieure de cette dune.

Sable des dunes recueilli à Arcachon (Gironde).

	PARTIES	
	Supérieure.	Inférieure.
Humidité	0,3500	0,1000
Matière combustible { Azote	0,0375	0,0625
Matière combustible { Complément	1,1125	0,6375
Fer sesquioxydé	0,2260	*traces*
Chaux, magnésie, potasse, soude, Manganèse et acide phosphorique	0,5200	0,3100
Sable siliceux	97,7540	98,8900
	100,0000	100,0000

Un échantillon de sable, pris à la partie moyenne de la dune, a donné exactement la même quantité d'azote que celui pris à la partie supérieure.

La chaux, la magnésie, la potasse, la soude et l'acide phosphorique ont pu être reconnus et séparés, en opérant sur 400 grammes de sable.

Il serait important de connaître l'état de combinaison de l'azote, mais cela ne pouvait être l'objet que d'une étude spéciale, qui pourra être faite ultérieurement.

D'une autre part, l'analyse de ces mêmes sables a été faite en opérant sur une quantité plus considérable de matière.

Il eût été convenable d'opérer sur plusieurs kilogrammes de sable ; mais les échantillons prélevés, et qui avaient servi pour faire les premières analyses, n'ont pas permis de le faire sur plus de 400 grammes.

Le sable de la partie supérieure de la dune, soumis à des lavages à l'eau distillée bouillante, a donné un produit soluble qui, recueilli par l'évaporation à une température peu élevée, pesait $0^{gr}260$, soit $0^{gr}650$ pour un kilogramme.

Ce produit était noir et contenait une quantité considérable de matière organique. Par la calcination, après avoir été repris par une dissolution de carbonate d'ammoniaque, le résidu, alors entièrement formé de matière minérale, ne pesait plus que 0gr048, soit 0gr120 pour 1 kilogramme.

Ce résidu a été soumis à l'analyse, et, malgré son faible poids, il a été possible d'y reconnaître de la potasse, du phosphate de fer, de l'oxyde de fer et du manganèse. Il y avait peut-être de l'alumine; mais on ne s'en est point assuré.

Le sable de la partie inférieure de la même dune a donné des résultats fort distincts des précédents. 400 grammes de ce sable, traités de la même manière que le sable de la partie supérieure, ont donné un résidu ne pesant que 0gr095, soit 0gr2375 pour 1 kilogramme de sable. Le résidu de la combustion ne pesait que 0gr018, soit 5 millionièmes du poids du sable, soit encore 24 fois moins que celui de la partie supérieure.

L'analyse de ce résidu a été commencée, mais n'a pu être terminée.

Les opérations qui viennent d'être signalées peuvent se résumer ainsi qu'il suit :

Produits solubles des sables des dunes

pour 1000 parties pondérales.

	PARTIES	
	Supérieure.	Inférieure.
Matières organiques volatiles et combustibles	0,6020	0,2195
Matières minérales.....	0,0480	0,0180
	0,6500	0,2375

Il résulte de cette comparaison que les matières solubles dans l'eau sont plus abondantes dans la partie supérieure des dunes que dans leur partie inférieure, et que la matière miné-

rale, comparée à la matière organique au point de vue de leurs quantités relatives, s'y trouve à peu près dans le même rapport, soit environ un douzième.

Il résulte de ces faits, ainsi que des analyses qui précèdent, que le sable de la partie supérieure des dunes est beaucoup plus riche en produits utilisables par les végétaux que celui de la partie inférieure, résultat qui, on n'en peut douter, est dû à l'accumulation qui s'est faite à la partie supérieure de ces collines, par les végétaux qui y ont vécu et y ont laissé leurs restes pendant un temps sans doute considérable, qui a permis aux matières qui entraient dans leur constitution de se condenser dans l'endroit même où ils existaient.

EXAMEN CHIMIQUE ET COMPOSITION DES CENDRES.

Les cendres ont été analysées avec le plus grand soin. Tous les produits qui les constituent ont été séparés et dosés. Pour le sujet qui nous occupait, une seule analyse complète eût été plus utile qu'un grand nombre d'analyses, dont plusieurs éléments fussent restés indéterminés. C'est même dans cette intention qu'une première analyse a été faite sur un mélange de cendres, provenant de quatre plantes différentes : le pin, l'arbousier, l'ajonc et la bruyère commune.

Ajoutons encore que les analyses ont été répétées deux et même trois fois par des procédés différents, et qu'elles ont donné des résultats très concordants, au moins au point de vue des éléments constituants des cendres.

Voici la composition de la cendre des quatre plantes qui viennent d'être nommées, en en retranchant le sable et le charbon. Cette analyse a été faite à titre d'essai.

Pour 1000 parties.

Potasse	46	
Soude	221	
Chaux	289	298
Magnésie	75	90
Oxyde ferrique	31	25
Chlorure sodique	33	
Acide carbonique	242	
— sulfurique	35	
— phosphorique	42	69
— silicique	53	
	1067	

Cette seule analyse eût permis de résoudre la question qui nous préoccupait. On y trouve en effet tous les produits que l'on rencontre dans les cendres des végétaux recueillis dans d'autres circonstances.

Cendres du pin maritime des Landes ***(Pinus pinaster).***

Potasse	28	77	114	»
Soude	110	»	55	»
Chaux	292	291	»	»
Magnésie	62	»	»	»
Oxyde de fer	21	»	»	»
Acide phosphorique	28	102	28	50 (1)
— sulfurique	10	20	»	»
— carbonique	268	339	»	»
— silicique	14	»	»	»
Chlorure sodique	4	8	»	»
Charbon et sable	20	»	»	»

Cendres du chêne ***(Quercus toza).***

Potasse	60	78	»
Soude	37	42	»
Chaux	262	240	300
Magnésie	64	68	78
Oxyde de fer	8	10	»
— de manganèse	36	12	»
Acide phosphorique	50	»	»
— sulfurique	16	14	»
— carbonique	229	»	»
— silicique	36	»	»
Chlorure sodique	2	»	»
Sable et charbon	132	»	»

(1) La différence des résultats obtenus tient aux procédés qui ont été employés. Quoi qu'il en soit, quels qu'ils aient été, ils ont affirmé la présence de l'acide phosphorique et de la potasse en grande quantité, et c'était là le but principal que nous nous proposions d'atteindre.

Cendres du houx (*Ilex aquifolium*, L.).

Partie soluble dans l'eau	320 — 325	
Partie insoluble dans le même véhicule	680 — 675	
Potasse	121	»
Soude	80	»
Chaux	236	»
Magnésie	147	»
Oxyde de fer	23	»
— de manganèse	51	»
Acide phosphorique	18	27
— sulfurique	58	59
— carbonique	158	»
— silicique	64	»
Chlorure sodique	5	»
Sable et charbon	20	»

Les deux analyses restantes n'ayant été faites que par une seule méthode, et n'ayant par conséquent donné qu'un seul chiffre pour chaque substance, elles se trouvent introduites immédiatement dans le tableau suivant, sous les nos V et VI.

	I	II	III	IV	V	VI
Potasse	46	114	73	121	150	»
Soude	221	35	42	80	57	»
Chaux	289	292	267	236	221	114
Magnésie	75	62	68	147	118	51
Oxyde de fer	31	21	10	23	22	»
— de manganèse	»	12	36	51	66	»
Acide phosphorique	42	50	50	18	32	18
— sulfurique	35	15	15	58	13	»
— carbonique	242	339	229	158	142	»
— silicique	53	14	14	64	92	520
Chlorure sodique	33	4	3	5	13	48
Sable et charbon	»	20	132	20	73	20
	1067	978	939	981	999	»

I. Cendres mélangées du pin, de l'ajonc, de l'arbousier et de la bruyère.
II. Cendre du pin maritime *(Pinus pinaster; pinus maritima,* L).
III. Cendre du chêne *(Quercus toza).*
IV. Cendre du houx *(Ilex aquifolium,* L.).
V. Cendre du genêt *(Sarothamnus scoparius,* Wimm.).
VI. Cendre de la fougère *(Pteris aquilina,* L.).

Il résulte des faits consignés dans ce travail, que les cendres des végétaux qui croissent sur les dunes contiennent tous les

produits que l'on a rencontrés dans les mêmes végétaux croissant dans d'autres terrains.

On y trouve la potasse, la soude, la chaux en quantités très notables; la magnésie, qui est quelquefois abondante; l'oxyde de fer et même l'oxyde de manganèse. L'acide phosphorique et l'acide sulfurique s'y rencontrent également, et le chlorure sodique, qui, sans un examen approfondi, paraîtrait devoir y dominer, y est en très faible quantité. C'est ce qui, d'une autre part, a été donné par les eaux de lavage des sables des dunes : l'acide sulfurique y domine relativement au chlore.

D'où viennent ces produits?

L'acide phosphorique, le fer, le manganèse n'ont point encore été trouvés dans l'eau de la mer; mais ils y existent certainement, puisqu'il y a dans ces eaux des êtres dont le squelette contient du phosphate de chaux, et du sang rouge où le fer ne manque pas.

Il est certain que si l'on faisait l'analyse des eaux de la mer sur une échelle suffisante, que la chimie permettrait d'y trouver ces corps. Il n'est nullement douteux pour moi que les eaux mères des salines ou les produits solides abandonnés pendant l'évaporation de l'eau de mer, contiennent des phosphates, et l'on est en droit d'espérer qu'ils seront un jour exploités et donneront à l'agriculture une source inépuisable d'un produit indispensable à l'entretien d'un sol arable.

Cependant, on peut se poser cette question :

Est-ce bien l'eau de la mer qui fournit les produits minéraux trouvés dans les cendres des végétaux qui croissent sur les dunes, ou bien ont-ils une autre origine?

Il y a déjà une vingtaine d'années que l'un de nous a appelé l'attention des agronomes sur les courants interstitiels du sol arable (1). Le sol est pénétré de liquides qui y circulent et qui

(1) *De l'existence des courants interstitiels dans le sol arable, et de l'influence qu'ils exercent sur l'agriculture*, par A. Baudrimont. — Brochure in-8°. Bordeaux, Chaumas, 1852.

transmettent aux végétaux, lentement et à mesure de leurs besoins, les produits qui sont indispensables à leur existence et à leur évolution. Ces eaux, il est possible de les recueillir et de les soumettre à l'analyse. Elles donneront le produit du lavage d'une masse de terrains; mais elles ne permettront pas encore de résoudre la question.

Il a existé et il existe encore à Arcachon, qui est situé entre un vaste bassin communiquant avec l'Océan et des dunes considérables, des puits donnant de l'eau douce, susceptible d'entrer dans la consommation. Ces eaux ne deviennent salées que quand elles sont prises à une cinquantaine de mètres du bord du bassin. Il résulte de faits que nous avons observés avec attention que ces eaux venant des dunes ne sont nullement salées, et qu'elles ne le sont réellement que dans les circonstances indiquées. Cependant, sans être fortement salées, celles qui sont puisées à peu de distance du bassin sont quelquefois sujettes au flux et au reflux. Ce qui est dû, sans aucun doute, à ce que le flux élevant le niveau des eaux s'oppose à l'écoulement de celle qui est contenue dans les puits.

Avant la construction du Casino, en 1854, l'un de nous a pris 4 litres d'eau dans le puits dit *du Résinier*. Cette eau était légèrement colorée et tenait en suspension une quantité très notable de matière organique, en fragments noirâtres, ou plutôt d'un brun foncé, que quelques personnes considéraient comme le détritus des racines de l'arbousier, qui croît en assez grande abondance sur les dunes d'Arcachon. 4 litres de ces eaux ont été évaporées sur les lieux mêmes et réduites à 1 décilitre environ, avec l'intention de les soumettre à l'analyse. Elles n'ont donné aucun dépôt de carbonate calcaire, comme la plupart des eaux potables le font. Il y a peu de jours que, voulant enfin terminer cette analyse, le flacon qui renfermait ce résidu a été ouvert. La partie vide était remplie d'hydrogène sulfuré, et, en présence de l'air, le liquide s'est fortement troublé par du soufre, qui est devenu libre et est demeuré en suspension.

Le seul renseignement que l'on puisse tirer de ce fait, est que l'eau examinée ne contenait que peu ou point de bicarbonate calcaire, et renfermait une quantité très notable de sulfate qui a été réduit par la matière organique.

Il existe sur les dunes du rivage de l'Océan de vastes étangs remplis d'eau douce. Le niveau de ces eaux est de 19 mètres au-dessus de celui de l'Océan, d'après les cartes de l'état-major.

L'analyse de ces eaux eût offert un grand intérêt pour la question qui nous occupe; mais nous n'avons à cet égard qu'un renseignement de l'ordre positif, qui nous a été fourni par M. Fauré.

Les eaux des trois étangs suivants laissent par l'évaporation un résidu fixe qui est pour 1 litre :

Lacanau	0gr168
Hourtins	0 190
Cazeaux ou Sanguinet	0 196

On voit que ce résidu n'atteint pas 2 dix-millièmes. Il est peu d eaux aussi pauvres en matières minérales.

Cela démontre de la manière la plus évidente qu'elles ne viennent pas de la mer. Elles peuvent en grande partie être produites par les pluies; mais ne pourraient-elles pas avoir aussi pour origine de l'eau venue des montagnes circonvoisines et surtout des Pyrénées? Cette dernière opinion est surtout fortifiée, pour l'eau qui alimente la végétation des dunes, par la présence du fer en quantité notable et par celle de l'acide phosphorique que les eaux de pluie ne pourraient donner qu'en quantité excessivement minime.

Ce qui vient d'être dit des étangs des dunes est applicable à l'eau qui imprègne ces dernières.

La pauvreté de ces eaux, relativement aux produits minéraux qu'elles contiennent, peut servir pour expliquer comment les étangs qu'elles alimentent sont si peu peuplés de poissons.

En effet, pour avoir des animaux de cette classe, il leur

faut de la nourriture, et ces eaux, si pauvres en matières fixes, ne peuvent alimenter une végétation suffisante pour nourrir des poissons en quantité notable. Si les poissons herbivores ne peuvent vivre qu'en très petite quantité dans ces bassins, il en résulte que les brochets et les poissons carnivores ne peuvent y être aussi qu'en quantité très minime. Aussi, y a-t-il déjà bien des années que l'un de nous, dans son cours de chimie agricole, a exposé que la première question à résoudre pour peupler ces bassins et trouver une rémunération dans leurs produits, était de modifier la nature du sol situé sous l'eau par des amendements dont il a donné l'origine et la composition, afin d'avoir une végétation abondante et convenant à la nourriture des poissons.

En résumé, les dunes qui sont dans le voisinage d'Arcachon sont formées d'un sable grossier, dont les espaces vides, évalués à 38 centièmes de leur volume total, sont pénétrés par des liquides qui ne paraissent en aucune manière venir de l'Océan.

Ces liquides contiennent tous les matériaux propres à entretenir la végétation, mais en quantité si minime qu'ils sont insuffisants pour la plupart des végétaux.

Les sables des dunes sortant, à n'en pas douter, des eaux de l'Océan, il est difficile de se rendre compte des produits qui s'y sont fixés et qui sont peu à peu dépensés pour entretenir la vie à leur surface. D'où viennent ces matériaux? Comment le triage s'en est-il fait? Ce sont des questions que nous n'avons fait qu'effleurer et qui demandent encore le secours de la science pour être élucidées.

CONSTITUTION & COMPOSITION CHIMIQUE

DES DIFFÉRENTS

SOLS DU DÉPARTEMENT DE LA GIRONDE

PAR A. BAUDRIMONT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

Travail exécuté en 1869

L'étude du sol arable a été négligée jusqu'à ce jour. Si des analyses ont été faites, on ne les a point réunies et l'on n'a pas cherché à en tirer les conséquences générales qui peuvent en être déduites. Elle offre cependant un bien vif intérêt tant au point de vue de l'agrologie qu'à celui de la géologie.

La connaissance de la composition du sol arable, l'étude des différentes parties qui le constituent, donnent des renseignements positifs sur son origine. C'est, du moins, ce qui m'a été révélé d'une manière indubitable pour les terres que j'ai eu l'occasion d'examiner, quelle qu'en ait été la provenance. De cet examen, si incomplet qu'il ait été, il est toujours résulté des indications précises et précieuses relatives à l'agrologie et spécialement à l'agriculture, qui est la partie pratique de cette science; agriculture qui offre un intérêt puissant par le rôle qu'elle joue dans l'ordre social des nations.

Ne pouvant aborder le sujet dans son ensemble, j'ai dû me borner à l'étude du département de la Gironde, et encore cette étude a-t-elle été fort incomplète par suite du temps considérable que réclament des travaux de cette nature.

Je saisis cette occasion avec empressement pour adresser

des remercîments à M. H. Duponchel, qui s'est occupé de ces travaux avec un zèle, un talent et un dévouement qui sont au-dessus de tout éloge.

Une foule de questions se rattachent à la connaissance chimique complète du sol arable et l'analyse est la base principale sur laquelle il convient de s'appuyer. L'agrologie, comme toutes les sciences naturelles, comprend une partie statique qui nous est révélée par ce premier ordre de travaux, et une partie dynamique, à peine effleurée aujourd'hui, et qui, nous n'en pouvons douter, donnera dans un avenir prochain une science nouvelle : celle des phénomènes qui s'accomplissent dans le sol arable; science qui sera à la simple connaissance de la composition et de la constitution du sol, ce que la physiologie est à l'anatomie.

Tous les ans j'aborde ce sujet dans mon cours de chimie agricole, et j'ai déjà réuni un assez grand nombre de matériaux pour en démontrer l'importance; mais il y aurait lieu d'entreprendre de nombreuses expériences et des travaux considérables, afin d'en établir les principes d'une manière positive et certaine.

Dès l'année 1852, j'ai publié une notice sur les courants interstitiels du sol arable; mais ce n'est là qu'une faible partie de ce qui est à faire; elle traite un sujet d'une grande importance, il est vrai, mais elle n'aborde qu'un côté de la question.

Si je donne ici quelque développement à cette pensée, c'est pour en démontrer l'immense utilité et pour appeler l'attention des expérimentateurs sur cette partie de la science qui ne fait que poindre à l'horizon, mais qui, n'en doutons pas, jettera une vive lumière sur des faits du premier ordre, dont la connaissance est indispensable à notre état social.

C'est en se basant d'ailleurs sur les phénomènes qui viennent d'être signalés que l'on comprend et l'importance des analyses de terres arables et les procédés qui doivent être employés pour les faire.

Une simple analyse faite sur quelques grammes de terre fait connaître la nature et les proportions des éléments principaux qui les constituent; mais elle est insuffisante pour faire connaître tous les éléments qui interviennent dans la végétation.

Les eaux qui circulent dans le sol et dans le sous-sol n'apportent-elles pas incessamment des produits qui sont absorbés par les radicules des plantes, et ces produits peuvent être en si faible quantité dans quelques grammes de terre qu'il soit impossible d'en signaler l'existence.

La composition des cendres des végétaux ne nous révèle-t-elle pas la présence, dans le sol, du potassium, du sodium, du phosphore à l'état de combinaison? et ces produits ne sont indiqués que très rarement dans les analyses ordinaires. Or, pour les obtenir en quantité notable et les doser, il convient d'agir, non point sur quelques grammes, mais sur des kilogrammes et même des centaines de kilogrammes. C'est par des lavages à l'eau distillée et à l'eau acidulée que l'on finit par avoir des produits faciles à reconnaître et à doser, et que l'on peut en chercher l'origine et savoir comment ils interviennent dans la biologie végétale.

C'est ce dernier procédé que je voudrais voir mettre en pratique, à cause des renseignements de premier ordre qui en résulteraient; mais je ne fais que l'indiquer, et n'ai pu le suivre moi-même que dans des cas exceptionnels.

Je donnerai le plus brièvement possible le procédé qui a été suivi pour l'analyse des terres. Elles ont toutes été soumises à deux modes d'examen distincts : à une analyse mécanique par de simples tamisages ou des lavages, et à une analyse chimique. Pour ce dernier mode d'analyse, les terres ont été desséchées pour en avoir la quantité d'humidité. Toutes ont été calcinées et ramenées à l'état de carbonate, quand cela devait être, par le carbonate d'ammoniaque, afin d'avoir la quantité de matière organique. L'azote a été dosé à part. Le produit calciné a été traité par l'eau. Celle-ci évaporée, nous

avons pu connaître la quantité de matière soluble. Le produit de l'évaporation a été soumis à l'analyse. Le résidu du traitement par l'eau a été soumis à l'action du chlorure hydrique dilué, et l'on y a cherché le fer, le manganèse, la chaux et la magnésie. Le résidu insoluble a été desséché et pesé.

Le traitement par l'eau, appliqué à 400 grammes du sable des dunes, a donné par l'évaporation 0 gr. 260 de résidu fixe, soit 0 gr. 650 pour 1 kilogramme. 10 kilogrammes en eussent donné 6 gr. 5 qui en eussent permis une analyse et une étude complètes.

Il y a donc un intérêt réel à faire des recherches sur des quantités de produits assez considérables pour que l'on puisse obtenir des renseignements en harmonie avec les besoins de la science.

Le sol du département de la Gironde est très variable et présente des différences aussi considérables que possible.

On distingue essentiellement :

1° Les dunes; 2° les landes; 3° une longue bande de terre nommée *Grave,* située sur la rive gauche de la Garonne et de la Gironde; 4° des terres d'alluvion dites de *Palus,* situées sur les rives de la Garonne et de la Dordogne; 5° des terres appartenant à des terrains tertiaires existant dans l'espace qui porte le nom d'*Entre-deux-Mers* et au delà de la Dordogne, dans la partie située au Nord; 6° enfin, des marais.

I

DUNES.

Les dunes forment une longue bande sur le bord de l'Océan Atlantique, qui s'étend de l'embouchure de la Gironde jusque très avant dans le Sud.

Elles sont formées d'un sable siliceux, grossier et roulé, qui a été décrit dans le travail spécial aux dunes.

On trouve sur ces dernières de vastes étangs d'eau douce, dont le niveau, selon la carte de l'état-major, est à 19 mètres au-dessus de celui de l'Océan.

Un de ces étangs communique avec la mer, c'est le bassin d'Arcachon; bassin qui, par cela même, échappe aux conditions générales des étangs d'eau douce.

Le pin maritime, *Pinus pinaster* Solander, a été planté sur les dunes pour les maintenir en place et empêcher que le vent ne les pousse vers les plaines continentales.

Plusieurs plantes croissent spontanément sur les dunes : l'arbousier, l'ajonc épineux, le genêt ordinaire, deux espèces de bruyères, et quelques autres plantes moins importantes.

Il y a quelques années que M. Jacquot, ingénieur en chef des mines à Bordeaux, chargé d'une mission sur le bord de l'Océan, a reconnu que le pin maritime y dépérissait. Je l'ai vu également à l'embouchure de la Gironde, dans les environs de Soulac. Espérons qu'il sera facile de le remplacer lorsqu'il en sera besoin.

L'analyse du sable des dunes, pris à la partie supérieure et à la partie inférieure de l'une d'elles, a donné des résultats qui ont été publiés à part dans les *Actes* de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux : *Examen comparatif de la composition chimique du sable des dunes du département de la Gironde et de celle des cendres des végétaux qui croissent à leur surface.* Un résumé très succinct a été aussi publié dans le Compte-rendu de l'Association française pour l'avancement des sciences, 1re session. Bordeaux, 1872, p. 549.

Sur la carte qui accompagne ce Mémoire, les terres des dunes sont notées I et II.

II

LANDES.

Les landes, dites *de Gascogne,* sont représentées par une plaine immense qui, d'une petite distance des bords de la Garonne et de la Gironde, s'étend au travers du département des Landes et jusque dans celui des Basses-Pyrénées.

Le sol des landes est essentiellement formé de sable siliceux roulé. Lorsque la matière qui le forme contient des débris organiques qui lui donnent une teinte presque noire, il porte le nom de *terre de bruyère.*

La chaux ne s'y trouve généralement qu'à l'état de traces. Cependant le calcaire fait quelquefois saillie dans les landes : au Thil, où est une des sources dont l'eau alimente Bordeaux; à Salles, où l'on trouve de belles coquilles fossiles; à Léognan, où il est exploité.

Dans les lieux où des végétaux sont apparus, soit spontanément, soit de toute autre manière, ces végétaux ont recueilli, pendant un grand nombre de siècles, les produits qui leur ont été apportés par les eaux, et les ont délaissés sur le sol, soit qu'ils aient péri spontanément, soit qu'on les ait détruits par l'incendie. Le sol a donc pu se modifier et s'enrichir quelque peu par ces résidus abandonnés par ces végétaux; mais cette richesse est faible, et la moindre culture régulière l'a bientôt épuisée, ainsi que cela arrive dans les landes de la Basse-Bretagne, quoiqu'elles ne soient pas constituées comme celles de la région du Sud-Ouest.

Les parties inondées pendant une grande partie de l'année présentent aussi quelques modifications dans la nature des terres; mais ces parties vont en diminuant par suite des travaux dits *drainage à ciel ouvert,* dont M. Chambrelent a eu principalement l'initiative dans ces contrées.

Les landes présentent généralement un sous-sol imperméable qui exerce une influence considérable sur la vie des

végétaux, et par suite sur l'agriculture. Ce sous-sol est de deux espèces différentes : l'un est argileux, et forme une bande qui s'étend de Sainte-Hélène à Salaunes, à Pessac, à Gradignan, à Canéjean et à Belin; l'argile qui le forme est exploitée dans tous les lieux cités, et elle est essentiellement propre à la confection des briques réfractaires (1). L'autre sous-sol ressemble à un grès ferrugineux ou à un minerai de fer, formé de limonite rouge ou brune, paraissant, dans ce dernier cas, colorée par du manganèse. Mais il n'en est rien : ce produit, soit par la décomposition spontanée, soit par la combustion, laisse souvent un résidu parfaitement blanc de sable siliceux, absolument semblable à celui de la localité. Il porte le nom d'*alios* ou de *tuf*. Il a été analysé par Fauré.

Voici les résultats de son travail publié en 1847 :

Alios de couleur noire.

Sable	88 à 90 parties.
Matière végétale	10 à 12 parties.

Cette matière végétale est formée de :

Géine ou ulmine	5 à 6 parties.
Extrait de terreau	1 à 2 parties.
Albumine végétale	2 à 3 parties.

La calcination de 100 parties de cette matière végétale desséchée donne 16 à 17 parties de cendres formées d'alumine, de silice, d'oxyde de fer et de chaux.

L'alios de couleur jaune contient :

Sable	92 à 95 parties.
Matière végétale	5 à 8 parties.

Cette matière végétale est formée de :

Extrait de terreau	2 parties.
Géine	1/2 partie.
Albumine végétale	2 parties.
Pectine	1/2 partie.

(1) Des briques faites à Canéjean, sur des indications que j'ai données, ont résisté, dans plus de cent opérations, à une température à laquelle le platine entrait en fusion.

100 parties de cette matière végétale sèche donnent 26 à 30 parties de cendre, contenant oxyde de fer, alumine, silice et chaux.

Voulant vérifier la présence de l'albumine dans l'alios, j'ai déterminé la quantité d'azote qu'il contient. Voici les résultats obtenus :

Alios jaune brun en masse.....	0,001641
— sous forme scoriacée.....	0,000965
— brun très foncé.....	0,001641

Cette quantité d'azote ne peut représenter au plus qu'un centième de matière albuminoïde dans ce produit.

D'une autre part, j'ai obtenu les résultats suivants, où l'azote qui vient d'être indiqué figure de nouveau.

COMPOSITION DE PLUSIEURS ÉCHANTILLONS D'ALIOS

RECUEILLIS A CESTAS, DANS LA PROPRIÉTÉ DE FEU M. FIEFFÉ

I

Alios jaune brun en masse.

Poids du décilitre (après pulvérisation)..... 1529r2

Matières organiques 0,027	Azote.....	0,001641
	Complément.....	0,025359
Résidu minéral.....		0,973000
		1,000000

II

Alios jaune brun ayant une apparence scoriacée.

Poids du décilitre (après pulvérisation)..... 1659r6

Matières organiques 0,030	Azote.....	0,000965
	Complément.....	0,029035
Matières minérales.....		0,970000
		1,000000

III

Alios brun très foncé.

Poids du décilitre (après pulvérisation)..... 1360r0

Matières organiques 0,026	Azote.....	0,001641
	Complément.....	0,024359
Matières minérales.....		0,974000
		1,000000

Dans ces analyses, la quantité de matière minérale ou de sable siliceux demeure constamment les 0,97 du produit. Cette quantité est supérieure à celle obtenue par Fauré, et elle démontre que l'alios pris dans des localités différentes peut contenir plus ou moins de matière organique.

L'alios n'a quelquefois que 8 à 10 centimètres d'épaisseur; il se trouve à environ 30 centimètres de la surface du sol et en suit les ondulations. Aussi, dès l'année 1852, ai-je dit, dans un travail sur les courants interstitiels du sol, que l'alios était de formation moderne, et qu'il était dû à la végétation même pour laquelle il est aujourd'hui un si puissant obstacle. Cette opinion a été reproduite par M. A. Duponchel, dans son Avant-Projet sur la création d'un sol fertile à la surface des landes de Gascogne (in-8°, Montpellier, 1864). Elle l'a été aussi plus récemment encore par M. Faye, de l'Institut.

Le sous-sol des landes s'oppose à l'ascension de l'eau qui est à sa partie inférieure, et quand celle qui le recouvre est évaporée, ce qui arrive au plus tard vers la fin de juillet, la végétation s'éteint. Ce fait est l'un de ceux qui s'opposent le plus à la culture des landes.

Il y a bien longtemps que j'ai dit qu'en perçant ce sous-sol en plusieurs endroits il donnerait passage à de l'eau qui pourrait entretenir la végétation. Ce fait a été mis en pratique. Il est même possible d'avoir, par ce procédé, des espèces de réservoirs d'eau, où l'on peut puiser à la main, pour une culture jardinière.

Dans mon cours de chimie agricole, j'ai souvent aussi donné les moyens les plus économiques qui pourraient être mis en pratique pour élever l'eau et l'employer en irrigations dans ces contrées, où elle devient indispensable à une certaine époque de l'année.

J'indiquerai ici, mais seulement comme un fait accessoire, que les eaux stagnantes des landes et leur dessèchement font naître des fièvres qui affligent une partie de la population de ces contrées, et qu'il importe de percer des routes, de creuser

des canaux, et de les assainir autant qu'il sera possible de le faire.

COMPOSITION DES TERRES DES LANDES.

Résultat de l'analyse des terres des Landes.

	IV		V		VI
	SALLES non cultivée (1).	SALLES cultivée.	CESTAS terre de bruyères	CESTAS non cultivée.	MORCENX.
Humidité	0,250	1,600	1,900	1,000	
Matières organiques { Azote	0,150	0,152	0,061	0,050	4,000
Matières organiques { Complément.	1,750	3,900	4,400	4,500	
Acide carbonique	»	0,500	0,200	»	0,122
Oxyde de fer	0,850	3,070	Traces	Traces	0,450
Alumine			»	»	Nulle
Chaux		3,240	0,020	Traces	0,153
Magnésie	»	Traces à peine sensibles.	»	»	Traces
Résidu insoluble (sable siliceux)	97,000	86,810	92,500	93,720	94,020
Complément	»	0,728	0,919	0,730	1,255
	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000

III

GRAVES.

Dans la Gironde, on donne le nom de *Graves* à des terres essentiellement siliceuses, dans lesquelles on rencontre un grand nombre de galets de quartzite, qui subissent une espèce de clivage par le choc, et qui deviennent phosphorescents lorsqu'on les frotte les uns contre les autres dans l'obscurité. La densité d'un échantillon de quartzite roulé, recueilli au Bouscat, a été trouvée de 2,6322. Ce terrain forme une longue bande située entre les alluvions de la Garonne et de la Gironde,

(1) Par des lavages à l'eau, cette terre laisse un résidu représentant les 0,9754 de la quantité employée.

et les terres des Landes. Elles sont souvent mélangées avec des produits argileux, ainsi que cela s'observe dans les environs de Langon et de Saint-Estèphe.

La partie qui porte plus spécialement le nom de *Graves* est celle qui enveloppe Bordeaux sur la rive gauche de la Garonne. Elle s'étend à peu près de Morillon, Selve et Castres, situés au sud de La Réole, jusqu'à Eyzines, au delà et près de Bordeaux. Cette contrée produit des vins excellents, dont ceux du Haut-Brion sont les plus estimés. En amont de la Garonne, vers le sud, les *Graves* produisent du vin blanc d'une grande supériorité; en aval, elles s'étendent jusqu'aux *Polders de Hollande* (terres d'alluvion), et forment le sol principal du Médoc, connu du monde entier par les vins de premier ordre qu'il fournit.

Cette partie de la Gironde mérite un bien vif intérêt au point de vue agrologique; mais les terres que l'on y cultive n'ont pu être l'objet d'aucune analyse, quoique des échantillons aient été recueillis dans les propriétés les plus importantes.

Rive gauche de la Garonne *(Partie située au sud de Bordeaux).*

	VII		VIII
	HAUT-SAUTERNE CHATEAU-LAMOTHE		LANGON.
	Graves.	Terre argileuse.	Sables.
Humidité	0,980	3,560	0,650
Matières organiques — Azote	0,100	»	0,050
Matières organiques — Complément	4,320	9,440	2,350
Acide carbonique	0,200	3,000	»
Oxyde de fer	0,960 (1)	6,020	0,460
Alumine	»	2,950	»
Chaux	1,470 (2)	5,160	0,720 (3)
Résidu insoluble	91,000	69,700	95,770
Perte	1,072	0,170	»
	100,000	100,000	100,000

(1) Oxyde de fer et peu d'alumine.
(2) Chaux, magnésie et perte.
(3) Chaux et perte.

IV

TERRES ALLUVIONNAIRES.

Ces terres existent sur les bords de la Garonne et de la Dordogne. Les habitants du Bordelais les désignent sous le nom de *terres de palus*. Elles sont produites par des matières tenues en suspension dans les eaux de ces rivières, qui troublent fortement celles de la Garonne et qui peuvent, en peu de temps, donner naissance à des dépôts qui forment des terrains d'une nature excellente. Ces terres sont éminemment fertiles. La vigne peut y être cultivée avec un grand succès. Elle y prend un accroissement beaucoup plus rapide et plus considérable que dans la terre de grave. Aussi a-t-elle un aspect tout spécial, et exige-t-elle que, par des échalas (carrassons), on la soutienne jusqu'à une grande hauteur. Le vin produit par ces vignes est inférieur à celui du Médoc; mais il est tonique, confortable, et de premier choix pour la consommation ordinaire. La vigne peut y produire du vin en abondance, sans recourir à aucune espèce d'engrais pendant au moins une dizaine d'années.

La vase qui donne naissance à ces espèces de terrains peut être recueillie dans la Garonne, où elle est en quantité inépuisable. Elle serait un excellent amendement pour les terres du Bordelais, quelles qu'elles fussent. Il y a déjà bien des années que j'ai proposé de les recueillir et de les transporter sur des chemins mobiles construits avec du bois de pin.

Il y a dans la vase de la Garonne une richesse inépuisable pour l'avenir. Il viendra une époque où l'on sera forcé d'y avoir recours.

La Dordogne donne aussi une vase excellente pour entretenir la fertilité du sol, et déjà elle a été mise en exploitation pour cet objet.

Les vases de la Garonne et de la Dordogne ont été soumises à l'analyse ainsi que plusieurs terres de palus auxquelles elles ont donné naissance.

Vases déposées par les eaux de la Garonne et de la Dordogne.

	IX GARONNE — Rive gauche.	X DORDOGNE — Rive droite.	XI DORDOGNE — Rive gauche.
Humidité	3,950	1,800	2,000
Matières organiques { Azote	0,150	0,180	0,150
Matières organiques { Complément	6,550	6,200	6,500
Acide carbonique	4,500	2,000	2,000
Oxyde de fer	4,867	3,200 (1)	7,000
Chaux	2,470	3,960	2,014
Alumine	6,383	» (2)	» (2)
Magnésie	1,690	0,000	0,036 (3)
Résidu insoluble (sable siliceux)	69,440	81,720	80,300
	100,000	100,000	100,000

Terres d'alluvion de la Garonne dites *Palus* (4).

	XII	XIII	XIV	XV
	GARONNE — Rive gauche.		LORMONT	
			Vignes.	Vimière (5).
	(5)	(6)		
Humidité	2,900	3,030	2,100	1,750
Matières organiques { Azote	0,205	0,150	0,204	0,848
Matières organiques { Complément	9,100	11,970	4,900	8,230
Acide carbonique	1,000	1,500	3,000	2,500
Oxyde de fer	2,690	5,320	9,200	7,890(7)
Alumine	1,790	1,600	» (8)	»
Chaux	0,895	3,210	1,556(9)	2,770
Résidu insoluble dans ClH	81,420	73,170	79,040	75,890
Matières indéterminées et perte	»	0,030(10)	»	0,102
	100,000	100,000	100,000	100,000

(1) Oxyde de fer contenant une petite quantité d'alumine.
(2) Dosée avec le fer.
(3) Magnésie reconnue, mais non dosée, et perte.
(4) Nom donné, dans le département de la Gironde, à des terres d'alluvion et non marécageuses, comme le nom de *palus*, qui est latin, pourrait porter à le penser.
(5) Dans la partie sud de Bordeaux.
(6) Dans la partie nord de la même ville.
(7) Oxyde de fer et peu d'alumine.
(8) Alumine dosée avec l'oxyde de fer.
(9) Chaux, magnésie et perte.
(10) Magnésie et perte.

La grande supériorité des terres alluvionnaires du département de la Gironde, qu'elles proviennent de la Garonne ou de la Dordogne, m'a engagé à les comparer aux terres du Nord de la France, qui sont si fertiles, et par cela même si renommées.

Ces terres sont des sables argileux supérieurs à la craie. Ils commencent probablement à Meudon, près Paris; mais je les ai vus depuis le plateau de Marigny, près Compiègne, sur la rive droite de l'Oise, jusqu'en Belgique. Dans bien des endroits, ils sont recouverts par des collines de l'ordre tertiaire, dont les ondulations s'étendent jusqu'aux environs de Ham; mais ils se relient entre eux jusqu'à la limite indiquée.

Terres recueillies, à la fin d'octobre 1859, à Giraumont (Oise), *sur la rive droite et environ à 5 kilomètres de cette rivière, conservées dans des flacons et soumises à l'analyse le 20 août 1869.*

	XVI	
	A la superficie.	A 2 mètres de profondeur.
Humidité	1,250	1,900
Matières organiques { Azote	0,170	0,120
Matières organiques { Complément	3,750	1,600
Acide carbonique	»	0,500
Oxyde de fer	2,409 (1)	4,290 (2)
Chaux	1,330 (3)	0,550 (3)
Résidu siliceux insoluble	91,091	91,040
	100,000	100,000

Ces analyses, comparées à celles des terres alluvionnaires du département de la Gironde, démontrent que ces dernières possèdent une grande supériorité. Il doit en être ainsi d'ailleurs, puisqu'elles ont été récemment déposées par les eaux, tandis que les terres du Nord sont en place depuis un grand nombre de siècles, et qu'elles ont pu être en partie épuisées par la végétation.

(1) Fer et peu d'alumine.
(2) Pas d'alumine.
(3) Chaux, magnésie et perte.

V

COTES ET COLLINES.

L'espace situé entre la Garonne et la Dordogne porte le nom d'*Entre-deux-Mers,* et se termine au confluent de ces rivières par le Bec-d'Ambès.

Cet espace appartient essentiellement aux terrains tertiaires et se trouve caractérisé par le calcaire que l'on y exploite pour des constructions.

Ce terrain est relevé et forme des collines. Il en est de même de la rive droite de la Dordogne. On a sur les rives droites de la Garonne et de la Dordogne, d'abord des terres alluvionnaires récentes, puis des côtes situées sensiblement en face du Sud, enfin des plateaux plus ou moins accidentés.

Ces deux parties du département de la Gironde sont soumises à une culture d'ensemble comme les autres contrées de la France. On y cultive aussi la vigne sur une grande échelle. Elle donne des produits qui portent le nom de *vins de côtes*. — Sur les plateaux, la vigne occupe relativement moins d'espace que les autres cultures.

Quelques analyses des terres de ces contrées ont été faites, En voici le résultat :

Terre prise sur le côté gauche de la route de Bordeaux, au pont de Cubzac, à environ 500 mètres de la Dordogne.

	XVII
Humidité	1,700
Matières organiques — Azote	0,270
Matières organiques — Complément	5,800
Acide carbonique	0,500
Fer oxydé contenant une petite quantité d'alumine	2,460
Chaux	1,030
Magnésie et perte	0,200
Résidu insoluble dans ClH	88,040
	100,000

Terres de la rive droite de la Dordogne portant de la vigne.

	XVIII CUBZAC — Près la mairie.	XIX LIBOURNE — Côté nord du plateau (1).	XX SAINT-ÉMILION — Près Calonne.
Humidité	1,230	1,950	1,550
Matières organiques { Azote	0,250	0,150	0,100
Matières organiques { Complément	14,270	13,050	5,450
Acide carbonique	10,000	11,000	2,000
Fer oxydé	15,150	8,200 (2)	4,760
Alumine	1,010	»	»
Chaux	13,890	11,520	3,580
Magnésie	0,700 (3)	» (5)	0,310 (4)
Résidu insoluble	44,000	47,870	82,250
	100,000	»	100,000

VI

MARAIS.

La ville de Bordeaux est construite sur un marais. Il en existe au sud, à l'ouest, dans la ville même et au nord-ouest.

On s'est, à plusieurs reprises, occupé de l'assainissement de ces marais, qui sont très nuisibles à la santé; mais on ne le fait point avec persévérance, ainsi que cela devrait être pour un sujet aussi grave, et il en existe toujours.

Les travaux entrepris pour l'analyse de ces terres marécageuses ont été incomplets.

(1) Terre prise à mi-côte (côté nord) d'une colline située près Libourne.
(2) Fer et peu d'alumine.
(3) Magnésie constatée et perte.
(4) Traces de magnésie et perte.
(5) Traces de magnésie, un peu d'acide sulfurique, peu de chlore, — perte.

La terre des marais est presque entièrement formée d'un sable siliceux en gros grains roulés. Ce sable est imprégné d'une matière organique noire.

La terre des marais de Bruges est très riche en azote; elle en contient autant que certaines poudrettes. Elle sert même pour falsifier ces dernières; cependant, on devrait éviter d'en faire usage pour l'agriculture, car si on la remue au printemps, on voit qu'elle contient une quantité très considérable de larves et d'insectes coléoptères qui ne pourraient manquer d'être nuisibles à la végétation.

Un décilitre de terre de marais de Bruges pèse 75^{gr}900.

XXI

Composition :

Humidité		0,048
Matières organiques 0,192	Azote	0,013
	Complément	0,179
Matière minérale (sable siliceux)		0,760
		1,000

XXII

Terre prise aux marais situés près des Allées de Boutaut.

Humidité	0,315
Matière combustible	0,080
Matière minérale	0,605
	1,000

XXIII

Terre supposée sèche, prise derrière la propriété de M. Blondeau, à l'extrémité du faubourg de Bacalan.

Poids du décilitre.... 77 grammes.

Matières combustibles 0,355	Azote	0,013
	Complément	0,342
Matières minérales		0,645
		1,000

XXIV

Terre prise à la Grange-Rouge.

Matières organiques	0,185
Matières minérales	0,815
	1,000

XXV

Terre prise au chemin de Bruges.

Matières organiques	0,220
Matières minérales	0,780
	1,000

Ainsi que cela vient d'être dit, la matière minérale est presque entièrement formée de sable siliceux, grossier et roulé.

Le produit de la calcination ne change pas de poids par l'addition du carbonate d'ammoniaque et la dessiccation. Ce qui indique qu'il n'y a point de matière calcaire, ni de composé ferrugineux correspondant au protoxyde, ou qu'il n'y en a qu'une très faible quantité.

VII

Il résulte, de l'ensemble des faits consignés dans le présent travail, que le département de la Gironde présente plusieurs régions éminemment distinctes les unes des autres, tant au point de vue de la géologie qu'à celui de l'agrologie. Il y a un accord parfait entre ces deux manières d'envisager la nature, et il en résulte que la dernière, qui est postérieure à la première, est forcément la conséquence de celle-ci.

Il y a les dunes formées de sable rejeté par la mer et soulevé par les vents. Elles forment une digue contre l'envahissement de cette dernière, qui détruit incessamment les

autres parties du continent, lorsqu'elles sont représentées par des escarpements ou des falaises.

Le pin maritime y est cultivé, ou plutôt y a été semé, et il a pu donner des résultats notables par la résine que l'on en extrait, ainsi que par le bois et le charbon qu'il donne, bois qui est éminemment propre aux industries métallurgiques, notamment à celle du fer. Il ne faut cependant point perdre de vue que l'analyse des cendres de cet arbre a démontré d'une manière indubitable qu'elles contiennent des sulfates et des phosphates qui, étant réduits, peuvent donner du soufre et du phosphore dont l'union avec le fer peut en diminuer les qualités.

Puis, viennent les landes : ce vaste espace si longtemps demeuré inculte et insalubre, mais dont on a commencé la culture et l'assainissement avec une certaine énergie depuis un petit nombre d'années; landes qui présentent de grands obstacles à l'agriculture par la pauvreté de leur sol, par la présence d'un sous-sol imperméable, par l'eau qui en recouvre souvent une grande partie et par la nécessité d'y introduire des moyens d'arrosement.

J'ai eu souvent l'occasion de faire des calculs sur l'amélioration des landes et sur la dépense qui en serait la conséquence. Il résulte de ces calculs qu'un hectare de lande qui coûterait au plus 100 fr., reviendrait au moins à 500 fr., s'il était mis en état de produire, en tenant compte des parties accessoires, telles que bâtiments, instruments aratoires, animaux, etc.

Le pin maritime croît assez bien dans les landes, et, lorsqu'il a atteint vingt ans d'âge, il peut commencer à donner de la térébenthine; mais cet âge est le plus bas possible.

Afin d'attendre ces vingt années qui demeureront improductives, on peut semer le pin de manière à en produire beaucoup et arracher les jeunes pins pour en faire des *carrassons* ou *carrassonnes,* qui sont les échalas du pays.

Depuis la découverte du Dr Boucherie, on tâche de s'opposer à la destruction trop rapide de ces jeunes tiges de pin en les

immergeant dans une dissolution de sulfate de cuivre; mais ce procédé est défectueux, il n'agit que sur la surface, et l'intérieur est privé de l'injection qui a lieu pour de plus fortes pièces de bois. Il y a longtemps que j'ai proposé de remplacer le sulfate de cuivre par le sulfate de zinc pour l'injection des bois de cet ordre. Ce produit coûte beaucoup moins cher que le premier et peut cependant donner de bons résultats.

Le tozin, chêne à feuilles profondément découpées, croît assez facilement dans les landes.

J'avais songé à préconiser l'introduction d'un arbre donnant des produits nutritifs annuels et finalement un bois utile aux constructions ou à la menuiserie. Le châtaignier m'avait paru très convenable pour atteindre ce but; mais le bois de cet arbre, lorsqu'il vient dans cette contrée, présente cette fâcheuse singularité, que les couches concentriques qui le ferment, adhèrent peu entre elles et en rendent l'application presque impossible.

Pour la culture des landes, il y a donc à prendre en considération :

1° La pauvreté du sol,

2° L'existence d'un sous-sol imperméable.

3° La nécessité de dessécher certaines parties.

4° Celle de faire usage de l'arrosement.

Je rappellerai brièvement que j'ai proposé :

1° De percer le sous-sol dans plusieurs points assez rapprochés.

2° D'améliorer la nature chimique du sol par de la marne ou de la vase de la Garonne, qui peuvent y être transportés sur des chemins mobiles construits en bois de pin.

Ces modifications ne pourraient être obtenues qu'à l'aide d'une assez forte dépense, mais elles donneraient des résultats certains au point de vue des avantages que l'on en tirerait.

Quant à l'arrosement, au lieu des moyens locaux que j'ai tant de fois proposés dans mes leçons de chimie agricole, il y a le grand projet de M. A. Duponchel qui pourra être réalisé dans l'avenir.

Les vases abandonnées par les eaux de la Garonne et de la Dordogne, les terres de palus auxquelles elles donnent naissance, sont d'une grande richesse au point de vue des éléments qui les constituent. On voit, par le résultat des analyses, que les terres paludéennes contiennent moins de chaux que la vase qui les a produites : ce qui indique un commencement d'épuisement opéré par les végétaux qui ont cru à leur surface.

Je tiens à répéter que les vases de ces rivières, et notamment celles de la Garonne, représentent une source inépuisable de richesse.

Les analyses des autres parties du sol ont été trop peu nombreuses pour qu'il soit possible d'en tirer des conséquences telles que seraient celles qui rattacheraient la spécialité et les qualités des vins à des sols déterminés. Mais on ne peut oublier que les premiers vins du département de la Gironde viennent de vignes qui croissent sur la rive gauche du fleuve de ce nom et sur celles de la Garonne; qu'elles croissent dans un terrain spécial, et que ce terrain à galets de quartzite est le résultat d'un diluvium antérieur à l'histoire de ces contrées, qui a transporté du haut de la Garonne ou de ses affluents des débris de roche dont il serait probablement possible de retrouver les éléments primitifs en place.

Je terminerai en faisant remarquer qu'il découle des faits réunis dans le présent travail, ainsi que cela a été dit en commençant, que l'agriculture est étroitement liée avec la nature du sol, et que l'on est conduit à reconnaître qu'il existe une relation intime entre sa constitution et celle des produits qu'il est apte à donner.

RECHERCHES

SUR LA

STRUCTURE DES CORPS CRISTALLISÉS

DÉTERMINATION

DE LA FORME ET DU MODE DE GROUPEMENT DE LEURS PARTICULES

PAR A. BAUDRIMONT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

L'étude de la constitution la plus intime des corps cristallisés offre un vif intérêt, et, malgré les difficultés qu'elle présente, elle mérite que l'on s'en occupe avec zèle et persévérance; car, sans que cela ait été démontré d'une manière nette et précise, on comprend qu'il doit exister des relations et une harmonie parfaites entre la structure des corps, la forme de leurs éléments constitutifs, leurs propriétés physiques fondamentales, et les proportions chimiques. Il est même éminemment probable que, dans un avenir prochain, les lois qui relient ces divers éléments de la science nous seront révélées.

Deux méthodes se présentent pour atteindre ce but : l'une analytique et l'autre synthétique.

La première de ces méthodes donne des résultats lents et difficiles à obtenir; mais ces résultats ne peuvent laisser le moindre doute sur leur réalité et leur valeur scientifique, parce qu'ils sont donnés par l'observation directe. La deuxième méthode, partant de l'existence des atomes, nous conduit à chercher les moyens de reconstituer les corps tels qu'ils sont ou tels que nous les croyons être. En suivant cette méthode, il y a des lacunes si nombreuses et si considérables à remplir, il reste tant d'incon-

nues à élucider, que, jusqu'à ce jour, elle n'a conduit qu'à des hypothèses, à des conceptions fort douteuses qui sont loin d'être en harmonie avec l'état de la science, et même à des erreurs flagrantes.

La méthode analytique mérite donc la préférence, et c'est elle que l'on doit adopter, puisqu'elle seule peut nous donner la certitude d'être restés dans le domaine de la réalité; mais elle a une limite, qui est celle du champ de l'observation.

Au delà on tombe dans ce qui échappe à nos sens, dans l'inconnu, dans le vague, et tout devient incertitude, à moins que des déductions de l'ordre de celles qui appartiennent aux sciences mathématiques ne nous permettent d'affirmer que les conséquences qui découlent de nos observations sont réelles et bien fondées.

Quoi qu'il en soit, et quelle qu'en puisse être la conséquence, il y a un intérêt réel et du premier ordre à étendre autant que possible le domaine de l'observation, et à en reculer les limites jusqu'à ce qu'il atteigne la partie cryptologique, ainsi que l'aurait dit Ampère. C'est ce que je me suis efforcé de faire et ce que j'ai exposé dans plusieurs Mémoires insérés dans les *Actes de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.*

En suivant la direction qui vient d'être indiquée, on voit que, en prenant les cristaux pour point de départ, on peut arriver à la connaissance de la forme de leurs parties constituantes, et l'on comprend alors qu'il n'y a plus qu'un pas à faire pour atteindre les molécules; êtres invisibles, hypothétiques, il est vrai, mais que notre intelligence a pu concevoir et dont elle ne nous permet pas de nier l'existence.

Le présent Mémoire, appartenant à la statique corpusculaire et cependant entièrement compris dans le domaine de l'observation, contient le résultat des recherches relatives à la détermination de la forme des particules cristallines, à leur mode de groupement, à la structure des cristaux qu'elles produisent par leur réunion et aux axes qui leur conviennent.

Un prochain travail, appartenant à la dynamique corpusculaire, aura pour but de passer de la forme des particules et de la considération de leurs axes à la structure immédiate des molécules.

L'étude approfondie des corps cristallisés a conduit à les classer en six groupes principaux, qui ont d'abord été rapportés à des formes dites primitives. Le choix de ces dernières présentant des difficultés, et étant souvent plutôt arbitraire que la conséquence de principes nettement définis, M. Weiss, d'une part, et M. G. Rose, d'autre part, ont rendu un véritable service à la science en caractérisant chaque système de formes par des axes géométriques.

Si les formes des cristaux sont le résultat de leur structure la plus intime, il est un autre ordre de propriétés qui s'y rapporte encore d'une manière plus immédiate et qui n'offre point la même variabilité, tel est le clivage qui conduit à des polyèdres définis pour une espèce déterminée, et qui peuvent par leur réunion produire toutes les formes dont sont susceptibles les cristaux dont ils proviennent. Le mode de formation des cristaux nous est encore révélé par les trémies, les carcasses et les décroissements qui sont quelquefois évidents; mais ces dernières conditions de l'existence des corps cristallisés sont elles-mêmes sous la dépendance immédiate du clivage. C'est donc de ce dernier qu'il convient plus spécialement de s'occuper.

Le clivage des cristaux conduisant à obtenir des polyèdres définis dont les formes peuvent être considérées comme celles des particules qui les constituent par leur assemblage, on est conduit à reconnaître qu'un même système cristallographique, déterminé par des considérations purement géométriques, peut être représenté par le groupement de particules de différents ordres, ayant toutefois entre elles des relations géométriques évidentes et nettement définissables.

Exemples. — Le système cubique, caractérisé par trois axes égaux et rectangulaires, correspond :

1° A des cristaux clivables parallèlement aux faces d'un cube, tels que le sel gemme, les chloroïdures potassique et argentique, la galène, la naumalite, l'altaïte, la disomose, la smaltine, etc.;

2° A des cristaux clivables parallèlement aux faces d'un tétraèdre et d'un octaèdre réguliers, quelquefois d'un dodécaèdre rhomboïdal,

tels que le diamant, la fluorine, l'argyrose, la blende, le spinelle, l'aimant, le grenat, etc.

D'une autre part, dans le système dit rhomboédrique, à trois axes égaux situés dans un même plan perpendiculaire à un axe principal, on trouve des cristaux réellement clivables en rhomboèdres, comme les carbonates calcoïdiques, le quartz, l'oligiste, le natronitre, etc., mais il y en a aussi d'autres qui sont clivables en prismes hexaèdres, tels que la greenockite, la covelline, l'antimonickel, le cinabre, la molybdénite, l'apatite, l'émeraude et ses congénères, le mica à un seul axe optique, etc.

L'examen auquel je me suis livré, et qui a été fait sur toutes les espèces cristallines qui ont été étudiées par les savants ou sur celles dont je fais collection depuis un grand nombre d'années, m'a démontré qu'il est possible de reconnaître quinze espèces de particules nettement distinctes les unes des autres : espèces qui sont données par l'observation directe.

Une étude plus approfondie de ce sujet, et de l'ordre purement géométrique, permettrait d'admettre qu'il existe un nombre de particules plus élevé que celui qui a été reconnu par l'observation directe. Mais les formes particulaires qui seraient admises par cette seule considération pourraient avoir le double inconvénient de n'être représentées par aucun corps connu, et de donner des formes que la nature ne serait peut-être point apte à représenter. Cependant quelques-unes de ces formes seront ajoutées à celles qu'il a été possible d'observer.

Les formes particulaires des cristaux se rapportent à trois groupes nettement distincts, que l'on peut retrouver dans chacun des systèmes de cristallographie généralement admis :

1° Des parallélipipèdes en y comprenant le cube, le rhomboèdre et le prisme rhomboïdal. Ces solides sont au nombre de huit et peuvent être obtenus par trois clivages;

2° Des dodécaèdres rhomboïdaux résultant de l'action de six clivages, et pouvant être portés à un nombre assez considérable d'espèces, mais dont trois seulement peuvent être fondés sur des exemples;

3° Des prismes hexaèdres, résultant de l'action de quatre clivages, dont trois parallèles à un axe principal et le quatrième normal ou oblique relativement à cet axe; six types spéciaux peuvent être rapportés à cet ordre de particules.

Les quatre clivages qui donnent des octaèdres, des tétraèdres, et même des rhomboèdres formés par l'union d'un octaèdre et de deux tétraèdres, sont intimement reliés avec les particules dodécaédriques et la structure alterne ou pyramidale, et ne représentent qu'un des cas particuliers des clivages que ces corps peuvent éprouver.

La fluorine et la blende, qui peuvent présenter simultanément les quatre clivages, conduisant aux formes qui viennent d'être indiquées, peuvent aussi présenter les six clivages qui donnent le dédocaèdre rhomboïdal.

Si les six systèmes d'axes indiqués par M. Weiss, d'une part, et M. G. Rose, d'autre part, permettent de caractériser nettement chaque système de formes cristallographiques, il faut cependant reconnaître qu'ils sont insuffisants pour représenter la structure des cristaux, attendu qu'un seul de ces systèmes peut se rapporter à deux et même à trois ordres de structures différentes.

La forme n'étant qu'une des conséquences de cette dernière, il paraîtra sans doute rationnel de créer un système d'axes qui soit intimement relié avec la structure des cristaux et qui permette de la représenter d'une manière nette et précise. C'est ce que je me suis efforcé de réaliser.

L'ensemble du travail précédent peut être résumé ainsi qu'il suit :

Il existe une harmonie parfaite entre la forme des particules cristallines, leur mode de groupement, la structure et la forme des cristaux auxquels elles donnent naissance.

Ces relations nous sont révélées par le clivage. Ce mode d'opération conduit à reconnaître quinze espèces de particules cristallines.

Ces quinze espèces peuvent être réparties en trois groupes bien distincts, fondés sur leur forme, leur mode de groupement et le nombre de leurs axes réels.

Ces observations sont consignées dans le tableau suivant, où elles sont appuyées par des exemples.

CLASSIFICATION DES

Leurs formes. — Leur mode

	SYSTÈMES	AXES.
TROIS CLIVAGES — **Particules cuboïdales.** — GROUPEMENT DIRECT. — *Trois axes principaux.*	DROIT.....	3 1 + 2′ 1 + 2′
	SYMÉTRIQUE ...	1 + 1′ + 1″ 3 + 1′ (1)
	OBLIQUE.....	2 + 1′ obl. 1 + 1′ + 1″ obl. 1 obl. + 1′ obl. + 1″ obl.
SIX CLIVAGES. — **Particules dodécaédriques** — GROUPEMENT ALTERNE OU PYRAMIDAL — *Six axes principaux.*	DROIT.....	6 2 + 4′ 2 + 2′ + 2″ (1 + 1′) + 4″ (1 + 1′) + 2″ + 2′″
QUATRE CLIVAGES. — **Particules hexaprismatiques** — GROUPEMENT MIXTE — *Quatre axes principaux.*	DROIT.....	3 + 3 1 + (1 + 2′)
	OBLIQUE.....	1 + (1 + 1′ + 1″) 1 obl. + (1 + 2′) 1 obl. + (1 + 1′ + 1″

(1) Les trois axes identiques de ce système ne sont pas contenus dans un même plan ; ils aboutis au centre des faces des rhomboèdres. Le quatrième axe marqué 1′ est un axe de symétrie qui n'est obligatoire ; il aboutit aux sommets du rhomboèdre et fait partie du système tétraxique 1 + 3 système marqué 3 + 1′ est donc un système mixte.

RTICULES CRISTALLINES

pement. — Leurs axes.

FORMES.	EXEMPLES.
ı	Chloroïdures hydroïdiques, galène, smaltine.
ne à bases carrées.	Stannine, idocrase, apophyllite, matlockite, kérasine.
· rhomboïdal.	Carbonates et sulfates calcoïdiques, leadhillite, calédonite, nitre, pyrolusite.
· rectangulaire.	Karsténite, wolfram, péridot, sylvanite.
ıboèdre.	Spathoïdes (CO_3A), quartz, oligiste, chromoxyde, fer titané.
ne rhomboïdal oblique.	Barytocalcite, gay-lussite, malachite, crocoïse, plagionite, orthose.
· rectangulaire oblique.	Gypse, vivianite, erythrine.
· trioblique.	Disthène, oligoclase, albite, axinite, sulfate de cuivre ordinaire.
ıaèdre rhomboïdal régulier.	Diamant, fluorite, blende, spinelle, aimant, grenat, amphigène.
— à section carrée.	Rutile, cassitérite, zircon, schéelite.
— à section rhomboïdale.	Soufre natif, leukopyrite, thenardite.
— à section rectangulaire.	»
— à section obliquangle.	»
ne hexaèdre régulier.	Cinabre, apatite, émeraude, magnétopyrite, tourmalines.
· hexaèdre droit, symétrique.	Wernérite (*), orpiment, stibine, bismuthine, zinkénite, cymophane.
· droit, à base obliquangle.	»
oblique, à base symétrique.	Acide borique, azurite, zoïsite.
oblique, à base obliquangle.	»

(*) La Wernérite aurait pu être mise à part et former le quinzième groupe des particules dont des ...es ont pu être donnés. Elle se distingue, parmi les autres corps du même groupe, par deux ...èdres droits et opposés l'un à l'autre.

DYNAMIQUE CORPUSCULAIRE

RELATIONS

ENTRE

LA STRUCTURE DES CORPS

ET

LES PHÉNOMÈNES QU'ILS ACCOMPLISSENT

IMPERFECTIONS DE LA THÉORIE DES ONDULATIONS
POUR EXPLIQUER LES PHÉNOMÈNES DE LA PHYSIQUE GÉNÉRALE
9me Mémoire (1)

PAR A. BAUDRIMONT
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

PREMIÈRE PARTIE

I

INTRODUCTION

Les sciences physiques, considérées au point de vue le plus général, sont formées par la réunion de deux ordres d'éléments essentiellement distincts : les uns sont des faits d'une évidence incontestable; les autres sont des conceptions métaphysiques ou purement spéculatives, que l'on fait intervenir, soit pour relier entre eux les faits positifs, soit pour les interpréter, sinon pour remonter aux causes premières et en donner l'explication. Tel est le caractère des théories imaginées depuis moins d'un siècle. Imparfaites, incomplètes, souvent même contradictoires, elles ont

(1) Ce Mémoire est le neuvième dans l'ordre selon lequel les travaux se rattachant à la structure des corps et aux phénomènes qu'ils présentent auraient dû être publiés; mais il paraît le cinquième. Il y en a donc quatre intermédiaires qui sont inédits.

fait place à d'autres théories, mais qui ont marché lentement et sont souvent disparues avant d'avoir atteint leur apogée. C'est ainsi que les agents impondérables, tels que le fluide lumineux, le calorique, le fluide électrique, ont été remplacés, d'abord pour la lumière et ensuite partiellement pour les phénomènes thermiques, par le fluide éthéré. Une théorie plus moderne, plus générale et que l'on peut dire plus profonde, ou plus en rapport avec les faits, attribue les phénomènes physico-chimiques au mouvement des corpuscules matériels.

Par une conséquence naturelle de l'enchaînement des idées, les théories ont été mélangées. Il était toujours question du calorique et du fluide électrique, que la théorie des ondulations du fluide éthéré était adoptée par la majorité des physiciens, à l'exclusion de la théorie Newtonienne de l'émission, pour les phénomènes lumineux. Aujourd'hui, cette même théorie du fluide éthéré vient prendre rang à côté de celle des mouvements des éléments corpusculaires dont il vient d'être question, et il en sera ainsi, tant que l'on croira à la nécessité de faire intervenir ce fluide pour expliquer le transport des actions phénoménales à des distances quelconques.

Je ne discuterai point ici l'existence du fluide éthéré; il sera l'objet d'une publication spéciale dont le texte est rédigé depuis deux ans. Il est possible, il est probable même qu'elle puisse être réelle. Rien ne s'oppose effectivement à ce qu'un fluide de cette nature existe dans l'espace : l'accélération d'une comète qui s'est rapprochée du soleil, la déformation de la queue de ces astres, qui semble due à la résistance que ce fluide leur fait éprouver, la formation des nébuleuses et des astres en général, la constitution probable des éléments chimiques, sont autant d'inductions en faveur de cette hypothèse; mais cela ne veut point dire que tous les corps sont pénétrés par ce fluide, et que tous les phénomènes qui s'accomplissent sont dus à sa présence.

Les travaux de Séguin, de Mayer, de Joule, de Hirn, de Clausius, sur l'équivalent mécanique de la chaleur, ont démontré qu'au moins un des phénomènes de la physique était dû au mou-

vement des parties constitutives des corps. Ceux de W. H. Grove sur la corrélation des forces physiques, en prouvant expérimentalement que les phénomènes de plusieurs ordres pouvaient être transformés les uns dans les autres, ont fait voir que cette théorie était applicable à la physique entière. Ce point de vue général a été l'objet de publications importantes de l'abbé Moigno, du Père Secchi et de Saigey, que nous avons perdu depuis la publication de ce dernier travail.

Malgré les travaux et les recherches de ces savants et de bien d'autres hommes éminents qui ont apporté leur concours à la construction du nouvel édifice, il est demeuré incomplet, inachevé, et plusieurs des parties qui le constituent ne sont point en harmonie avec les éléments dont elles dérivent.

AVANT D'AVOIR LA PENSÉE DE FAIRE CONNAITRE LES MOUVEMENTS DES PARTIES QUI ENTRENT DANS LA CONSTITUTION DES CORPS, IL ÉTAIT LOGIQUE, ET L'ON PEUT DIRE INDISPENSABLE, D'ÉTUDIER CETTE MÊME CONSTITUTION, ET D'EN AVOIR UNE IDÉE AUSSI NETTE ET AUSSI COMPLÈTE QUE POSSIBLE; CAR, QUE PEUT ÊTRE LE MOUVEMENT DE PARTIES QUI NOUS SONT INCONNUES OU QUI NE SONT MÊME PAS SOUPÇONNÉES?

J'ai déjà appelé l'attention des physiciens et des chimistes sur ces faits du premier ordre, qui dominent toutes les théories qui peuvent être émises.

Pour ce qui concerne la théorie générale des phénomènes physiques, dus au mouvement des éléments corpusculaires, j'en avais discuté et publié les bases dès l'année 1844, dans l'Introduction de mon *Traité de chimie*, où elle se trouve discutée et exposée d'une manière nette et précise. J'ai, d'une autre part, exposé les principes élémentaires de cette partie de la science dans plusieurs mémoires qui ont été publiés dans les *Actes de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, et enfin je les ai résumées dans la *Théorie de la formation du globe terrestre*, que j'ai publiée en 1867.

Dans les publications qui viennent d'être citées, je pense avoir établi par des considérations de différents ordres, tantôt emprun-

tées à la structure des corps, tantôt à la physique, à la chimie, à la géométrie et à la statique :

1° Que le contact immédiat n'existe point dans la nature, pas plus pour les éléments corpusculaires que pour les atomes qui constituent le fluide éthéré, si l'on en admet l'existence;

2° Que les corps homogènes ont une structure définie ; que cette structure existe même dans les fluides élastiques, dont les parties prennent l'*arrangement pyramidal*, qui fait que chacune d'elles est en contact avec douze autres parties et qu'elles peuvent être considérées comme des dodécaèdres rhomboïdaux ;

3° Qu'il résulte de cet arrangement, ou de toute autre disposition du même ordre observée chez les corps cristallisés, qu'à partir d'un point donné, il existe des files de particules qui ont chacune une position déterminée et qui correspond aux axes principaux des masses dont les parties sont arrangées symétriquement;

4° Que les files de molécules peuvent se trouver disposées parallèlement dans des plans dont la position est également déterminée;

5° Qu'une section quelconque, en dehors de ces plans, ne peut contenir des files de molécules pouvant exercer des mouvements perpendiculaires à leur direction ;

6° Qu'un rayon solaire pouvant traverser l'espace dans toutes les directions et le phénomène étant toujours le même, on ne peut dire que, dans chacune d'elles, il a rencontré des plans formés de molécules pouvant vibrer dans un sens déterminé;

7° Enfin, que ce que l'on a attribué aux atomes qui constituent l'éther devait être dû aux mouvements propres des éléments corpusculaires et aux *résultantes* de ces mouvements.

Voilà une suite d'objections qui ont pour base la constitution des corps, quelles que soient les parties qui les forment et quel que soit leur mode d'agrégation; ce mode d'agrégation étant cependant toujours déterminé, même dans les corps qui, comme les fluides, paraissent, au premier abord, n'avoir pas de structure appréciable.

Déjà Cauchy, sans renoncer à l'intervention du fluide éthéré, avait introduit dans ses calculs la considération du mouvement propre des molécules. Mais depuis un très petit nombre d'années des modifications considérables ont été apportées à la théorie mathématique des phénomènes physiques. M. de Colnet d'Huart a publié deux mémoires éminemment remarquables dans lesquels il fait intervenir le mouvement des molécules des corps, et notamment le mouvement rotatoire (1).

Plus récemment, M. Lecoq de Boisbaudran, prenant en considération une idée émise par M. Mascart, que les groupes des raies données par les spectres lumineux sont des harmoniques qui tiennent à la constitution des gaz qui les produisent (2), a aussi fait intervenir le mouvement rotatoire des molécules (3).

Malgré le talent dont ces deux savants ont fait preuve, les explications qu'ils ont données des phénomènes observés, peuvent être contestées.

Je crois que l'on peut affirmer que les MOLÉCULES des corps n'exécutent aucun mouvement de rotation autour d'un axe quelconque.

Pour arriver à un tel résultat, M. de Colnet d'Huart suppose que les molécules des corps sont sphériques et que leur diamètre est excessivement petit relativement à la distance qui les sépare. La constitution chimique des corps et leur structure cristalline ne permettent pas que l'on admette cette forme. Qu'un grand nombre de molécules puissent être inscrites dans une sphère, cela est possible; mais elles n'ont pas moins des axes déterminés par la nature spéciale et la situation des éléments corpusculaires qui les constituent.

Il resterait à démontrer qu'il résulte de la composition des forces propres à ces éléments (attraction, mouvement ou tout ce

---

(1) *Nouvelle Théorie mathématique de la chaleur et de l'électricité*, par de Colnet d'Huart. (*Société des Sciences naturelles du grand-duché de Luxembourg*, 1864 et 1865.)

(2) *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, 2 août 1869.

(3) *Idem*, t. LXIX, p. 606, 657, 694, 1189.

que l'on voudra), qu'elles peuvent se conduire comme si elles étaient homogènes et sphériques.

Mais ce ne serait là qu'un cas particulier; car la structure des corps cristallisés nous révèle qu'une foule de corps possèdent des axes spéciaux et distincts, disposés d'après certaines lois reconnues par les cristallographes.

D'une autre part, si les molécules, au lieu d'avoir plusieurs axes, n'en avaient qu'un seul, qui serait celui autour duquel elles exécuteraient leur mouvement rotatoire, il en résulterait que les corps n'auraient qu'un seul axe de structure. Ils ne pourraient même pas être rapportés au prisme à bases carrées, ni au rhomboèdre, dont les parties sont disposées symétriquement autour d'un axe principal. Ce seraient des sphérules, des ellipsoïdes, des navicules; solides dont les formes s'éloignent de celles observées, et qui sont tout à fait étrangères aux corps cristallisés, dont la structure et la composition chimique présentent une harmonie éminemment remarquable.

Toutefois, en admettant un système mixte comme M. Lecoq de Boisbaudran l'a fait, c'est-à-dire l'existence de l'ÉTHER concurremment avec le mouvement moléculaire, et en faisant que chaque angle latéral des molécules frappe le fluide éthéré comme la roue dentée qui est fixée sur l'arbre de la meule d'un moulin frappe sur la lame qui met la trémie en mouvement et produit le tic-tac connu de tout le monde, on a une idée d'une propagation du mouvement dans des directions déterminées, mais non celle d'axes fixes, comme les axes secondaires des cristaux.

Je considère donc le mouvement rotatoire simple des MOLÉCULES *des corps cristallisés, comme étant tout à fait incompatible avec la structure de ces corps et par conséquent comme n'existant pas.*

Ce mouvement peut-il exister, dans les fluides élastiques, à la température élevée où se font les observations spectroscopiques, surtout dans les conditions imaginées par M. Plücker, conditions dans lesquelles l'électricité intervient concurremment avec la chaleur, où les molécules sont séparées, libres, indépen-

dantes les uns des autres et où leurs éléments peuvent même être dissociés?

Les objections qui viennent d'être faites ne peuvent plus subsister pour ce cas particulier; mais il faut admettre alors que le mouvement rotatoire des molécules ne pourrait avoir lieu que dans les conditions expérimentales qui viennent d'être indiquées. Ce serait donc une condition spéciale qui ne peut être invoquée pour expliquer l'action de la chaleur ou de la lumière à des températures inférieures à celles où s'opèrent la fusion, la vaporisation et la dissociation des corps.

Il faut aussi prendre en considération que l'analyse spectroscopique d'un point en ignition peut être faite dans une infinité de directions et que le mouvement rotatoire admet des directions déterminées pour les axes et les équateurs moléculaires. Il resterait donc à démontrer que les phénomènes sont les mêmes dans toutes les directions possibles, quelle que soit la situation des axes de rotation, ou bien qu'il n'y en a qu'une fraction très minime qui intervient dans l'action éclairante pour une direction donnée (1).

De ce que l'on a supposé l'existence d'un mouvement et même lorsque l'on en a trouvé les lois, cela ne veut pas dire que ce mouvement existe nécessairement, que ces lois s'appliquent à tous les corps connus et sont bien celles de la nature. C'est la conclusion à laquelle nous sommes forcés de nous arrêter.

On pourrait admettre, mais en se tenant en dehors des conditions où se sont placés les savants dont je viens de signaler les travaux, qu'une molécule pourrait à la fois tourner autour de plusieurs axes et se rapprocher davantage des faits observés.

Enfin, j'essaierai de démontrer que, si le mouvement de rotation doit intervenir, comme je l'ai moi-même supposé dans ma théorie

---

(1) Il convient de remarquer que les flammes deviennent d'autant plus opaques qu'il s'y interpose plus de parties chauffées, et l'on est ainsi porté à penser qu'à la température où se produisent ces phénomènes il n'y a aucune relation de symétrie entre les axes de ces parties.

de la formation du globe terrestre, *il ne peut appartenir, d'une manière générale, qu'aux mérons ou aux éléments qui constituent les molécules, et non point aux molécules proprement dites.*

Ainsi que cela vient d'être exposé rapidement, la théorie générale des phénomènes reposant sur une base entièrement hypothétique, n'admettait rien autre chose que le fluide éthéré et le mouvement des atomes qui le constituent. C'était à ces atomes que tout était rapporté, et les éléments corpusculaires étaient regardés comme passifs; bientôt on sentit la nécessité de faire intervenir ces derniers, et, sans s'occuper de leur structure ni de leur composition chimique, on a admis que les molécules exécutaient des mouvements rotatoires qui paraissaient permettre de rendre compte de phénomènes non encore soumis à l'analyse, et l'on a enfin accordé aux éléments ce qui leur appartient réellement : *l'ensemble des propriétés par lesquelles ils manifestent leur existence.*

On demeure véritablement confondu devant ce fait historique, que les corps et les éléments qui les constituent, tout ce qui frappe nos sens, tout ce dont l'existence nous est affirmée de la manière la plus évidente, a été considéré comme étant inerte, tandis que la puissance, le mouvement, l'activité, l'ont été par un fluide dont l'existence est tout à fait hypothétique.

La théorie générale qui rapporte les phénomènes physico-chimiques au mouvement des éléments corpusculaires est la seule qui repose sur une base certaine, dont l'évidence ne peut être contestée, et si elle commence à poindre dans le présent, elle sera évidemment la seule qui restera dans l'avenir.

Peut-être conservera-t-on la théorie du fluide éthéré pour rendre compte de la transmission des actions phénoménales; mais pour atteindre ce but, il faudra la compléter, et ce sera fort difficile , sinon impossible.

On dira peut-être : mais il faut bien que la théorie si savamment développée par Fresnel soit vraie, puisqu'elle a permis d'expliquer la plupart des phénomènes de l'optique. A cette observation il est facile de répondre : Fresnel a étudié les mouvements

que peuvent présenter les éléments d'un fluide hypothétique, et les résultats qu'il a obtenus peuvent s'appliquer aux corps dont la structure est homogène et aux actions qu'ils exercent les uns sur les autres. Rien de plus n'existe dans cette théorie mathématique; aussi, à mesure que l'on approfondit le sujet, de nouveaux besoins se font sentir, et cette théorie primitive et tout à fait superficielle devient insuffisante.

Voici un résumé des conditions qui paraissent indispensables pour qu'un tel fluide puisse exister, et transmettre les actions corpusculaires ou phénoménales :

1° Fluide formé de parties identiques;

2° Pesantes ou représentant une masse définie;

3° Mobiles ou plutôt en mouvement;

4° Ne se touchant point;

5° Arrangées comme les parties constituantes des corps du système cubique possédant la structure pyramidale (1);

6° Démontrer qu'une coupe quelconque, opérée dans ce fluide, se comporte comme si elle contenait les atomes disposés dans un même plan;

7° Démontrer, et ce sera le plus difficile, que le fluide éthéré peut transmettre tous les mouvements du système corpusculaire *à tel ordre qu'ils appartiennent.*

Je dis que cette dernière condition sera la plus difficile à remplir; car si l'on comprend que les mouvements des éléments d'un système, à tel ordre qu'ils appartiennent, puissent être transmis à un autre système en se transformant, comme chacun reconnaît aujourd'hui que le mouvement mécanique se transforme en mouvement thermique, il sera plus difficile de démontrer comment ce mouvement, devenu élémentaire, pourra reconstituer les mouvements dont il provient en pénétrant dans des corps possédant une autre structure. Tel est le cas, par exemple, de tous les phénomènes qui se transmettent par le rayonnement.

---

(1) Voir mon deuxième et mon quatrième mémoire sur la *Structure des corps.* (*Actes de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 1864 et 1873.)

Comme il est facile de le voir par le court résumé qui précède, les physiciens et les géomètres ont compris la nécessité de représenter les phénomènes par le mouvement; mais au lieu d'étudier la constitution la plus intime des corps et de rapporter ces mouvements à leurs éléments, ils les ont rapportés à un fluide tout à fait hypothétique ou à des molécules de pure invention et n'ayant aucun des caractères dont la chimie et la structure des corps permettent de supposer l'existence.

Au lieu de se borner à créer des théories et à les établir sur des hypothèses mal fondées, il sera sans doute plus logique de rapporter aux corps les phénomènes qui en émanent et de rechercher les relations qui existent entre leur constitution la plus probable, déduite de l'ensemble des faits résultant de l'observation, et les phénomènes auxquels ils donnent naissance.

C'est ce que je me suis efforcé de faire dans le présent travail, qui a essentiellement pour but de relier la constitution la plus intime des corps avec les phénomènes qu'ils accomplissent.

Il est éminemment probable qu'à l'aide d'une saine logique et de propositions enchaînées les unes aux autres par des relations immédiates, il sera possible de constituer un système qui aura pour lui les plus grandes probabilités.

Toutefois, il ne faudra considérer ce qui va suivre que comme le résultat possible ou probable de l'examen et de l'enchaînement des faits. Si des erreurs avaient pu être commises, il n'y aura pas moins dans ce travail un sujet de méditations et un programme considérable d'expériences à entreprendre.

Nous allons examiner successivement :

1° La constitution la plus intime des corps; 2° les phénomènes dus à l'activité des corpuscules matériels; 3° les relations qui existent entre ces phénomènes et la constitution des éléments corpusculaires auxquels ils doivent leur existence.

Cet examen comprend l'ensemble de toutes les connaissances qui se rattachent à la physique et à la chimie; mais il sera réduit aux principes élémentaires et en même temps généraux dont dérivent ces deux sciences.

II

EXAMEN DE LA CONSTITUTION LA PLUS INTIME DES CORPS

Il convient de commencer par les fluides élastiques qui se présentent dans la condition la plus simple.

On sait, d'après la loi d'Avogadro, que les poids spécifiques des fluides élastiques, considérés dans les mêmes conditions de pression et de température, sont entre eux comme les proportions chimiques dans lesquelles ils se combinent et par suite comme leurs poids moléculaires. Il résulte de ce fait, qui est admis par tous les physiciens et par tous les chimistes, que, dans ces mêmes conditions, les molécules conservent la même distance entre elles.

Il y a des gaz élémentaires comme l'hydrogène et l'oxygène; il y en a aussi qui sont composés, comme l'acide chlorhydrique, la vapeur d'eau, le sulfure hydrique, les oxydes de l'azote, l'ammoniaque, l'oxyde de carbone, l'acide carbonique, etc.

On sait qu'un volume de chlorure hydrique, qui est gazeux, contient un demi-volume d'hydrogène et un demi-volume de chlore.

Si l'on rapporte aux molécules de l'hydrogène et du chlore ce qui est démontré pour les volumes de ces fluides élastiques, on est forcé de reconnaître que les molécules de ces corps sont au moins divisibles par 2. Le même raisonnement s'applique à l'oxygène considéré dans la vapeur d'eau, au soufre dans le sulfure hydrique, et à l'azote dans son bioxyde et dans l'ammoniaque.

Nous avons donc un premier fait incontestable : les molécules des fluides élastiques, même lorsqu'ils sont élémentaires, sont divisibles par 2.

Faut-il conclure de cette observation que les molécules de ces éléments chimiques ne sont formées que de deux mérons pouvant se séparer par l'acte de la combinaison?

On verra dans d'autres mémoires qui suivront celui-ci, que le nombre 2 ne suffisant point pour représenter une structure définie, régulière ou symétrique, je porte ce nombre à 8 pour les hydroïdes et les chloroïdes et à 12 pour les oxoïdes.

Mais la seule division par 2 suffit pour établir ce qui suit :

Une molécule, qu'elle soit élémentaire ou composée, est formée de parties plus élémentaires.

Dans les éléments chimiques, les parties qui les constituent sont généralement identiques.

Dans les corps composés, ces parties diffèrent les unes des autres. Par exemple, dans le chlorure hydrique, les unes sont de chlore et les autres d'hydrogène. Dans les oxydes de l'azote, les unes sont celles de l'azote et les autres celles de l'oxygène.

Dans un corps il y a donc à considérer, en outre des molécules, des corpuscules plus élémentaires; c'est à ces derniers que j'ai donné le nom de MÉRONS.

Les mérons peuvent être formés de matière élémentaire comme dans les exemples qui viennent d'être donnés; mais ils peuvent aussi être formés d'éléments de différentes natures, réunis entre eux.

Par exemple, dans le cyanogène qui possède la même constitution immédiate que les hydroïdes et les chloroïdes, les mérons sont formés d'azote et de carbone; dans l'hydrure ou dans le chlorure d'éthyle, les mérons sont de deux ordres, les uns élémentaires : chlore ou hydrogène; les autres composés, comme l'éthyle, qui est formé de carbone et d'hydrogène, et qui remplit les fonctions d'un élément chimique.

Il est éminemment probable que le méron d'éthyle est formé par un méron central d'hydrogène qui est enveloppé de carbone et d'hydrogène. D'où le méron d'éthyle serait divisible en parties non identiques.

IL PEUT DONC Y AVOIR DES PARTIES PLUS ÉLÉMENTAIRES QUE LES MÉRONS. Ces parties je les ai nommées MÉRULES, et s'il est utile d'en considérer de plus élémentaires encore, je les désigne par le nom de MÉRICULES.

Les liquides peuvent être considérés comme des amas de molécules, assez denses pour ne pouvoir se séparer les unes des autres par le mouvement qui les anime, et s'attirant mutuellement avec une énergie insuffisante pour qu'elles puissent adhérer les unes aux autres de manière à prendre des positions relativement fixes.

Lorsque des liquides ont la même constitution, mais des poids moléculaires différant les uns des autres, comme cela a lieu pour les acides, les alcools et les éthers ou les somathyles de la série dite *grasse*, il faut, pour faire passer ces corps de l'état liquide à l'état de fluide élastique, une température d'autant plus élevée que la condensation est plus grande et même proportionnelle à la condensation, ainsi que cela résulte des observations de M. Kopp.

Dans ce cas, les molécules pourraient être comparées à des oiseaux dont les ailes devraient être d'autant plus grandes qu'ils seraient plus pesants, afin qu'ils puissent s'élever au-dessus du sol.

Quoique les molécules, quelles qu'elles soient, possèdent des axes qui sont le résultat de leur composition et de leur structure, ces derniers, jusqu'à ce jour du moins, ne se sont manifestés par aucun phénomène dans un fluide, qu'il soit élastique ou liquide.

Lorsque l'on divise un liquide en très petites parties, celles-ci prennent la forme d'une sphère ou d'un sphéroïde à axe vertical plus court que ceux situés horizontalement dans le plan équatorial de la *particule*.

Une particule liquide, si petite qu'elle soit, contient un grand nombre de molécules.

C'est cette propriété dont jouissent les liquides, c'est-à-dire de se diviser en particules sphéroïdales, qui fait que les particules des corps organiques affectent la même forme : produites au sein d'un liquide auquel elles sont immiscibles, ou dans un milieu qui leur permet de conserver la forme que la nature leur a donnée, elles conservent cette forme, absorbent des gaz, des fluides, en exhalent, et remplissent des fonctions spéciales, souvent en se modifiant au point de vue de leur composition chimique et de

leur structure qui leur permet de se revêtir d'une enveloppe comme les globules du sang et la fécule.

Lorsque les liquides sont en quantité notable, la mobilité et le poids de chacune de leurs parties fait qu'ils prennent la forme des vases qui les renferment et que leur surface est normale à la verticale.

Les liquides sont donc, pour l'époque actuelle, des assemblages ou des masses formées de parties pesantes, dans lesquelles on n'a reconnu aucun axe jusqu'à ce jour, quoique les molécules qui les constituent en possèdent certainement et quelquefois de plusieurs espèces, de natures et d'activités différentes.

Si l'on n'a point reconnu d'axes dans les fluides et particulièrement dans les liquides, on pourrait en conclure que les molécules sont à des distances assez grandes pour que les axes ne paraissent réagir les uns sur les autres et que la pesanteur est sans action sur eux, mais il n'en est probablement point ainsi. Il y a déjà bien des années que j'ai reconnu que la cristallisation dite en *feuilles de fougères*, que l'on observe à la surface des masses d'antimoine ou de bismuth qui ont cristallisé par fusion, est due à une espèce de projection de cristaux rhomboédriques, dont l'axe principal était vertical lors de la solidification du bain.

Il en est de même encore pour l'eau qui se solidifie sans éprouver d'agitation. La glace qui se forme à sa surface, donne des anneaux colorés lorsqu'on la regarde à l'aide de la lumière polarisée qui la traverse, et il résulte de ce fait que l'axe principal de cristallisation était normal à la surface du liquide.

Que cette disposition ait existé avant la solidification et qu'elle ait eu lieu en même temps que cette dernière, il ne faudrait pas moins reconnaître :

1° Que les molécules qui constituent les liquides peuvent être réunies symétriquement relativement à leurs axes;

2° Que la pesanteur n'est pas étrangère à ce phénomène.

Si des fluides élastiques et des liquides nous passons aux corps solides, on trouve, en dehors de ceux dont les parties ont pris

une forme organique sous l'influence de la vie, qu'ils peuvent exister dans deux conditions nettement distinctes :

1° Non cristallisés et même incristallisables;

2° Cristallisés.

Les solides non cristallisés peuvent se rattacher à deux groupes dont il va être dit quelques mots pour n'y plus revenir ensuite.

Les corps du premier groupe sont des amas de pulvicules disposées sans aucune espèce de symétrie, comme celles qui constituent les argiles et la plupart des produits minéraux faisant partie de la stratification terrestre.

Les corps du second groupe sont ceux auxquels j'ai donné le nom de *particulaires* dans mon *Traité de chimie* (1844). Corps que plus tard Graham a désignés sous le nom de *colloïdes,* et M. Frémy, sous celui de corps *hémiorganisés*. Ces corps sont formés de particules sphéroïdales qui sont agglomérées les unes avec les autres. L'empois d'amidon, la gélatine nous en donnent des exemples parmi les produits organiques; le soufre mou, l'hyalite, les agathes, les silex, parmi les minéraux.

Tous ces corps sont formés de petites particules sphéroïdales agglomérées les unes avec les autres, et c'est pour cela que je les ai nommées *particulaires;* nom qui donne une idée précise de leur structure.

Ces corps ne cristallisent point. Cependant j'ai vu des agathes incolores, ou plutôt blanchâtres ou translucides, soit des calcédoines passant à la forme rhomboédrique.

Il y aurait encore les métaux qui, quoique cristallisables, ne sont pas toujours cristallisés et qui, considérés en masse, en lames ou en fils, peuvent donner des renseignements sur la structure des corps et sur plusieurs ordres de phénomènes qu'ils peuvent présenter, tels que ceux qui se rattachent à l'élasticité, à la chaleur et même à la lumière.

Les corps solides cristallisés sont ceux dont on peut tirer le plus de renseignements : leur forme, leur structure, leur composition chimique, les phénomènes d'élasticité, ceux qui se rattachent à l'électricité, à la caloricité et à l'optique, permettent

d'avoir une idée assez nette et assez complète de leur constitution.

Le clivage des cristaux, quand il est possible, conduit à la forme des particules cristallines, particules qui peuvent, par leur réunion et par le décroissement, produire toutes les formes dont est susceptible la substance qui les a données. On comprend, en outre, quoique aucun savant ne l'ait démontré jusqu'à ce jour, qu'il doit y avoir une relation entre le nombre, l'arrangement et la nature des éléments constitutifs des molécules et la forme des particules, *forme qui doit en dériver* immédiatement (1).

Si l'on résume ce qui précède, on trouve que les corps sont constitués par des éléments nettement distincts les uns des autres :

1° Des *Mérons* ou parties constituantes des molécules, parties qui peuvent être identiques chez les corps élémentaires et principalement les métaux; mais qui peuvent avoir des masses différentes chez certains corps élémentaires ou remplissant les fonctions d'éléments chimiques, tels que le soufre, l'antimoine, le bismuth (2). Parties qui sont distinctes dans les molécules des composés, condition de laquelle il résulte que toutes les parties ne possèdent pas la même intensité d'action et qu'il peut, pour les corps cristallisés, en résulter des axes distincts au point de vue de leur situation et de leurs dimensions.

2° Des *Molécules* dont la forme et les dimensions dépendent des parties qui les constituent, de leur nombre, de leur mode d'arrangement et de leur nature.

3° Des particules ou des solides de formes géométriques déterminées, qui dépendent immédiatement de la structure, de la nature des molécules et de leur mode de groupement.

Lorsque les particules proviennent de la division d'un liquide

---

(1) Dans un prochain travail, je publierai les observations que j'ai faites sur ce sujet (cinquième mémoire sur la *Structure des corps*).

(2) Ces corps cristallisent dans des systèmes qui exigent que les parties constituantes de leurs molécules ou les mérons ne soient point toutes identiques, mais de plusieurs ordres distincts.

ou lorsqu'elles sont dues à un liquide qui se produit au sein d'un autre liquide dans lequel il n'est pas soluble, elles prennent généralement une forme sphéroïdale donnant naissance à des assemblages qui ne sont pas susceptibles de cristalliser.

4° Enfin des masses formées par l'assemblage de ces diverses parties.

Les corps peuvent ne pas renfermer toutes les parties constituantes qui viennent d'être énumérées.

Les fluides élastiques sont immédiatement formés par des assemblages de molécules dont la constitution est représentée par des mérons.

Les liquides, comme tous les corps sans exception, sont formés de mérons et de molécules, et si l'on admet l'existence de particules, on est obligé de reconnaître que, lorsqu'elles sont isolées, elles prennent une forme sphéroïdale.

On distingue dans les corps solides les *mérons*, les *molécules*, les *particules* et des *masses* qui peuvent être cristallisées.

Enfin tous les corps étant pesants, quel que soit leur état, on en conclut qu'ils possèdent une masse très variable et qui est le plus sûr moyen d'en affirmer l'existence et d'en représenter la quantité.

III

ACTIVITÉ PHÉNOMÉNALE DES CORPS

L'*activité* des corps, quels qu'ils soient, est manifestée par des phénomènes.

Les phénomènes généraux qu'ils présentent étant connus de tous ceux qui ont les moindres notions de physique, il suffira de les énumérer :

La pesanteur,

L'élasticité dont dépendent les phénomènes acoustiques,

La caloricité ou la cause qui produit en nous la sensation de la chaleur par son accroissement et celle du froid par sa diminution,

La lumière,

Les électricités,

Le magnétisme.

On peut distinguer jusqu'à quatre espèces d'électricités :

L'électricité statique ou mécanique,

L'électricité thermique,

L'électricité dynamique ou chimique,

L'électricité d'induction.

Tous les corps sont pesants. Cela démontre qu'il existe entre eux et le globe terrestre une action réciproque; action qui se révèle chez tous les corps sans exception, qu'ils fassent partie de notre globe ou qu'ils existent dans l'espace.

Tous les phénomènes, si distincts les uns des autres, qui viennent d'être énumérés, sont dus à des mouvements et non à des fluïdes spéciaux, comme on l'a admis, depuis la fin du siècle dernier, pour la plupart d'entre eux. Il ne peut être fait une exception que pour la pesanteur, qui exigerait une étude spéciale qui ne sera point abordée dans le présent travail.

Dès 1830, j'ai enseigné cette théorie, je l'ai discutée en 1844 dans mon *Traité de chimie*. Elle me paraissait être la seule plausible, et aujourd'hui elle est adoptée par la plupart des savants (1).

Le frottement qui détermine un ébranlement des particules des corps solides, développe de la chaleur ou de l'électricité statique. Lorsqu'il est violent ou lorsque l'on emploie le choc, on peut obtenir de la lumière, comme cela a lieu dans la percussion du briquet d'acier sur un morceau de silex.

Les réactions chimiques qui développent l'électricité dynamique, ne peuvent avoir lieu sans qu'il s'accomplisse un mou-

(1) On peut consulter à cet égard les conférences que j'ai publiées sur la formation du globe terrestre.

vement indispensable entre les corps mis en présence, soit le zinc et l'acide sulfurique; et l'on peut dire, puisqu'il s'agit d'action chimique, que les mérons, ou les éléments constitutifs des molécules, sont mis en mouvement; car c'est entre eux que la réaction chimique de cet ordre s'accomplit.

L'activité phénoménale des corps est donc réellement due à des mouvements spéciaux de leurs éléments. Il reste à examiner quels sont les éléments auxquels se rapportent les divers phénomènes.

IV

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DES CORPS & LES PHÉNOMÈNES QUE CES DERNIERS OFFRENT A NOTRE OBSERVATION.

J'admettrai dans ce qui va suivre, et comme un fait incontestable, que les éléments constitutifs des corps ne se touchent point, et j'ajoute même que le contact absolu n'existe pas dans la nature (1).

Il faut qu'il en soit ainsi pour que ces éléments puissent se mouvoir. Autrement le mouvement serait impossible.

La matière est plus ou moins condensée : les gaz sont éminemment compressibles, et les liquides ou les solides sont tous, sans exception, susceptibles de se contracter par un abaissement de température (2).

---

(1) J'ai discuté cette question. (V. *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles*, t. II, p. 203, année 1863.)

(2) La contraction de l'eau en passant de 0 à + 4° ne contredit point ce fait, puisque la glace est susceptible de se contracter par le refroidissement, comme tous les corps solides. Elle est d'ailleurs moins dense que l'eau, et par cela même ses parties constituantes ne se touchent pas.

ÉLASTICITÉ

Lorsqu'une corde sonore est tendue et qu'on la dérange de sa position normale, elle y revient peu à peu en exécutant une suite de vibrations. La corde n'a pu être déplacée, sans être allongée et sans que l'on ait apporté une variation dans la distance de ses éléments constituants. Si l'on percute une lame ou une tige métallique, le même phénomène se présente. Si on emploie une roue ou un archet, le phénomène se prolonge, un son continu se fait entendre; mais la température ne s'élève pas d'une manière sensible.

Le son est transmissible par les fluides élastiques, les liquides et même les solides. Tous les corps, quel que soit leur état, peuvent donc entrer en vibration. Non seulement ils éprouvent des déplacements, mais leurs éléments constitutifs immédiats se déplacent aussi et entrent en vibration les uns à l'égard des autres.

Si l'on cherche quels sont les éléments constitutifs des corps dont les mouvements participent à la production du son, on est conduit à reconnaître que ce sont les particules : le centre de ces éléments éprouve des déplacements autour de sa position d'équilibre, sans qu'ils éprouvent des modifications appréciables. Le centre des molécules se confondant avec celui des particules, ainsi que cela est évident pour les fluides, le mouvement de déplacement peut être rapporté à l'un ou à l'autre de ces éléments.

Si l'on examine comment le son est produit et quelles peuvent être les vibrations des éléments constitutifs des corps sonores, on trouve ce qui suit :

1° Que dans les cordes, lorsqu'on les déplace pour les faire vibrer, il y a allongement et par suite *écartement* de leurs éléments constituants dans le sens de la longueur de ces dernières. Les particules, par suite de leur attractivité et de leur tendance à reprendre leur situation primitive, se rapprochent les unes des autres, dépassent leur position d'équilibre, donnent lieu à une

vibration transversale en sens inverse, et, par suite, à un son soutenu et qui s'éteint peu à peu.

Si la longueur de la partie vibrante d'une corde change, le nombre des vibrations qui ont lieu entre les deux points fixes venant à varier, l'espace est parcouru avec la même vitesse, mais dans un temps qui est proportionnel à la longueur de la partie vibrante, d'où il résulte que le nombre des vibrations transversales est en raison inverse de la longueur de la corde.

2° Si l'on a affaire à des verges ou à des lames élastiques, on voit aussi qu'elles ne peuvent entrer en vibration, sans se déplacer partiellement et sans que la distance qui existe entre leurs particules ne vienne à varier. On trouve dans tous les cas que, pour une même substance, le nombre des vibrations est d'autant plus grand, ou le son d'autant plus aigu que l'espace à parcourir pour produire les vibrations est moins grand.

La vitesse du déplacement particulaire, en passant d'une substance à une autre est, d'une manière générale et sans entrer dans aucun détail, relative à la densité et au plus ou moins d'énergie avec laquelle les particules agissent les unes sur les autres. C'est cette énergie qui caractérise l'élasticité.

Cette élasticité peut varier selon la direction de certains axes qui, pour le quartz, ne sont pas ceux que la cristallographie et l'optique indiquent.

Il résulte du court examen qui précède, que les phénomènes qui se rattachent à l'élasticité et notamment à ceux de l'ordre acoustique, sont dus au déplacement et aux vibrations des particules ou des molécules en même temps qu'à celui des masses qu'elles forment.

Dans ce mouvement, le centre des particules est déplacé et vibre en même temps qu'elles; tandis que les éléments constitutifs de ces dernières, ou les mérons, conservent les mêmes distances qu'ils ont entre eux et ne sont point troublés dans l'exécution des vibrations qui leur sont propres. Il n'en serait autrement qu'autant que les mouvements du déplacement moléculaire s'exerceraient avec une grande violence.

CALORICITÉ

Si l'on frotte fortement un corps résistant, sa température s'élève. Par exemple, un simple clou de fauteuil fixé dans un bouchon, étant frotté sur une planche, peut atteindre une température suffisante pour qu'il cause une vive douleur si on l'applique sur la peau. Ce fait que j'ai connu étant très jeune, m'a toujours paru être une preuve évidente que la chaleur pouvait être due à un ébranlement mécanique. Les parties constituantes du corps frotté entrent en mouvement, et ce mouvement est identique avec la caloricité ou la cause de la chaleur.

Non seulement la température d'un corps soumis à un frottement purement mécanique s'élève d'une manière notable, mais le corps frotté se dilate. Pour démontrer ce fait, il suffit d'avoir un tube métallique, fermé à l'une de ses extrémités et communiquant par l'autre extrémité avec un tube en U vertical contenant un liquide. Le tube s'échauffant, l'air contenu dans son intérieur se dilate et opère le déplacement du liquide contenu dans le tube en U en opérant une pression qui fait monter le liquide dans la branche opposée.

Par le fait de la dilatation, la distance relative des centres des molécules est changée.

Lorsque la température d'un corps, si élevée qu'elle soit, demeure invariable, le corps demeure dans le même état de dilatation.

D'où, non seulement les centres des molécules sont écartés les uns des autres par la cause de la chaleur; mais elles restent dans un état de fixité au moins apparente si la température demeure invariable.

Il résulte de ces deux ordres de faits, et de la manière la plus évidente, que les phénomènes caloriques sont dus au mouvement vibratoire et au déplacement des molécules proprement dites.

Après avoir reconnu que la caloricité est représentée par le

mouvement des molécules, il importe de rechercher l'espèce de mouvement qui correspond à cet ordre de phénomènes.

Est-ce un mouvement rotatoire? est-ce un mouvement vibratoire?

Il a été démontré dans l'introduction de ce travail que le mouvement des molécules ne peut être rotatoire, que les axes des corps cristallisés ne permettent point qu'il en soit ainsi.

J'ai exposé dans un travail précédent que les molécules peuvent éprouver des mouvements alternatifs de contraction et de dilatation, par suite du mouvement des mérons dans la direction des axes des cristaux ou vers le centre des molécules où a lieu l'entrecroisement des axes.

Par suite de ce mouvement, non seulement les dimensions de ces molécules peuvent changer, c'est-à-dire qu'elles peuvent se dilater ou se contracter selon que la température est plus ou moins élevée; mais elles peuvent aussi s'écarter par suite d'une espèce de répulsion qu'elles exercent les unes sur les autres, répulsion d'autant plus grande que la température est plus élevée ou que le mouvement qui la représente est plus intense.

Le mouvement de l'ordre calorique pouvant déterminer des réactions chimiques, soit en faisant réagir les corps les uns sur les autres, soit même en séparant les éléments de ceux qui sont composés, on est conduit à admettre qu'il agit non seulement sur les molécules qu'il fait entrer en vibration et dont il peut faire varier la distance, mais aussi sur leurs éléments qu'il peut séparer les uns des autres.

La caloricité différerait de l'élasticité en ce que dans la première les éléments constitutifs des molécules entreraient en vibration en même temps que ces dernières. Tandis que dans les phénomènes d'élasticité les mérons n'interviendraient en aucune manière, à moins, ainsi que cela a été dit, que ce dernier mouvement ne s'exécute avec une grande violence.

Je sais qu'il existe aujourd'hui une théorie, celle de Clausius, qui admet que c'est le choc des atomes qui en détermine l'écartement. J'avouerai que je n'ai jamais admis cette théorie, qu'elle

m'a toujours paru non seulement invraisemblable, mais même impossible.

Les notions sur la nature des éléments chimiques et sur la manière dont ils interviennent dans la formation des molécules, ne sont connues de personne au moins que je sache, si ce n'est par quelques travaux trop peu généralisés et véritablement inacceptables.

Si l'on admet que les molécules des corps simples sont représentées par des atomes de nature variable, on est forcé de reconnaître qu'un atome ne peut être élastique, que cette propriété ne peut appartenir qu'à un assemblage de corpuscules tenus à distance les uns des autres.

Les atomes élémentaires ne pouvant être élastiques, leurs assemblages pouvant le devenir, on est encore forcé de reconnaître que s'ils se tiennent à distance les uns des autres, cela ne peut être dû à leur choc réciproque, mais à d'autres propriétés. Il faut considérer, en outre, que si les éléments chimiques sont formés par des atomes primitifs groupés d'une manière définie, on ne peut admettre qu'ils s'entrechoquent sans détruire l'arrangement qui les caractérise et que, par ce fait, il ne pourrait y avoir des éléments chimiques spéciaux, mais une seule matière atomique, et nous venons de voir qu'elle ne peut être élastique, comme l'entend M. Clausius. Maintenant, si le choc a lieu entre des molécules ou des assemblages d'atomes, on peut se demander : lorsque les molécules peuvent se rapprocher assez pour s'entrechoquer, comment il se fait que les éléments des unes ne passent pas dans ceux des autres, enfin comment la composition des molécules peut demeurer définie dans les mélanges où elles se trouvent.

Il est éminemment probable que, même dans les corps solides, les molécules ou leurs centres sont beaucoup plus éloignés les uns des autres que les parties constituantes de ces dernières ne peuvent l'être. Si l'on ne peut en donner des preuves directes, il y a au moins d'immenses probabilités en faveur de cette opinion.

On comprend alors facilement que la distance qui sépare les mérons d'une molécule doit être plus faible que celle qui sépare

ces dernières les unes des autres, sans cela les molécules se détruiraient et, au lieu des proportions chimiques, de la symétrie des cristaux, de l'harmonie qui se présente dans la constitution des corps, il n'y aurait que des mélanges inextricables, incompréhensibles et tout à fait différents de ce que nous observons.

Lorsque l'eau passe de l'état liquide à l'état de vapeur, son volume augmente de près de 1,700 fois à la température de 100 degrés, d'où il résulte que, en admettant que les molécules de l'eau à l'état liquide et à l'état de vapeur conservent le même poids et, par suite, demeurent en même nombre, la distance de ces dernières est devenue sensiblement 12 fois plus grande. On ne peut admettre dans ce cas que, quelles que soient les dimensions relatives des molécules de l'eau à l'état liquide et à l'état de vapeur, elles se choquent les unes contre les autres ou même qu'elles peuvent se toucher, en se dilatant, pour conserver l'état de fluide élastique; car, dans cette condition, il y aurait pénétration des molécules les unes dans les autres, et l'on n'aurait affaire qu'à un mélange et non à un composé défini. 2 volumes de vapeur d'eau ne représentant que le volume de l'hydrogène et non celui de l'oxygène qui y est combiné, on est forcé d'admettre que la proportion et par suite la combinaison se conservent. Il en est de même de la plupart des fluides élastiques composés.

Il découle donc de ces observations que la théorie de Clausius n'est point fondée et qu'elle ne peut être admise.

Depuis quelque temps, cette conséquence inévitable de la théorie de Clausius a été reconnue par divers savants, et l'on a admis que les éléments de la vapeur d'eau ne se rapprochaient pas plus les uns des autres que dans l'eau liquide. C'est là un pas fait dans la direction que j'ai indiquée, c'est un progrès, mais ce n'est pas encore tout ce qu'il convient de reconnaître et d'admettre : la nature du mouvement qui s'accomplit, éliminât-on le choc, n'est point représentée par le simple déplacement des molécules, mais aussi par les vibrations des mérons.

Enfin, il convient de reconnaître que le mouvement corpusculaire, qui produit toutes les actions caloriques, est celui des

molécules et de leurs éléments, que ce mouvement n'est point rotatoire et que celui des mérons doit être principalement un mouvement d'ensemble de contraction et de dilatation.

Or, j'irai plus loin et poserai cette question : pourquoi une molécule se mouvrait-elle plutôt dans un sens que dans un autre? On dira qu'elle est réfléchie; mais pour se réfléchir ne faut-il pas qu'il y ait eu une initiative de mouvement dans une direction déterminée? Les molécules ne peuvent pas non plus se mouvoir en éprouvant de grands déplacements; ce serait une chose impossible, il en résulterait un mélange inextricable qui n'aurait aucun rapport possible avec l'harmonie des proportions chimiques et des formes cristallines.

Il y a un mouvement d'un certain ordre, ce mouvement réagit à distance, cela n'est pas douteux; mais ce mouvement ne peut être celui aujourd'hui généralement adopté.

Il y a déplacement des centres des molécules et des particules, cela doit être, non seulement lorsqu'il y a dilatation ou contraction; mais même lorsqu'il y a équilibre de température; car cet équilibre ne peut être représenté que par des pertes et des acquisitions successives de mouvement qui se transmet du dedans au dehors et du dehors en dedans. Mais dans ces divers cas les centres d'activité des molécules ne se déplacent relativement que d'une faible quantité.

Il arrive même, lors des dilatations et des contractions que les corps éprouvent par l'échauffement ou le refroidissement, que le déplacement des centres des molécules peut être plus grand dans un sens que dans l'autre : cela est une nécessité; mais encore une fois, ces déplacements sont plutôt un résultat qu'une cause première de l'activité corpusculaire.

Quel est donc le mouvement qui s'exécute ou s'accomplit pour produire les actions calorifiques?

Ce mouvement est représenté par la dilatation et la contraction des molécules.

Ce mouvement est celui des mérons ou des parties constituantes de ces dernières, qui se rapprochent ou s'éloignent

simultanément de leur centre d'équilibre ou d'activité en suivant la direction des axes qui leur sont propres.

Dans les corps cristallisés homogènes, ou appartenant aux systèmes cubique et dodécaédrique, ceux qui occupent des positions du même ordre s'éloignent ou se rapprochent simultanément du centre d'activité en parcourant des espaces égaux, à moins que l'équilibre ne soit troublé par quelque acquisition ou perte de mouvement s'exécutant latéralement.

Dans les corps symétriques, les espaces parcourus par les mérons dépendent de leur situation, de leur nature, des actions qu'ils exercent les uns sur les autres, et finalement de la dimension des axes.

Dans les molécules des corps cristallisés en prisme à bases carrées, il y a deux espèces d'axes et de vitesses; dans celles d'un prisme droit, rhomboïdal ou rectangulaire, il y en a trois, et ainsi de suite pour chaque système cristallin.

Il résulte de ces conditions, non seulement pour les mérons de divers ordres qui constituent une molécule, des différences de vitesse; mais, de plus, que les vitesses sont proportionnelles aux axes auxquels ils aboutissent, puisque les mouvements de dilatation ou de contraction sont simultanés, et cela tant que la forme de la molécule n'est pas altérée.

Voilà les faits tels qu'ils se révèlent à notre observation et à notre jugement. Ils mettent en harmonie la constitution des corps et les mouvements que leurs éléments exécutent.

Si de la dilatation et de la contraction des corps par le développement ou la soustraction de la chaleur nous passons aux quantités de chaleur nécessaires pour produire ces phénomènes, nous aurons à nous occuper des chaleurs spécifiques d'abord et des chaleurs latentes ensuite.

Il ressort de la loi de l'égalité du coefficient des chaleurs spécifiques pour les corps solides d'un même ordre, que CELLES-CI SONT PROPORTIONNELLES AU NOMBRE DES MOLÉCULES CONTENUES DANS L'UNITÉ DE MASSE QUI SERT POUR LEUR DÉTERMINATION.

En effet, les chaleurs spécifiques sont exprimées pour des poids égaux de matière, et elles sont rapportées à celle de l'eau prise comme unité et comme terme de comparaison. Or, multiplier les chaleurs spécifiques par les équivalents, soit par les poids moléculaires des corps qui les possèdent, c'est les rendre proportionnelles à ces mêmes poids, et comme elles donnent des produits sensiblement constants, il en résulte qu'elles sont les mêmes pour des poids proportionnels aux équivalents ou pour un même nombre de molécules (1).

Les chaleurs spécifiques sont donc proportionnelles au nombre des molécules renfermées dans l'unité de masse.

Il résulte de cette loi que *les chaleurs spécifiques, ou les mouvements qui les représentent, sont sensiblement égales pour chaque espèce de molécule.*

Il importe cependant de faire une observation relativement à la valeur expérimentale des chaleurs spécifiques. La quantité numérique qui représente chacune d'elles ne peut ni ne doit être exactement proportionnelle aux valeurs qui viennent d'être indiquées. Non seulement les expériences qui servent pour les déterminer ne peuvent être parfaites, ni s'accomplir sans aucune espèce d'accident; mais, *relativement à la température,* celle-ci ne peut représenter exactement les quantités de chaleur. En outre, elles ne sont réellement point basées sur ces dernières, et tous les corps sur lesquels on opère ne sont point dans les mêmes conditions d'équilibre calorique, attendu que ces températures sont prises à des distances très variables du point de fusion ou de vaporisation des corps, et que les conditions de l'équilibre des molécules ne sont point les mêmes à mesure que l'on s'éloigne de ces limites. L'espace qui sépare les molécules des corps solides devient de plus en plus grand en se rapprochant du point de fusion ou de volatilisation, et rien n'a démontré jusqu'à présent que la température fût proportionnelle à cet accroissement.

(1) Voir mon *Traité de chimie*, t. I, p. 112 et suivantes.

Il résulte de ces observations que plusieurs ordres de phénomènes qui peuvent être exprimés par des nombres ne peuvent offrir les relations simples qu'ils présenteraient si les températures avaient une autre signification que celle qu'elles possèdent en réalité : indiquer un état d'équilibre déterminé des corps, relativement à la chaleur, et rien de plus.

Les chaleurs spécifiques ou les quantités de chaleur qui interviennent dans la variation de la température des corps, ont cela de particulier qu'étant simplement proportionnelles au nombre des molécules, la masse, le poids ou l'équivalent de ces dernières n'intervient en aucune manière. Il résulte de ce fait que la variation du mouvement des molécules, par l'action de la chaleur, n'est pas en rapport direct avec ce que l'on appelle *la quantité de mouvement :* dans celle-ci la masse entre nécessairement; dans la chaleur spécifique elle n'intervient en aucune manière. Il résulte évidemment de ce fait qu'au moins dans les corps solides, les molécules sont tenues à des distances déterminées, d'une part, par le mouvement qui représente la chaleur, et, d'une autre part, par une force ou un mouvement attractif qui les maintient dans l'état d'équilibre. Il ne faut pas plus de mouvement calorique pour remuer une molécule de phosphore que pour agiter ou déplacer une molécule de bismuth, et cependant le poids moléculaire de ce dernier corps est plus de six fois et demi plus grand que celui du premier.

Pour chaque état des corps, il faut des quantités de chaleur déterminées; c'est-à-dire que chacun d'eux ne peut exister que par des quantités de mouvement également déterminées. Ces mouvements, uniquement employés pour maintenir ces états spéciaux, ne se manifestent point par des actions extérieures; de là les *chaleurs latentes.*

Pour qu'un corps passe de l'état solide à l'état liquide, non seulement il faut élever sa température, mais il faut lui fournir la quantité de mouvement qui le maintiendra dans son nouvel état. Dans cette nouvelle condition les molécules ne peuvent plus s'agréger entre elles. La distance qui les sépare est devenue plus considérable qu'à l'état solide; elles jouissent d'une grande mobilité relative. Cette mobilité a été obtenue par l'écartement de leurs centres, par leur dilatation, par l'accroissement de la trajectoire des mérons, souvent même par une modification dans le nombre et l'arrangement de leurs parties. C'est cette dernière action qui doit se produire pour l'eau, puisqu'elle est moins dense à l'état solide qu'à l'état liquide, dans le rapport de 0,916 à 1,000.

Les chaleurs latentes des liquides ont été à peine étudiées, celles des fluides élastiques l'ont été davantage; mais elles n'ont conduit à aucune loi. — Cependant on peut affirmer qu'*elles sont proportionnelles aux nombres relatifs des molécules renfermées sous l'unité de poids qui sert pour les déterminer.*

Cette loi sera démontrée dans la deuxième partie de ce travail.

La chaleur joue un rôle trop considérable dans l'accomplissement des phénomènes chimiques pour que l'on puisse se borner à l'examen de ceux qui appartiennent à la physique.

Aucune action chimique ne peut s'accomplir sans mouvement, qu'il y ait combinaison, séparation ou échange entre les éléments des corps. Aussi ces actions peuvent-elles être considérées comme la source principale de la chaleur, de la lumière et des électricités. Chaque élément chimique se conduit d'une manière spéciale relativement à la chaleur. L'action de cette dernière est essentiellement caractérisée par des dilatations, des fusions, des volatilisations, des transformations d'état moléculaire, ou des destructions, ou des formations de combinaisons, lorsque plusieurs éléments sont en présence.

L'examen approfondi de tous ces faits exigerait un travail considérable. Je me bornerai à signaler ceux qui offrent le plus d'importance.

Pour qu'un corps conserve son état moléculaire, il faut qu'il y ait un équilibre réel entre ses parties constituantes. Cet équilibre se rattache à plusieurs sortes de parties : les mérons, les molécules et les particules que l'on est obligé de prendre en considération dans les liquides et les solides.

L'équilibre toutefois, vu le déplacement des molécules et de leurs éléments, ne peut exister qu'entre des limites définies; aussi, lorsque ces limites sont atteintes, il ne faut plus qu'une légère variation de température pour que des réactions s'accomplissent, que de nouveaux arrangements aient lieu, et pour que des états moléculaires spéciaux en soient la conséquence inévitable.

C'est ce qui va être examiné.

Lorsque l'on étudie la constitution des corps, on est conduit à admettre que leurs éléments sont soumis à deux actions distinctes et même contraires : l'une d'elles tend à les réunir; l'autre à les éloigner. Entre ces deux actions, il existe des conditions d'équilibre variées qui se manifestent à notre observation par des dilatations ou des contractions et des changements d'état. L'une d'elles, l'action expansive, dérive, à n'en pas douter, de celle qui produit la chaleur. C'est une action que l'on pourrait considérer comme le résultat d'une force spéciale; mais nous allons plus loin, cette force est due au mouvement des éléments constitutifs des corps. Cette opinion est admise aujourd'hui, et l'on n'en peut douter puisque les phénomènes auxquels elle donne naissance, sont tous en harmonie avec cette pensée féconde.

Lorsqu'un corps est à l'état de fluide élastique, les molécules qui le constituent présentent une grande simplicité dans leur constitution; dans les mêmes conditions de température et de pression leurs centres d'activité sont tenus à des distances égales, quelle que soit leur nature.

Les molécules sont pesantes, et il faut une certaine force pour

faire qu'elles se séparent, se soulèvent et remplissent la condition qui vient d'être indiquée.

Plus elles sont denses, plus la température doit être élevée; en d'autres termes, plus le mouvement thermogène doit être considérable.

Des exemples indubitables de ce fait peuvent être tirés des carbures d'hydrogène de l'ordre des éthènes ou des somathènes. Le bicarbure d'hydrogène est gazeux à la température ordinaire, le double bicarbure l'est encore; mais il est facilement liquéfiable par un abaissement de température; le cétène, qui offre un degré de condensation moléculaire beaucoup plus considérable, est liquide, les paraffines encore plus condensées, sont solides, et il faut les porter à une température relativement élevée pour les réduire en vapeur.

Non seulement les molécules sont pesantes, mais elles occupent aussi un volume variable et ce volume s'accroît en même temps que leur condensation; les corps qui viennent d'être cités en peuvent fournir une preuve évidente, ainsi que cela va être démontré.

Si la densité des fluides élastiques s'accroît à mesure que leurs molécules deviennent plus pesantes et même exactement dans le rapport de leur poids, on peut dire que la même chose a lieu à l'égard de leur volume. Effectivement, lorsque le mouvement des molécules a assez diminué pour ne plus leur permettre de rester à l'état de fluide élastique, elles se rapprochent et donnent un produit qui, de l'état de fluide élastique, est passé à l'état liquide. La densité du liquide, sans être exactement la même pour tous les corps d'un même ordre, varie cependant dans des limites fort étroites, d'où il résulte que *le volume des particules liquides,* et ici je me sers de ce mot pour exprimer le volume des molécules renfermées dans l'espace que chacune d'elles occupe, *est sensiblement proportionnel au nombre des parties constituantes des molécules.*

La particule du cétène est beaucoup plus grande que celle de l'éthène et celle des paraffines l'est encore davantage.

Dans les fluides élastiques, les groupements des mérons, les formes et les volumes des molécules ne se sont encore révélés à nous que par la spectroscopie; mais rien n'indique qu'à la distance où elles se trouvent les unes à l'égard des autres, leurs parties constituantes exercent une action qui détermine l'arrangement de leurs axes dans un ordre quelconque. Rien dans les fluides élastiques ne nous a révélé quelque arrangement de cette nature. Il en est de même des liquides. Ils présentent le même mode d'action dans tous les sens, et rien ne nous a encore appris que les axes des molécules qui les forment aient pris un arrangement quelconque. Seulement, et je l'ai démontré dans un mémoire précédent, les molécules, soit à l'état gazeux, soit à l'état liquide, prennent l'arrangement alterne (voir mon troisième et mon quatrième Mémoire sur la *Structure des corps*) et leur limite dans l'espace est représentée par le dodécaèdre rhomboïdal.

Un seul fait semblerait démontrer que certains liquides ou certaines dissolutions possèdent un arrangement de cet ordre, c'est lorsqu'ils présentent la polarisation circulaire. *Mais ce phénomène est dû à une action particulaire et non à une action moléculaire,* ainsi que cela sera démontré dans la deuxième partie de ce mémoire. La liquidité est bien due à l'état intermédiaire entre les fluides élastiques et les solides.

Que le mouvement moléculaire diminue au point de ne plus permettre aux molécules de se soulever et de se séparer, elles se rapprochent les unes des autres; mais à des distances telles qu'elles ne peuvent encore exercer une influence suffisante pour déterminer le parallélisme de leurs axes et devenir fixes les unes à l'égard des autres. Si le mouvement diminuait encore, ce fait pourrait avoir lieu et la solidification en serait la conséquence. Si l'on opère en sens inverse, on comprend qu'en augmentant le mouvement des éléments des molécules, elles s'écartent, et il arrive une limite où elles n'exercent plus assez d'action les unes sur les autres pour conserver la fixité relative qui constitue l'état solide. Alors elles sont devenues libres et elles constituent un liquide. Si le mouvement est augmenté, il arrivera une limite où

elles pourront se soulever, se séparer complètement les unes des autres et n'être maintenues ensemble que par une pression, qu'elle soit exercée par leur propre poids comme dans la masse atmosphérique, ou par une enveloppe qui les conserve réunies.

Cela permet de comprendre qu'il doit y avoir une certaine relation entre leurs poids et la température à laquelle elles peuvent se séparer. Il y a bien longtemps que j'ai trouvé, toujours pour les somathènes, que *les points de fusion et ceux de vaporisation, ou les températures auxquelles ces phénomènes ont lieu, sont proportionnelles aux poids moléculaires.*

Si le mouvement qui tient les molécules à une certaine distance les unes des autres vient à diminuer, il arrive un moment où l'action attractive des molécules l'emporte sur le mouvement répulsif, elles se rapprochent en établissant autant que possible le parallélisme de leurs axes et elles adhèrent assez les unes aux autres pour constituer l'état solide. Ceux qui ont vu cristalliser le soufre en passant de l'état de fusion à l'état solide, savent que de longues files de cristaux se forment au sein même du liquide et que l'arrangement des parties est intervenu dans la solidification. Il en est de même pour tous les corps qui cristallisent par voie de fusion et de refroidissement, que ce soit du soufre, du bismuth ou un métal quelconque, jamais les cristaux ne forment une couche parfaitement homogène, et il faut bien qu'il en soit ainsi pour que les formes cristallines apparaissent.

Ce qui a été dit précédemment sur les vibrations qui s'accomplissent dans les molécules des corps solides suffit pour compléter ce qui leur est relatif.

Lorsque l'on chauffe un corps, il peut arriver que l'équilibre qui existe entre les parties constituantes de ses molécules soit troublé. Se trouvant de plus en plus écartées par les vibrations qu'elles exécutent, elles peuvent prendre un nouvel état d'équilibre qui a généralement lieu par une division qui devient de plus en plus grande à mesure que la température s'élève, plutôt que par une réunion qui n'a lieu que dans une action en sens inverse.

Ce fait à lui seul suffit pour faire comprendre que la théorie de Clausius est insuffisante : LE MOUVEMENT DES MOLÉCULES NE SUFFIT PAS POUR PRODUIRE CES CHANGEMENTS, IL FAUT AUSSI LA VIBRATION ET L'ÉCARTEMENT DES MÉRONS QUI LES CONSTITUENT.

A la température de l'ébullition du soufre, la vapeur de ce corps a une densité triple de celle qu'elle devrait avoir d'après son équivalent, ou bien, en d'autres termes, la molécule pèse trois fois plus qu'elle ne devrait peser, ou bien encore elle contient trois fois plus d'éléments mécaniques qu'elle n'en devrait contenir si l'on compare d'ailleurs ce corps avec l'oxygène. A une température beaucoup plus élevée, cette molécule se divise en trois, et alors seulement elle devient du même ordre que celle de ce dernier corps.

Les éléments de certains composés ayant une même constitution, le sesqui-oxyde de fer, celui du chrôme, la zircone, lorsqu'on les chauffe, perdent de la chaleur, deviennent lumineux et plus denses, par suite d'une nouvelle distribution et d'un nouvel arrangement de leurs parties.

Une foule de corps composés sont détruits par la chaleur : les oxydes de mercure, d'argent, d'or et d'autres métaux encore, le bi-oxyde de manganèse l'est en partie, le carbonate de chaux subit incessamment cette réaction pour les besoins de l'industrie. Les azotates, une foule de composés minéraux enfin et tous les composés organiques sont dans ce cas : l'élévation de la température dilate les molécules, écarte les mérons, les sépare, en même temps qu'elle leur restitue le mouvement perdu par l'acte de la combinaison.

On voit enfin qu'en mettant en présence des corps de natures différentes et qu'en les soumettant à l'action de la chaleur, le mouvement de séparation des parties constituantes de leurs molécules leur permet d'agir et de donner naissance à une foule de combinaisons qui peuvent exister dans les conditions où l'on a placé les éléments qui entrent dans leur constitution.

J'ajouterai ici cette loi générale relative aux actions et aux phénomènes relatifs à la chaleur :

TOUTES LES ACTIONS, TOUS LES PHÉNOMÈNES CALORIQUES, SANS EXCEPTION, SONT PROPORTIONNELS AU NOMBRE DES MOLÉCULES CONTENUES DANS LES CORPS.

Cette loi, qui découle de ce qui vient d'être exposé et qui sera démontrée de nouveau dans la deuxième partie de ce travail en en faisant diverses applications, démontre, d'une manière certaine et aussi positive que possible, que les phénomènes de la caloricité se rattachent aux molécules proprement dites en y comprenant leurs éléments et non exclusivement à ces derniers, comme cela a lieu pour la lumière et l'électricité dynamique ou chimique.

Il est inutile de prolonger cet examen; il est tout en faveur de la théorie qui est l'objet de ce travail, et la chimie, plus encore que la physique, vient affirmer que les phénomènes de caloricité sont dus au mouvement des molécules et de leurs éléments plutôt qu'au simple choc de ces dernières.

Cela prouve en outre que toutes ces réactions s'accomplissent à distance et sans contact d'aucune espèce. D'une autre part, le fluide éthéré n'étant intervenu en aucune manière dans l'examen qui vient d'être fait, on peut en conclure qu'il est entièrement étranger à toutes ces réactions et que son intervention est absolument inutile pour que l'on puisse se rendre compte des phénomènes de la caloricité; on peut ajouter et même de leur transmission.

LUMIÈRE

La lumière pouvant être produite par le choc violent de l'acier sur le silex, une foule de réactions chimiques pouvant la faire apparaître, il convient de la considérer comme un mouvement spécial dû principalement aux mérons ou aux éléments constitutifs des molécules. C'est en effet entre ces éléments que les réactions chimiques ont lieu, les combinaisons de cet ordre s'effectuant entre les éléments des molécules. On pourrait penser, par suite d'un examen insuffisant, que les molécules des corps composés sont le résultat de la réunion de diverses molécules

élémentaires, mais, ce qui a lieu pour les fluides élastiques qui suivent les lois de Gay-Lussac et d'Avogadro, nous force d'admettre que les molécules élémentaires se divisent dans l'acte de la combinaison, d'où il résulte par exemple qu'une molécule de chlorure hydrique est formée par la réunion, je dirai la pénétration d'une demi-molécule de chlore et d'une demi-molécule d'hydrogène, et l'on admet également qu'une molécule d'eau à l'état de vapeur est formée par la réunion d'une molécule d'hydrogène et d'une demi-molécule d'oxygène, de telle manière que leur centre d'activité se confonde (1).

La lumière diffère donc de la chaleur en ce qu'elle est due au mouvement des éléments des molécules et non au mouvement de ces mêmes molécules.

Si la chaleur rend les corps lumineux lorsque la température est fort élevée, cela est sans doute dû à ce qu'en excitant fortement le mouvement des molécules on finit par réagir sur leurs éléments et parce qu'enfin les sources de chaleur très élevées sont en même temps des sources de lumière. J'ai déjà eu l'occasion de m'efforcer de démontrer que la chaleur et la lumière, contrairement à l'opinion de la plupart des physiciens, sont essentiellement différentes; mais je crois devoir ajouter de nouvelles preuves à celles que j'ai déjà données. (V. *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. II, p. 313.)

Les composés salins formés par les chroïcolytes ou les métaux dont les dissolutions sont colorées, ont une même couleur pour plusieurs sels de même ordre. C'est ainsi que des sels de cuivre sont bleus, que ceux d'or sont jaunes, ceux de nickel verts, etc.

Le métal ne représentant qu'une partie de la molécule saline, des mérons, rien de plus, ce sont donc ces derniers qui donnent la couleur aux sels.

Il arrive souvent qu'un seul métal peut donner des couleurs

---

(1) Je ne dis point *centre de gravité*, parce que ce mot ne conviendrait point dans ces cas; le terme *centre d'activité* a une signification plus précise.

différentes, telles que le vert clair et le rouge brun pour le fer, le vert et le bleu pour le cuivre, le rose et le violet pour le manganèse, le vert et le jaune pour l'urane.

Dans cette dernière condition, le produit colorant est toujours représenté par des mérons, seulement ces mérons, quoique dérivant d'un même métal, ne sont point identiques. Il peut même arriver qu'un changement de couleur soit dû à l'intervention de l'eau ou de l'hydrogène, ou à l'union de plusieurs éléments distincts; mais dans tel cas que ce soit, ce sont toujours les mérons qui produisent la couleur.

Si l'on soumet la vapeur d'un corps à une température élevée pour la rendre lumineuse et si on l'examine à l'aide de la spectroscopie, ce sont les raies données par les éléments chimiques qui deviennent apparentes.

Il convient encore de remarquer que dans l'action de la lumière, si vive qu'elle soit, les molécules ne changent point de place, demeurent équidistantes, et qu'il en résulte que l'action qui produit la lumière doit s'exercer dans l'intérieur de ces dernières. Quand un prisme analyse le mouvement lumineux, ou plutôt quand il est diversement influencé par lui, il y a très probablement un changement dans la vitesse de rotation des mérons; mais le prisme ne se dilate que d'une manière à peine sensible et sous la seule influence de la chaleur.

On peut donc conclure de ces observations que la lumière est le résultat des vibrations des mérons ou des éléments constituant les molécules.

Il résulte de ces faits que la lumière diffère essentiellement de la chaleur, non seulement par les phénomènes spéciaux que l'une et l'autre produisent, mais aussi par leur origine : *la chaleur est due au mouvement de contraction et de dilatation des molécules; la lumière, à celui des mérons.*

Reste maintenant à voir quel peut être le mouvement moléculaire qui produit cette dernière.

Nous avons vu que le mouvement moléculaire qui représente la calorieité doit être dû non seulement au déplacement des

molécules et à leur vibration, mais aussi à leur dilatation et à leur contraction ou au mouvement des mérons parallèlement aux axes des molécules.

Or, s'il en est réellement ainsi, le mouvement qui produit la lumière ne peut être qu'un mouvement vibratoire transversal ou un mouvement de rotation.

Pour se rendre compte de ces divers mouvements, on peut se figurer une molécule ayant la forme d'un hexaméron régulier dont les mérons sont situés aux extrémités libres de trois axes égaux disposés rectangulairement, comme ceux du système cubique, ou aux centres des faces d'un cube ou aux sommets d'un octaèdre régulier.

Par l'action calorique la molécule entrera en vibration, et les mérons qui la forment vibreront aussi dans la direction des axes. Si la molécule est homogène, ou si elle est formée de six mérons identiques, le rapprochement et l'éloignement des mérons se feront dans le même temps pour chacun d'eux, de telle sorte que l'hexaméron demeurera toujours régulier, mais changera de dimensions.

Si la lumière intervient ou si une action lumineuse se produit, les mérons pourront vibrer dans des plans perpendiculaires aux axes ou, pour le cas supposé, dans des plans parallèles aux faces d'un cube; ce qui est la même chose.

Les mérons pourraient tourner sur eux-mêmes et autour des axes cristallographiques aux extrémités desquels ils sont situés.

Ils pourraient encore exécuter un mouvement vibratoire en décrivant une courbe dans un plan perpendiculaire à l'axe, ou hélicoïdal par suite du mouvement alternatif de contraction et de dilatation des molécules, ou de rapprochement et d'écartement des mérons.

Indépendamment de ces mouvements simples, les mérons pourraient en exécuter de plus compliqués, comparables à ceux décrits dans l'espace par une tige métallique encastrée à l'une de ses extrémités, que l'on fait vibrer avec un archet; en admettant, de plus, que la tige avance et recule ou s'allonge et se raccourcit en même temps pour représenter le mouvement calorique.

Si parmi ces divers mouvements on était appelé à faire un choix, celui de rotation proprement dit serait le seul qui pourrait résister à l'examen. En effet, si la matière est atomique à son origine et si les éléments chimiques, ainsi que cela est éminemment probable et que j'en démontrerai la possibilité, sont formés par des agglomérations d'atomes, si les mouvements des parties constituantes des corps viennent de ceux des atomes, ces derniers, n'étant pas soumis aux conditions qui résultent de leur agglomération, doivent exécuter un mouvement de rotation, et lorsqu'ils commencent à réagir mutuellement, il est encore probable qu'ils se comportent comme les éléments du système solaire, qu'ils tournent non seulement sur eux-mêmes, mais aussi les uns autour des autres.

Toutefois le mouvement de rotation n'exclut pas le mouvement vibratoire, et un jour peut-être on trouvera que ces deux sortes de mouvements, qui ne s'accomplissent probablement pas avec la même vitesse, produisent des phénomènes spéciaux dont ils serviront à connaître les lois et permettront de les exposer nettement.

Le mouvement a une condition d'existence aussi assurée que celle de la matière proprement dite, qui serait inerte sans lui, et il a pour origine celui des éléments primitifs ou des atomes qui la constituent.

L'origine de tout ce qui est existe dans la matière atomique.

J'ai déjà eu l'occasion de le dire : la matière proprement dite n'est qu'une abstraction; il en est de même du mouvement; ils ne peuvent exister l'un sans l'autre et par leur réunion ils nous donnent ce qui est : les êtres et les actes qu'ils accomplissent ou, en d'autres termes, les phénomènes qu'ils présentent.

Si l'examen qui vient d'avoir lieu a pu nous offrir de grandes difficultés, on en rencontrerait encore de plus grandes s'il devait être approfondi. Il resterait à s'occuper des couleurs, à voir ce que peut être la lumière polarisée et comment la constitution des corps se rattache aux phénomènes optiques qu'ils présentent. Il y aurait encore à rechercher ce que c'est que la polarisation circulaire.

Ces conditions spéciales de la lumière seront cependant abordées dans la deuxième partie de ce travail.

Des difficultés non moins considérables vont se présenter dans l'examen des phénomènes électriques.

PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES

Les phénomènes électriques sont de plusieurs ordres. Tous les physiciens distinguent l'électricité *statique* de l'électricité *dynamique*. La première est généralement produite par le frottement de certains corps, et la seconde l'est par des réactions chimiques.

A ces deux électricités il importe de joindre l'électricité *thermique*, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer lors du Congrès scientifique qui s'est réuni à Bordeaux en 1861 (1), et enfin l'électricité *d'induction*, qui possède des caractères spéciaux.

Le caractère commun de ces divers phénomènes est que chacun d'eux peut se séparer en deux parties distinctes qui paraissent s'annuler par leur réunion; mais cela n'a cependant jamais lieu sans qu'il se produise de la chaleur ou de la lumière, ou l'un et l'autre à la fois, si la réaction s'effectue sur des masses suffisantes.

Électricité statique.

L'électricité mécanique est essentiellement caractérisée par les attractions et les répulsions qu'elle produit, ainsi que par son inaction sur l'aiguille aimantée et sur les composés chimiques qu'elle ne peut détruire.

Lorsqu'elle a été condensée et qu'on réunit les deux espèces dont elle se compose, elle donne alors des étincelles électriques. Dans ce cas, non seulement elle produit de la lumière et de la

(1) *Congrès scientifique de France*, 28me session, t. I, p. 505 pour la structure la plus intime des corps; p. 512 pour les mouvements vibratoires des parties constituantes des corps, servant à l'explication des phénomènes que ces derniers présentent.

chaleur, mais elle donne des commotions, elle réagit sur les aimants; elle peut même en produire et, de plus, elle est apte à opérer des réactions chimiques.

Dans cette dernière condition, elle doit être considérée comme étant identique avec l'électricité d'induction, et nous verrons bientôt ce qu'est cette dernière.

Si l'on met en communication le conducteur d'une machine électrique à frottement, si puissante qu'elle soit, avec l'une des extrémités du fil d'un galvanomètre, et si l'on fait communiquer l'autre extrémité du fil avec le sol, aucune action sensible ne paraît avoir été exercée sur l'aiguille aimantée de l'instrument.

Si l'on met un voltamètre en communication, d'une part, avec le conducteur d'une machine électrique, si puissante qu'elle soit, et, d'autre part, avec le sol, aucune bulle de gaz n'apparaît, aucune décomposition chimique ne s'accomplit. Il en est de même si l'eau acidulée du voltamètre est remplacée par des dissolutions salines.

L'électricité dite *statique*, et que j'ai déjà désignée sous le nom de *mécanique*, est donc impropre à réagir sur les aimants et à provoquer la séparation chimique des produits *méronaires*, c'est-à-dire dont la composition ou la combinaison s'est accomplie entre les mérons.

Il résulte de ce fait que l'électricité mécanique n'est point due au mouvement des éléments les plus intimes des corps. Il reste maintenant à savoir quels sont les éléments corpusculaires dont les mouvements peuvent la produire.

La principale origine de l'électricité statique ne permet pas de douter qu'elle soit due au mouvement des éléments constitutifs des corps. Développée par le frottement, qui comprend tout à la fois une adhérence et du mouvement, on conçoit facilement qu'il y a un ébranlement, un dérangement de l'état statique de leurs éléments et que des vibrations d'un ordre spécial doivent en être la conséquence.

La plupart des corps qui donnent de l'électricité par le frottement étant particulaires, tels que le verre, le succin, la résine-laque, etc; ces corps ne subissant aucune réaction chimique par

le frottement, il en résulte forcément que le mouvement produit par le frottement, n'exerçant qu'une faible action calorifique, les parties essentiellement ébranlées sont les particules et les molécules qui éprouvent principalement un déplacement oscillatoire.

Il resterait maintenant à voir comment un mouvement de cette nature peut donner naissance à des actions qui ont permis d'établir deux espèces d'électricités : une dite *vitrée* et l'autre *résineuse*.

Il resterait aussi à prendre en considération l'électrisation de la tourmaline et de la boracite par la chaleur, ainsi que celle du spath d'Islande par une simple pression.

Il faut reconnaître que l'étude de l'électricité statique, qui mérite tout autant d'intérêt que les autres parties de la physique, a été considérablement négligée par les physiciens de notre époque, et qu'au point de vue de l'étude spéciale que nous en faisons, il se présente des difficultés considérables qui ne pourront être levées que par de nouvelles expériences qui, autant que je le pourrai, interviendront dans la deuxième partie de ce mémoire.

Électricité thermique.

Tous les physiciens savent que l'électricité thermique existe à l'état de courant et qu'elle réagit sur l'aiguille aimantée d'un galvanomètre. Elle traverse difficilement plusieurs liquides qui transmettent l'électricité dynamique proprement dite, et elle est presque inerte pour opérer des décompositions chimiques.

Cette électricité, par suite de son origine et de sa spécialité, paraît devoir être rapportée au mouvement des parties qui produisent la chaleur.

Dans cette pile, comme dans la suivante, les physiciens n'ont pu encore se rendre un compte suffisant de l'effet produit par la soudure ou par la réunion des métaux constituants de la pile, mais il doit être évident pour tous, que ce sont elles qui opèrent le départ des électricités ou au moins qui déterminent le sens et

la direction dans laquelle elles se meuvent. Au contact des deux métaux, le mouvement paraît se partager en deux parties dont l'une est conduite plus facilement par l'un des métaux que par l'autre. C'est ce fait qui en déterminerait la séparation.

Électricité dynamique ou chimique.

L'électricité dynamique est toujours due à des réactions chimiques, quel que soit le procédé dont on fait usage pour la produire.

Les réactions de cet ordre s'effectuant entre les mérons ou les éléments des molécules, on est conduit à admettre que, comme pour la lumière, c'est le mouvement de ces derniers qui produit cette sorte d'électricité.

La théorie du développement de l'électricité dynamique est mal connue, Volta l'attribuait au contact des métaux hétérogènes. Depuis cette époque, par une suite d'inventions qui ont donné des piles de plus en plus actives et puissantes, on a abandonné la théorie de Volta pour admettre celle de l'action chimique comme unique source de cette électricité; mais l'action exercée par le contact n'a pas été suffisamment étudiée, elle est mal appréciée, et l'on n'en connaît point l'effet réel. Voici ce que j'ai observé à ce sujet : l'électricité dynamique ou chimique est rarement pure. On se rappelle que Volta a inventé son électroscope condensateur pour reconnaître la présence de l'électricité due au contact des métaux, instrument qui indique la présence de l'électricité statique et non celle de l'électricité dynamique. Le voltamètre dans lequel l'eau acidulée est décomposée par une réaction de l'ordre chimique opérée par le fluide électrique, est le véritable instrument qui permet d'affirmer la présence de l'électricité dynamique.

Si l'action est rendue aussi simple que possible, par exemple, si l'on fait fonctionner un seul couple à grande surface de zinc et de platine, on obtient de l'électricité qui ne donne que de faibles commotions, qui possède à peine les propriétés de l'électricité

mécanique; mais qui jouit d'une grande énergie chimique et qui produit une vive lumière par la réunion des pôles de l'appareil qui la donne.

Si, au lieu de cela, les couples ont une faible surface, s'ils sont en grand nombre et par suite présentent une grande quantité de soudures, la pile donne des commotions, et elle agit en partie comme un condensateur.

Cependant, il ne faudrait pas croire que la pile produite par un seul couple serait sans action sur le système nerveux; la grenouille de Galvani est là pour nous démontrer le contraire, et il suffit de mettre en contact un fil de zinc avec un fil de cuivre et de faire que les extrémités libres touchent la langue pour qu'elle éprouve un mouvement convulsif et qu'elle perçoive une saveur qui varie selon que le zinc est au-dessus ou au-dessous de cet organe pendant que le cuivre est dans la position inverse.

Gay-Lussac et Thenard (1) ont comparé plusieurs piles entre elles en tenant compte du nombre des couples et de leur surface. Pour obtenir ce résultat, ils se sont basés sur la quantité d'hydrogène mise en liberté par les piles qu'ils ont employées. Ils ont donc rapporté ces effets à une action chimique pure.

Ils ont trouvé que *les effets de deux piles d'un égal nombre de paires* (couples) *sont à peu près proportionnels à leur surface* et, d'une autre part, en opérant avec des couples égaux dont ils ont fait varier le nombre, que *les effets produits s'éloignent peu d'être proportionnels à la racine cubique du nombre des plaques.*

Dans ce dernier cas la surface réagissante était proportionnelle au nombre des plaques, et cependant l'action chimique qu'elles peuvent exercer isolément a été considérablement diminuée. Cette grande différence dans l'action chimique exercée par la pile devait sans aucun doute être due à l'action des soudures qui opèrent la réunion des couples les uns avec les autres.

Dans une circonstance de cette nature, il est difficile d'ad-

(1) *Recherches physico-chimiques*, 1811, t I, p. 31 et suivantes.

mettre que le mouvement a été détruit; mais on conçoit qu'il ait pu être transformé en passant d'un système corpusculaire dans un autre et que, d'électricité chimique, il soit devenu électricité thermique et électricité mécanique.

Les expériences de Wilkinson, qui ont été publiées antérieurement à celles de Gay-Lussac et Thenard peuvent servir pour démontrer qu'il en est ainsi (1).

Au lieu d'employer la quantité d'hydrogène produite par une pile pour en mesurer l'action, Wilkinson s'est servi d'un fil d'acier d'environ un soixante-dixième de pouce de diamètre, soit $0^{cm}036$, qu'il brûlait par l'action du courant, et l'intensité de ce dernier était mesurée par la longueur du fil qui pouvait entrer en ignition.

Ce savant a trouvé ainsi que *les effets de la pile sont proportionnels au nombre des plaques de même grandeur.*

Cette loi paraît différer beaucoup de celle trouvée par Gay-Lussac et Thenard, puisque, selon ces derniers savants, l'action chimique est comme la racine cubique du nombre des couples et qu'ici l'action est proportionnelle au nombre de ces derniers; elles se rattachent cependant l'une à l'autre d'une manière nette et précise.

Lorsque l'on augmente le nombre des couples, l'action chimique va en diminuant, parce qu'il y a transformation de l'électricité, tandis que dans l'ignition et la combustion d'un fil métallique, toutes les actions, tous les mouvements particulaires sont réunis et l'action doit être réellement proportionnelle au nombre des couples qui sont tous identiques et qui la représentent intégralement quelle qu'elle puisse être.

Il résulte de l'ensemble de ces faits et de ces lois que l'électricité chimique exerce une action réellement proportionnelle à la cause qui la produit; mais que venant à se transformer selon le mode de construction des piles et le nombre de leurs couples, son mode d'action peut varier par suite de ces transformations, ou

---

(1) *Journal of nat. philos.*, vol. VII, p. 206 et 207.

si l'on veut, par le passage du mouvement d'un élément corpusculaire dans un autre élément.

Quoi qu'il en soit, les phénomènes essentiels, ceux qui caractérisent le mieux l'action de cette électricité et surtout son origine, ne peuvent permettre de douter qu'elle est due au mouvement des mérons.

Si l'on recherche quel est ce mouvement, on est conduit à reconnaître qu'il doit être essentiellement rotatoire.

On arrive ainsi à une théorie qui se rapproche jusqu'à un certain point de celle dont Ampère se servait pour expliquer le magnétisme terrestre. Seulement, au lieu d'admettre que les éléments moléculaires tournaient sur eux-mêmes, il admettait qu'un courant électrique tournait autour des molécules : ce que j'avoue n'avoir jamais pu comprendre; aussi ai-je combattu cette opinion dans mon *Traité de chimie* (1).

Ayant conçu la théorie dont il est ici question et l'ayant exposée dans mon *Traité de chimie* dès 1844, je tiens à rappeler ce qui s'y trouve publié dès cette année (2) :

« Le mouvement électrique des molécules *dans le courant* paraît être un mouvement de rotation sur leur axe. »

« L'équateur de chaque molécule est parallèle au plan du courant. »

« A l'extrémité des axes, ou de chaque côté du réophore ou du courant, on observe la polarité magnétique par suite du mouvement de rotation des molécules; mouvement qui a lieu dans les aimants. »

« Lorsque les molécules tournent dans le même sens, elles s'attirent. Si elles tournent en sens inverse, elles se repoussent. Si les corps sont mobiles, ils sont entraînés par l'action moléculaire. »

« Le coté droit du courant électrique présente une polarité australe et attire le pôle boréal d'un aimant, même placé en

(1) *Traité de chimie*, t. I, p. 241. V. 251
(2) *Idem*, t. I, p. 253.

dehors du circuit. Le côté opposé attire le pôle austral dans les mêmes circonstances. »

« Deux réophores mobiles s'attirent si les molécules qui les constituent tournent dans le même sens. Ils se repoussent dans le cas contraire. »

Qu'au mot *molécule* on substitue celui de *méron* et l'on verra que la base de la théorie que je développe aujourd'hui avait été exposée par moi-même dès l'année 1844.

Il ne suffit cependant point d'avoir conçu cette théorie, il faut de plus en faire l'application aux différents ordres de phénomènes dont elle est l'origine, tels que la production des courants, leur direction, l'influence qu'ils exercent les uns sur les autres, sur les aimants, et leur action chimique.

Ces différentes circonstances dans lesquelles interviennent les courants électriques seront examinées dans la deuxième partie de ce travail.

Électricité d'induction.

On donne généralement ce nom à l'électricité qui est produite par l'action des aimants ou des courants; mais je pense que la décharge des condensateurs électriques n'en diffère pas sensiblement.

Cette électricité est généralement caractérisée par des étincelles projetant une vive lumière, par une élévation considérable de la température, et par les commotions qu'elle fait éprouver à l'homme et aux animaux.

La foudre ordinaire doit être rattachée à cet ordre de phénomènes.

Si l'on recherche, l'origine de l'électricité d'induction, on est conduit à reconnaître qu'elle doit être due au mélange des trois électricités précédentes, et par conséquent qu'elle est produite par les trois mouvements fondamentaux des éléments corpusculaires qui entrent dans la constitution des êtres soumis à notre observation : mouvement oscillatoire des molécules, mouvement de

contraction et de dilatation de leurs éléments, mouvement rotatoire des mérons.

L'électricité mécanique qui ne réagit point sur l'aiguille aimantée peut cependant servir pour produire des aimants, ainsi que je l'ai expérimenté depuis un grand nombre d'années, lorsqu'elle a été condensée et que l'on en opère la recomposition ou la décharge.

Un petit tube de verre sur lequel on enroule en hélice un fil métallique, et dans laquelle on a placé un fil d'acier, soit une aiguille à tricoter, aimante fortement ce fil par la décharge d'une bouteille de Leyde ou d'un condensateur quelconque.

Les pôles des aimants sont situés comme l'indique la direction du courant; c'est-à-dire que le pôle austral est à la gauche de l'hélice.

Si l'on enroule le fil métallique dans un sens, puis dans un sens contraire, on peut avoir un aimant ayant trois pôles, dont deux de même nature, situés un à chacune de leurs extrémités et le troisième plus énergique que l'un d'eux, situé au milieu du barreau. On peut, enfin, en faisant varier le fil hélicoïdal, obtenir autant de *points conséquents* qu'on le désire.

L'électricité statique, quand elle traverse violemment un fil métallique, peut donc se transformer et produire le même effet que le fil conducteur émanant d'une pile.

On a vu que l'électricité d'origine purement chimique pouvait être transformée en électricité statique rien qu'en augmentant le nombre des couples et celui des soudures.

Il peut y avoir alors des attractions et des répulsions, et l'appareil peut donner de très fortes commotions, propriétés qui appartiennent essentiellement à l'électricité statique.

On sait qu'à l'aide de l'appareil de Pixii ou de celui de Clarke, qui reposent tous deux sur le même principe, mais par lesquels l'électricité est le résultat de l'action d'un aimant, on peut, à l'aide de l'électricité d'induction qui se produit, obtenir des étincelles, des commotions, faire rougir de minces fils de platine et obtenir des réactions chimiques.

L'électricité d'induction, quelle que soit son origine, paraît due à la réunion des trois espèces d'électricités : la mécanique, la thermique et la chimique, et, par conséquent, aux mouvements combinés de tous les éléments corpusculaires entrant dans la constitution des corps : mérons, molécules et particules.

On comprendra facilement qu'un courant électrique d'une nature quelconque, lorsqu'il est puissant et qu'il traverse, soit l'air qui s'oppose à son passage, soit un fil métallique d'un diamètre suffisamment petit, quel que soit l'ordre du mouvement auquel il doit son origine, ébranle tout le système constitutif des corps et donne alors des phénomènes complexes.

Dans un autre ordre de phénomènes, il en est de même lorsque l'on chauffe fortement un corps : il finit par devenir lumineux parce que le mouvement moléculaire se transforme en mouvement méronnaire.

MAGNÉTISME.

Le magnétisme peut être rangé à la suite des électricités. On connaît l'action des aimants sur les courants électriques et l'action des courants sur les aimants, ainsi que les aimants artificiels qui peuvent être produits par l'action des courants électrochimiques sur le fer. On sait que les aimants en mouvement peuvent aussi déterminer des courants électriques, et tout homme de science connaît les relations qui existent entre le solénoïde et les aimants proprement dits.

Ce sont là autant de faits qui relient le magnétisme à l'électricité.

Le magnétisme étant excité et produit par le mouvement électrique, il reste à se demander quel est le mouvement qui le représente et quelles sont les parties qui en sont affectées.

L'activité des aimants s'exerçant dans un sens déterminé, il est éminemment probable qu'elle est due à un mouvement rotatoire.

L'aimant naturel cristallisant en octaèdres réguliers et pouvant

même conserver cette forme lorsqu'il est aimanté, il est encore éminemment probable que le mouvement affecte les mérons; car sans cela cette forme serait impossible, si la molécule entière tournait sur un axe, ainsi que cela a déjà été dit.

Toutefois le mouvement qui détermine le magnétisme, au lieu d'être purement rotatoire, pourrait être vibratoire ou oscillatoire autour d'axes spéciaux. L'avenir jugera cette question.

La direction de l'axe des aimants indique également que le mouvement rotatoire s'exécute dans un plan perpendiculaire à cet axe.

Si sur une lame de verre, ou sur un morceau de papier translucide, on trace une flèche courbe, indiquant la direction du mouvement rotatoire, on voit, en retournant cette lame ou ce morceau de papier, que l'indication de la direction du mouvement paraît avoir changé : si elle était lévogyre, elle est devenue dextrogyre, et *vice versâ*.

Si aux deux extrémités d'un cylindre, ou d'un simple bouchon, on inscrit une flèche circulaire de même sens, non pas en la regardant en face, mais en admettant que le bouchon tourne sur son axe, on obtient le même résultat. Si l'on dispose deux cylindres de la même manière, on voit qu'en les mettant l'un à la suite de l'autre, et en établissant la continuité de leurs axes, que la direction du mouvement est la même partout; mais si on les sépare et si l'on regarde en face les extrémités disjointes, on voit que le mouvement sera lévogyre sur l'un d'eux et dextrogyre sur l'autre, d'où l'idée de pôles contraires qui s'attirent et de pôles semblables qui se repoussent. Phrase qui pourrait être traduite sous une autre forme en disant qu'il y a attraction lorsque le mouvement corpusculaire s'exerce dans le même sens, et qu'il y a répulsion lorsqu'il est en sens opposé. Ce qui pourra d'abord paraître contraire à l'observation; mais ce qui cependant est rigoureusement en conformité avec les faits.

On sait qu'un courant électrique peut déterminer la rotation d'un aimant autour de son axe. Si le courant qui est disposé en hélice, *regarde* l'aimant (pour me servir de l'expression d'Ampère), qui est situé de telle manière que leurs deux axes se confondent,

si le pôle austral est à la gauche du courant, et si l'on admet que ce dernier va du pôle positif au pôle négatif de la pile, le mouvement de rotation paraîtra lévogyre à la gauche du courant et dextrogyre à sa droite (1).

L'existence des pôles des aimants, où la force magnétique paraît concentrée, semblerait démontrer que si le magnétisme est dû au mouvement, celui-ci n'est pas répandu également dans toute la masse de cet agent naturel; mais il n'en est rien : indépendamment des démonstrations rationnelles qui pourraient être exposées, il est des faits qui donnent la preuve évidente que l'activité magnétique existe dans toute l'étendue d'un barreau. Si l'on aimante une aiguille cylindrique en acier, on trouve après l'aimantation qu'elle a des pôles actifs situés vers ses extrémités et qu'elle est neutre vers le milieu de sa longueur. C'est-à-dire que dans ce point elle n'exerce aucune action attractive sur le fer, ni attractive ou répulsive sur les aimants. Si on la casse par le milieu, on trouve alors que chaque moitié est un aimant à deux pôles actifs, et que le milieu du barreau qui a été brisé, de neutre qu'il était, est devenu attractif et répulsif. Les barreaux sont donc aimantés dans toute leur longueur; mais le mouvement magnétique étant maintenu dans un barreau de longueur finie, les pôles produisant des actions contraires neutralisent le milieu du barreau par leur influence réciproque.

Si l'on admet que les phénomènes magnétiques et électro-chimiques sont dus au mouvement rotatoire des mérons, on parvient à se rendre compte de tous les phénomènes qui se rattachent au magnétisme, à l'électro-chimie et aux phénomènes électro-magnétiques.

---

(1) Cette indication peut être démontrée à l'aide d'un aimant cylindrique enveloppé par une hélice. Le mouvement rotatoire de l'aimant paraît lévogyre à une extrémité et dextrogyre à l'autre extrémité, si l'on tient compte de la direction du courant électrique.

Dans les aimants, le mouvement rotatoire des mérons s'exécuterait dans un plan perpendiculaire à leur axe; ce mouvement serait parallèle aux courants, et enfin il conviendrait d'admettre que le globe terrestre même possède aussi des mérons qui exécutent des mouvements rotatoires dans des plans parallèles à l'équateur magnétique.

On trouve même, d'après ce qui a été dit précédemment, que le mouvement est lévogyre pour ceux qui l'examinent du Nord au Sud ou ayant l'Occident à leur droite et l'Orient à leur gauche.

V

RÉSUMÉ

Les notions exposées dans le présent travail peuvent être résumées d'une manière nette et précise.

Elles comprennent essentiellement :

1° La constitution la plus intime des corps,

2° Les mouvements de leurs parties constituantes,

3° Les phénomènes qui se rattachent aux différentes espèces de corpuscules élémentaires et à leur mouvement.

I. Les corps sont formés par la réunion de corpuscules élémentaires de divers ordres : des *particules*, des *molécules* et des *mérons*.

Les particules des fluides élastiques existent sous la forme du dodécaèdre rhomboïdal; celles des liquides sont dans le même cas.

Parmi les solides, il en est qui sont immédiatement formées de particules sphéroïdales qui sont souvent directement observables au microscope. Les particules des corps cristallisés affectent la forme des polyèdres qu'ils donnent par le clivage.

Les molécules sont des assemblages de parties plus élémentaires offrant des arrangements déterminés qui dépendent de leur nombre et de leur nature spéciale.

On distingue dans les molécules des axes qui se relient au mode d'arrangement de leurs éléments et qui s'entrecroisent à leur centre.

Les mérons sont les éléments constitutifs des molécules. Ils sont représentés par des éléments chimiques, ou par des composés auxquels j'ai donné les noms d'*élémentoïdes* et de *somathyles* ou par des assemblages définis remplissant d'autres fonctions que celles des éléments chimiques.

II. Les corpuscules qui viennent d'être signalés accomplissent des mouvements spéciaux, qui sont la cause première des phénomènes généraux de la physique et de la chimie.

Les masses peuvent aussi éprouver des mouvements qui se relient à ceux de leurs parties constituantes et qui, dans bien des cas, en sont la cause déterminante. Tels sont ceux des corps sonores : cordes, verges et lames élastiques, auxquels il faut joindre les mouvements qui s'accomplissent dans les milieux qui les transmettent, ainsi que cela a lieu dans l'air et dans la plupart des corps.

Les molécules des fluides élastiques, qui se confondent avec leurs particules, au point de vue de leur centre d'activité et de leur situation respective (1) peuvent éprouver des déplacements d'aller et de retour qui déterminent des vibrations, par le rapprochement ou l'écartement de leurs centres d'activité, mouvement qui, dans les masses, exige un temps déterminé pour passer d'une molécule à une autre et se trouve ainsi la cause première de la transmission du mouvement et de sa vitesse.

Indépendamment de ce mouvement des molécules, il y a encore un déplacement oscillatoire dû au balancement angulaire de leurs axes autour du centre qui est le lieu de leur entrecroisement..

Les molécules éprouvent d'une manière plus intime des mouvements de dilatation et de contraction dus à l'écartement ou au rapprochement de leurs parties constituantes ou des mérons.

---

(1) Voir le cinquième mémoire sur la *Constitution des corps*.

Les mérons tournent sur eux-mêmes avec une rapidité extrême. Leur axe de rotation se confond avec ceux des molécules, de telle manière que leur équateur est perpendiculaire à cet axe. Indépendamment de ce mouvement rotatoire, ils éprouvent un déplacement, autour de leur position d'équilibre, qui est comparable à celui dont il a été question pour les molécules entières, mais qui est exécuté avec une vitesse beaucoup plus grande que ce dernier. Toutefois ce mouvement est moins rapide que celui de rotation des mérons et plus prompt que celui de contraction et de dilatation.

Le mouvement de balancement de la molécule entière s'accomplit par le déplacement d'un axe idéal qui relie plusieurs molécules entre elles, tandis que celui des mérons s'exécute par le balancement de l'axe même de la molécule à laquelle ils appartiennent.

Afin de fixer les idées sur la spécialité du mouvement oscillatoire d'apparence rotatoire, et pour qu'il ne puisse être confondu avec les autres mouvements, je le désignerai dorénavant par les noms de GYROÏDE ou de TRÉPOÏDE *(paraissant tourner)*, qui le caractérisent d'une manière nette et précise.

Dans l'étude des mouvements des éléments qui entrent dans la constitution des corps, on voit que ces mouvements, quoique nettement distincts, sont reliés entre eux de telle manière qu'en excitant l'un d'eux, les autres peuvent intervenir et que, lorsque la cause déterminante est puissante, ils peuvent passer d'un système dans un autre et produire ainsi non seulement des transformations de mouvements, mais des phénomènes complexes qui peuvent paraître en partie étrangers aux causes qui les ont déterminés.

III. Aux mouvements vibratoires des particules et des molécules qui peuvent être déterminés par de simples actions mécaniques, telles que le frottement, le choc, se rattachent les phénomènes d'élasticité, d'acoustique et d'électricité statique.

Aux contractions et aux dilatations des molécules produites par le rapprochement ou l'éloignement de leurs parties constituantes, sont dus les phénomènes de la caloricité.

Les mouvements rotatoires et vibratoires des mérons produisent la lumière et les nombreux phénomènes qu'elle comprend, l'électricité dynamique et le magnétisme.

Il faut ajouter enfin que la structure des corps cristallisés est intimement reliée avec les phénomènes optiques qu'ils présentent, relation qui est connue de tous les savants qui s'occupent de ce sujet.

Le mouvement oscillatoire des axes moléculaires relie probablement entre eux les phénomènes caloriques et les phénomènes lumineux.

J'ai dit et je m'efforcerai de démontrer ultérieurement que la polarisation circulaire semble se rattacher plutôt à des assemblages moléculaires qu'aux molécules elles-mêmes.

En comparant l'ensemble des mouvements corpusculaires, on voit qu'il y a trois espèces de mouvements rotatoires ou en ayant l'apparence, qui se rattachent aux trois espèces fondamentales d'éléments corpusculaires et par conséquent à des phénomènes d'ordres essentiellement distincts : mouvement oscillatoire des particules ou des molécules, mouvement oscillatoire de leurs axes autour de leur centre de construction, mouvement réellement rotatoire des mérons; mouvements enfin dont la vitesse s'accroît avec une extrême rapidité en passant d'un ordre dans un autre.

Le mouvement rotatoire pouvant représenter une espèce de polarisation (ce terme n'aura jamais eu une signification plus précise, puisque les pôles sont situés aux extrémités des axes), il en résulte que cette dernière doit se rencontrer dans les trois ordres fondamentaux des phénomènes physiques.

On sait que la chaleur et la lumière peuvent être polarisées. Il n'est point démontré que les phénomènes acoustiques ne peuvent l'être.

Il n'est pas démontré non plus que l'électricité statique ne puisse être due à des mouvements de cet ordre.

IV. Finalement il résulte de ce qui précède que les phénomènes de la physique peuvent être reliés avec la structure la plus intime

des corps; mais que, pour obtenir un tel résultat, il était indispensable que cette dernière fût étudiée jusque dans ses dernières limites.

V. En terminant ce travail, il est indispensable de rappeler qu'il se rattache presque entièrement à la partie spéculative plutôt qu'à la partie positive des sciences physiques et que, si nous ne pouvons avoir la certitude que les faits s'accomplissent comme je me suis forcé de le démontrer, nous devons au moins avoir la pensée (et c'est la seule qui puisse guider l'homme dans un travail de cette espèce), qu'il n'a jamais été démontré que de telles recherches, lorsqu'elles embrassent la science dans tout son ensemble, ne puissent être l'expression de la vérité.

L'AVENIR JUGERA.

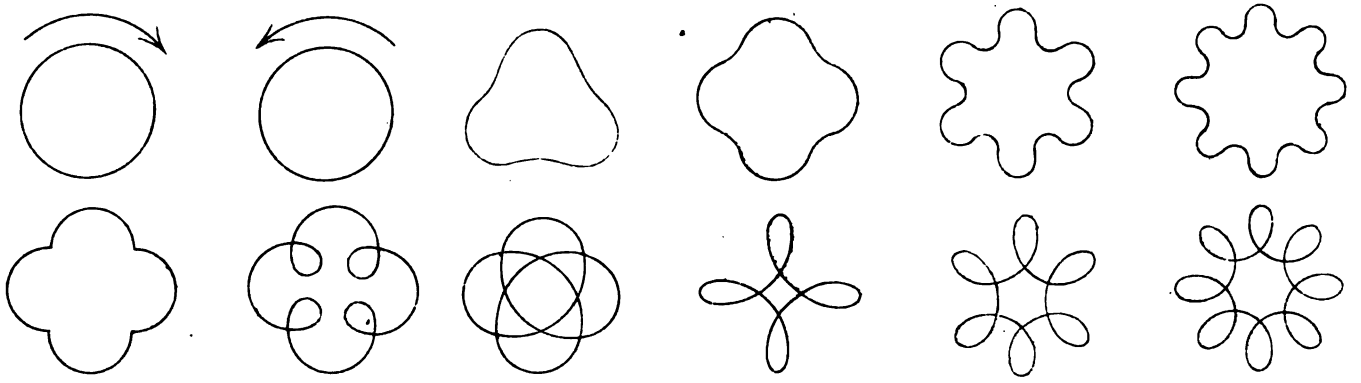
J'ai ajouté une planche renfermant un nombre assez considérable de figures, à la fin de ce travail, pour donner une idée plus précise et plus facile à saisir de la manière dont je comprends les mouvements corpusculaires et les relations qu'ils ont entre eux.

J'ose espérer qu'à l'aide de ces figures, ma pensée sera mieux saisie qu'avec le texte seul et qu'il sera possible alors, non seulement d'en faire une juste appréciation, mais de faire progresser les théories de la science dans la direction que j'ai indiquée.

Dans un très prochain travail, je ferai connaître plusieurs lois remarquables, éminemment utiles et indispensables pour les progrès des théories de la dynamique corpusculaire; lois dont plusieurs m'ont été révélées en exécutant ces figures.

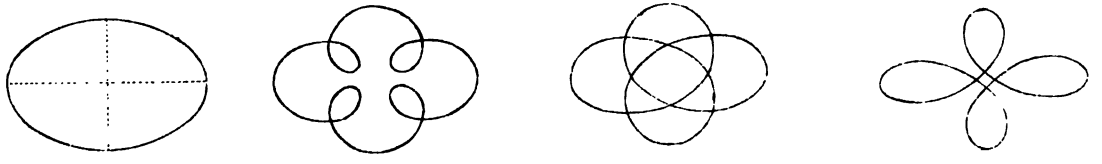
TRAJECTOIRES DÉCRITES PAR LES CENTRES DES PARTICULES ET DES MOLÉCULES.

AXES ÉGAUX.

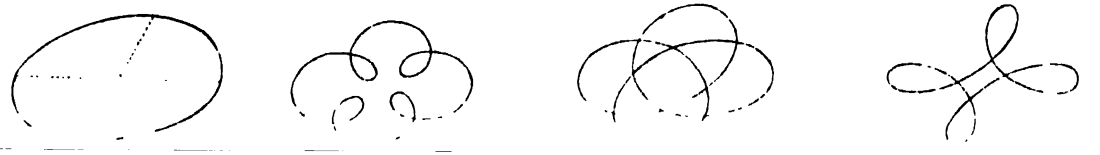


DEUX ESPÈCES D'AXES DANS LE MÊME PLAN.

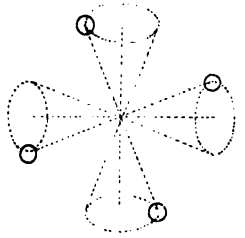
rectangulaires



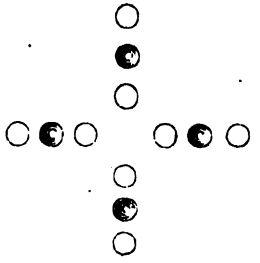
obliques



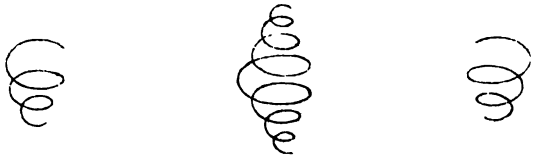
Mouvement gyratoïdique des axes des molécules



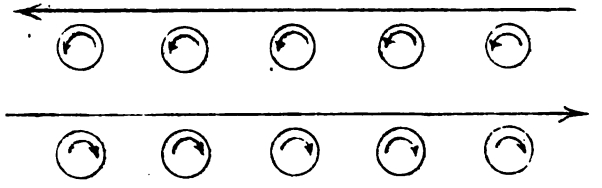
Dilatation et contraction des molécules



Mouvement gyratoïdique des axes des molécules combiné avec ceux mouvement de contraction et de dilatation.

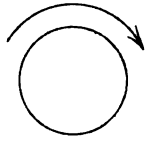


Courant électro-dynamique.

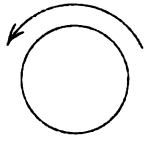


Mouvement rotatoire des mérons

dextrogyre



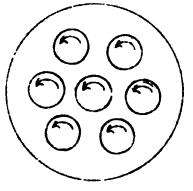
lévogyre



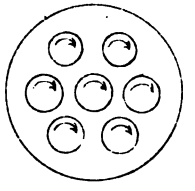
Mouvement oscillatoire et rotatoire des mérons combinés avec ceux des molécules.

Pôles d'un aimant vus en face

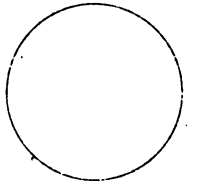
Austral



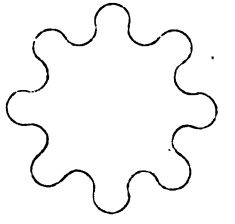
Boréal



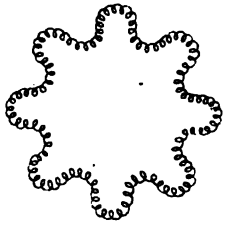
Mouvement moléculaire simple



Id. combiné avec le mouvement oscillatoire des mérons



Id. plus le mouvement rotatoire de ces derniers



OBSERVATIONS

SUR

LA COMPOSITION DES GUANOS

LES ALTÉRATIONS QU'ILS SUBISSENT

ET

L'ORIGINE PROBABLE DES PHOSPHATES FOSSILES DE LA RÉGION DU LOT

Lues devant la Société des Sciences physiques, le 11 janvier 1872

PAR A. BAUDRIMONT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

J'ai l'honneur de placer sous les yeux de la Société plusieurs échantillons de phosphate tricalcaire et un os fossile qui proviennent du département du Lot et des départements circonvoisins, où l'on en a trouvé des gisements considérables.

Il est inutile d'entrer dans des détails sur ce sujet, l'Académie des Sciences de Paris s'en étant occupée et plusieurs publications qui leur sont relatives ayant été faites.

Je rappellerai seulement que ces produits existent, soit dans des espèces de cavernes où ils sont en amas circonscrits, soit dans des failles dont la base se trouve à une faible profondeur dans le sol; failles qui, par cela même, diffèrent essentiellement des filons.

Plusieurs idées ont été émises sur l'origine de ces phosphates : les uns les regardent comme des dépôts abandonnés par les eaux qui les tenaient en dissolution; d'autres les considèrent comme des détritus d'animaux, et d'autres enfin comme des coprolithes. Je spécifierai davantage cette dernière opinion en disant que ces produits me paraissent être du *guano altéré*.

Les nombreux guanos de toutes provenances que j'ai vus et analysés m'ont démontré le mode des altérations successives que ce produit subit, et je profiterai de cette occasion pour signaler à l'attention de la Société quelques faits qui peuvent intéresser ceux qui s'occupent de l'origine des guanos.

Les guanos peu altérés ou complets sont essentiellement formés de trois parties distinctes, qui se subdivisent en plusieurs autres :

1° Des matières volatiles;

2° De la matière organique;

3° De la matière minérale.

Les matières volatiles sont essentiellement représentées par de l'eau, du carbonate d'ammoniaque et quelques matières odorantes.

La matière organique fixe est colorée en brun jaunâtre, qui est d'autant plus foncé que le guano est moins altéré. Dans les anciens guanos des îles Chinchas, cette matière entrait pour environ un tiers, et elle contenait en général une quantité d'azote, qui était de 12 pour 100 en la rapportant à la quantité totale du guano.

La partie minérale contient de l'acide phosphorique et de la chaux; mais cette dernière base s'y trouve en quantité insuffisante pour former du phosphate tricalcaire avec l'acide phosphorique. Peut-être même y a-t-il du phosphate bicalcaire dans le guano. Toutefois, il est éminemment probable qu'il serait tribasique par la présence d'un équivalent d'eau, et qu'il ne deviendrait bibasique que par la calcination. Il paraîtrait que cet état de combinaison se retrouverait jusque dans le phosphate minéral récemment découvert, et ce serait là une preuve de plus à citer en faveur de l'origine que je viens signaler à votre attention.

Pour doser l'acide phosphorique des guanos à l'état de phosphate calcaire tribasique, on est obligé d'ajouter au mélange une certaine quantité de sel calcaire.

J'ai fait plusieurs analyses de guanos du Pérou en précipi-

tant une première partie de phosphate tricalcaire par l'ammoniaque, et en précipitant le reste par l'addition d'une dissolution de sel calcaire et d'une nouvelle quantité d'ammoniaque. Le rapport des quantités moyennes de phosphate tricalcaire obtenu par ce procédé a été de 6,6 à 1; le premier nombre correspondant au phosphate obtenu directement. L'absence de carbonate calcaire et la présence de l'acide phosphorique combiné à d'autres bases que la chaux semblent démontrer que les phosphates subissent des altérations profondes dans les guanos. La présence du bicarbonate d'ammoniaque dans les produits n'est peut-être pas étrangère à cette réaction.

Le produit de la calcination du guano du Pérou n'augmente pas de poids par l'addition de carbonate d'ammoniaque et la dessiccation. Il ne fait point effervescence par l'addition de l'acide azotique. En le traitant par l'eau distillée bouillante, on dissout quelques sels, parmi lesquels il y a principalement du *pyrophoste* sodique, composé qui est probablement le résultat de la calcination.

Lorsqu'un guano est abandonné à lui-même dans une région où il y a des pluies, il subit plusieurs modes d'altération :

1° Le carbonate d'ammoniaque disparaît, l'azote diminue, et l'odeur devient moins forte;

2° L'azote disparaît aussi presque complètement; à peine en reste-t-il un centième.

On a alors des guanos formés essentiellement de phosphate tricalcaire, dont la quantité a relativement augmenté et dont la matière organique a par suite relativement diminué.

La couleur, de brun foncé qu'elle était, devient brun clair et même grisâtre.

On trouvera à la suite de cette note des analyses qui démontrent ces faits, à cela près de ce qui est relatif à la couleur.

On a trouvé des nodules blancs dans le guano du Pérou, qui étaient riches en produits azotés et répandaient une odeur ammoniacale.

Dans le guano de la Bolivie, on a aussi trouvé des concrétions, mais elles étaient fortement colorées en rouge brun et complètement inodores. Soumises à des lavages à l'eau, ces concrétions se décolorent complètement, donnent des produits qui ont la plus grande ressemblance avec certaines apatites du Lot, et qui sont riches en phosphate calcaire.

On voit que, par des altérations successives, les guanos passent par diverses modifications qui les rapprochent considérablement des phosphates fossiles trouvés dans la région du Lot. Ces derniers pourraient donc avoir des guanos pour origine. Ceux qui existent dans les cavernes peuvent n'être point identiques avec ceux que l'on rencontre dans des failles : les premiers peuvent être en place, et les seconds y ont été, sans aucun doute, transportés par les eaux.

On pourra objecter à l'opinion émise dans ce travail que les guanos ne contiennent ni le phosphate ferreux, ni les carbonates calcaire et magnésique que l'on rencontre dans les phosphates du Lot. La présence de ces produits dans les apatites peut être le résultat de réactions postérieures à la production des guanos.

Ces nodules sont généralement poreux; ils ont pu être pénétrés par des eaux calcaires, magnésiques et ferrifères, qui en ont altéré la composition. C'est ainsi que l'on peut se rendre compte des modifications observées.

Maintenant, permettez-moi d'ajouter quelques mots sur l'origine des guanos.

On a émis l'opinion que ce produit, au moins celui des îles Chinchas, était formé par des excréments d'oiseaux.

Cette opinion est rendue probable par l'immense quantité des animaux de cet ordre que l'on a trouvés réunis sur ces îles.

Voici des renseignements que j'ai pu recueillir sur l'origine du guano de Mexillonès, où il y en a une partie qui est en voie de formation.

Des personnes qui se sont rendues sur les lieux y ont vu

des mammifères amphibies, en grand nombre, qui consommaient une quantité considérable de poissons et qui rendaient leurs excréments sur le sol.

On a d'ailleurs trouvé, dans cette localité, plusieurs espèces de guanos : un premier est d'abord apparu dans le commerc sous le nom de *guano de Bolivie;* il contenait jusqu'à 5 centièmes d'azote et près de 19 centièmes d'acide phosphorique; un deuxième, qui a porté le nom de *guano de Mexillonès,* guano dans lequel l'azote a presque complètement disparu, mais qui contenait jusqu'à près de 32 pour 100 d'acide phosphorique. Enfin, on a recueilli sur place le guano produit par les animaux amphibies. Il était fortement coloré, possédait une odeur d'excréments très prononcée, et contenait une quantité considérable d'azote.

En résumé, l'origine première du guano est dans les animaux marins, et l'on peut dire dans les poissons, à cause du phosphate calcaire qui s'y trouve et qui vient de leur système osseux.

Avant de terminer, j'ajouterai un mot sur l'ancienneté du guano. On a calculé qu'il fallait un bien grand nombre de siècles pour que des animaux pussent donner naissance à des dépôts excrémentitiels ayant la puissance de ceux qui existaient sur les îles Chinchas, et cela remonterait évidemment au delà des époques bibliques, et, quoique l'Amérique soit probablement postérieure à l'Europe et à l'Asie, elle a dû être peuplée à une époque excessivement reculée. MM. Pourman m'ont fait voir une canne taillée par la main de l'homme, ayant environ 1 mètre de longueur, et terminée à l'une de ses extrémités par une boule qui pouvait avoir 8 centimètres de diamètre; le tout d'un seul morceau. Cette canne a été trouvée à une grande profondeur dans la masse du guano en exploitation dans les îles Chinchas, et elle indique que la présence de

l'homme dans la partie occidentale de l'Amérique du Sud est aussi fort ancienne.

Depuis que ce travail a été présenté à notre Société, M. Delfortrie, de Bordeaux, a publié, dans le *Bulletin de l'Association scientifique,* un travail dans lequel il attribue l'origine des apatites trouvées dans la région du Lot à du guano de chauves-souris.

Il y a lieu de se demander si une telle origine est possible, surtout pour les apatites qui ont été rencontrées dans des failles.

Cette origine me paraît plus que douteuse. Les chauves-souris ont pu, en habitant quelques cavernes (1), où il y avait déjà des dépôts de phosphate tout formés, y laisser des débris qui en rendent la présence évidente; mais il ne paraît point possible que de tels êtres, *qui sont insectivores,* aient pu produire des masses aussi considérables de phosphate tricalcaire, et surtout celui que l'on trouve dans les failles, failles à ciel ouvert, et qui n'ont pu servir d'asile à ces animaux qui vivent à l'abri de la lumière.

Le guano produit par les chauves-souris est éminemment poreux. Un hectolitre de ce guano ne pèse que 21 kilogrammes, tandis qu'un hectolitre de guano ordinaire en pèse environ 70, comme on le verra par une analyse, sous le nom de *guano de Sardaigne.* Ces guanos, assez riches en azote, sont très pauvres en acide phosphorique. Cet acide y est même uni au fer et non à la chaux; mais ce résultat peut être dû à une transformation postérieure à la production directe du guano.

Indépendamment des analyses de guanos, on trouvera, dans le tableau ci-joint, celles d'apatites de plusieurs origines que j'ai entreprises à diverses époques. Les unes sont fossilifères, et les autres proviennent des filons de l'Estramadure.

---

(1) Des cavernes où séjournent les chauves-souris existent, à ma connaissance, dans les Pyrénées occidentales, en Sardaigne et en Estramadure, dans la localité où se trouvent les apatites en filons.

Parmi les premières, il y a une apatite de l'île Sombrero (Antilles), qui paraît avoir une origine du même ordre que celles de la région du Lot. L'apatite du Gers, que j'ai reçue en poudre, appartenait peut-être aux coprolithes. Cela paraît possible par la grande quantité de matière insoluble dans les acides qui s'y trouve. Les trois autres analyses ont été entreprises exprès pour reconnaître la présence du fer.

Celle dite des failles était très impure, et n'a pu être analysée qu'après avoir été lavée avec de l'eau acidulée par l'acide chlorhydrique.

Les deux dernières ont été faites sur des morceaux choisis et aussi purs que possible.

Aucune de ces apatites ne contenait de fluor.

C'est le contraire qui a été observé pour les apatites en filons de l'Estramadure : toutes contenaient du fluor.

D'après des renseignements que j'ai recueillis récemment, la richesse en phosphate calcaire des apatites de l'Estramadure diminue à mesure que l'on pénètre en profondeur dans les filons.

(Voir le Tableau d'autre part.)

COMPOSITION DE PLUSIEU

	PÉROU			CO PACI
	1860	1859	1860	18
Humidité	0.140	0.206	0.219	0.
Azote	0.185	0.150	0.123	0.
Complément organique	0.310	0.354	0.357	0.
Acide phosphorique	0.131	0.123	0.127	0.
Sels solubles	0.037	0.026	0.036	0.
Résidu insoluble dans les acides	0.030	0.010	0.008	0.
Complément minéral	0.167	0.131	0.130	0.
	1.000	1.000	1.000	1.

Le complément minéral est principalement représenté par la chaux unie à l'acide p

La minime quantité des produits insolubles dans l'acide azotique dilué, quel qu introduite.

Il m'a été affirmé que le guano de la Sardaigne avait été produit par des chauves-s

APATITES FOSSILIFÈRES

	ILE	GERS	RÉGION DU LOT		
	SOMBRERO	1863	Des failles.	Mamelonnée	Squam
Produit étranger enlevé par le lavage..	»	»	0.093	»	»
Phosphate tricalcaire	0.815	0.255	0.599	0.796	0.8
Phosphate triferreux	»	0.199	0.080	0.024	0.0
Carbonate calcaire	0.185	0.147	0.215	0.011	0.0
Carbonate magnésique	»	»	»	0.096	0.0
Résidu inattaquable pr les acides ordres.	»	0.334	0.013	0.073	0.0
Matière combustible	»	0.053	»	»	»
Humidité	»	0.012	»	»	»
Complément indéterminé	»	»	»	»	0.1
	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0

UANOS D'ORIGINES DIFFÉRENTES

BOLIVIE		PATAGONIE		ILE DE CORAIL	ILES BAKER & JERVIS		MÉXILLONÈS	SARDAIGNE
68	1860	1855	1857	1865	1863	1860	1868	1862
180	0.160	0.053	0.150	0.120	0.203	0.120	0.104	0.131
053	0.035	0.021	0.008	0.010	0.013	0.005	0.007	0.093
342	0.135	0.303	0.102	0.130	0.051	0.125	0.061	0.618
109	0.189	0.094	0.068	0.278	0.286	0.315	0.319	0.026
070	0.147	indéterminé	0.096	0.000	0.000	0.006	0.036	0.016
008	0.068	0.372	0.348	0.000	0.004	0.007	0.003	0.087
238	0.266	0.157	0.228	0.462	0.443	0.422	0.470	0.029
000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ne.
egré d'altération des guanos, donne l'indice qu'aucune matière étrangère n'y a été

phosphate était à base de fer.

APATITES EN FILONS
DE L'ESTRAMADURE

	COMPACTE	SUB-SACCAROIDE	SUB-FIBREUSE	COMPACTE
hosphate tricalcaire.....	0.915	0.670	0.880	0.775
arbonate calcaire.....	»	0.100	»	»
arbonate magnésique.....	»	»	0.054	»
luorure calcique.....	0.083	0.110	»	0.075
omplément comprenant le fluor.....	»	»	0.057	»
ésidu insoluble dans l'acide azotique.....	0.002	0.120	0.009	0.150
	1.000	1.000	1.000	1.000

NOTE SUR LA DÉTERMINATION

DE LA SECTION PRINCIPALE

D'UN CRISTAL BI-RÉFRINGENT

TAILLÉ SOUS LA FORME D'UN PRISME

PAR M. ABRIA

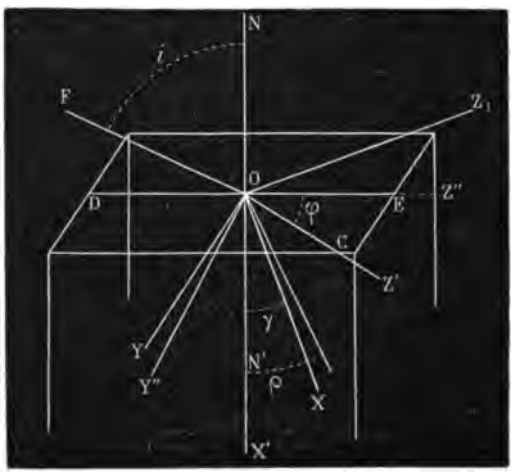
Pour déterminer la section principale d'une lame mince biréfringente, il suffit de la poser sur la plate-forme de l'appareil de Norremberg, le Nicol analyseur étant à l'extinction, et, après avoir noté les deux directions suivant lesquelles la lumière reste éteinte, de tourner la lame de 45° par rapport à l'une d'elles et de rechercher la ligne autour de laquelle on doit l'incliner pour que la teinte remonte dans l'échelle chromatique. Mais ce moyen est insuffisant lorsque la lame est épaisse ou affecte la forme prismatique. Parmi les procédés auxquels on peut alors recourir pour déterminer la section principale, un des plus simples consiste à faire tomber sur le cristal, normalement à sa surface, un rayon polarisé, et à faire tourner son plan de polarisation jusqu'à ce que l'image extraordinaire s'annule. Lorsque ce résultat est obtenu, la section principale cherchée est parallèle au plan de polarisation de la lumière incidente.

Les vibrations de celle-ci sont en effet normales à son plan de polarisation, et, lorsqu'elles ne font naître dans le cristal que le rayon ordinaire, elles doivent être également perpendiculaires à la section principale, laquelle doit, dès lors, coïncider avec le

plan de polarisation du faisceau incident. Mais, pour qu'il ne reste aucun doute sur la vérité de la proposition énoncée, il n'est pas inutile de faire voir qu'elle se déduit de la règle à laquelle conduit la théorie de la double réfraction pour déterminer la direction des vibrations dans chacun des rayons ordinaire et extraordinaire, engendrés dans les cristaux uni-axes par un rayon incident.

D'après cette théorie, pour avoir la direction des vibrations ordinaires et extraordinaires, il faut, en prenant pour centre le point d'incidence, décrire l'ellipsoïde inverse des vitesses, ou ellipsoïde de Plücker, faire dans cet ellipsoïde, par le même point, deux sections parallèles : l'une au front de l'onde ordinaire, l'autre à celui de l'onde extraordinaire, et les deux axes d'espèces différentes des ellipses ainsi obtenues sont les directions cherchées.

Fig. 1.



Soient (fig. 1) :

O le point d'incidence,
OX la direction de l'axe,
OC la projection de l'axe sur la face d'incidence,
NON' la normale,
OF le rayon incident,
FDOE le plan d'incidence,
OY menée dans la face d'incidence perpendiculaire à **OC**, et par suite perpendiculaire aussi à la section principale **N'OCX**.

L'équation de l'ellipsoïde inverse des vitesses rapportée à OX, OY et à un troisième axe OZ, non figuré, est

$$e^2x^2 + o^2(y^2 + z^2) = 1, \tag{1}$$

o, e étant les vitesses ordinaire et extraordinaire.

Rapportons d'abord cette surface aux trois axes OX', OY, OZ'. On trouve facilement, en posant $NOX = \gamma$,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\gamma + z' \sin\gamma, \\ y &= y', \\ z &= z' \cos\gamma - x' \sin\gamma. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans (1), il vient, après réductions,

$$\left\{ \begin{aligned} &x'^2(e^2\cos^2\gamma + o^2\sin^2\gamma) + o^2y'^2 + (e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma)z'^2 \\ &\qquad + 2x'z'(e^2 - o^2)\sin\gamma\cos\gamma = 1. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Si le rayon incident est normal, les sections cherchées s'obtiendront en posant $x' = 0$ dans (2), et l'on a

$$o^2y'^2 + (e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma)\,z'^2 = 1.$$

Les deux axes de l'ellipse sont

$$\frac{1}{o} \text{ onde ordinaire,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma}} \text{ onde extraordinaire.}$$

Si le rayon incident normal est polarisé dans la section principale, les vibrations sont dirigées suivant OY, et leur composante suivant OZ' est nulle. Le rayon extraordinaire disparaît donc, et toute la lumière qui entre dans le cristal passe dans l'image ordinaire. L'inverse arrive si le rayon incident normal est polarisé perpendiculairement à la section principale.

Ainsi, dans ce cas, en faisant tourner le Nicol polarisant de 90°, on fait disparaître alternativement l'image O et l'image E, suivant que le plan de polarisation de la lumière incidente, c'est-à-

dire la grande diagonale du Nicol, est perpendiculaire ou parallèle à la section principale du cristal bi-réfringent.

Le calcul, pour ce cas, est de fait presque inutile, et on peut se rendre compte de ce qui précède par de simples considérations géométriques.

Le plan tangent à l'ellipsoïde d'Huyghens, qui détermine la direction du rayon extraordinaire est, pour le rayon normal, parallèle à la face d'incidence, et la projection de ce rayon réfracté sur le plan tangent, laquelle donne la direction des vibrations correspondantes, est, par raison de symétrie, comprise dans la section principale. Ainsi, dans ce cas, la direction des vibrations extraordinaires coïncide avec la section principale.

D'un autre côté, l'ellipsoïde inverse des vitesses a le même axe que celui d'Huyghens, et le rayon de son équateur est égal à $\frac{1}{o}$. L'intersection de cet équateur par la face d'incidence, laquelle est parallèle au front de l'onde ordinaire et donne la direction des vibrations ordinaires, est perpendiculaire à la section principale et par suite aux vibrations extraordinaires.

Examinons maintenant le cas général, et, dans le but de simplifier les calculs ultérieurs, faisons un nouveau changement de coordonnées, et rapportons la surface aux axes OX', OY'', OZ'' (fig. 1).

Si l'on appelle φ l'angle de la section principale avec le plan d'incidence, on trouve sans difficulté

$$\begin{aligned} x' &= x'', \\ y' &= y'' \cos\varphi - z'' \sin\varphi, \\ z' &= y'' \sin\varphi + z'' \cos\varphi ; \end{aligned}$$

l'équation (2) devient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & x''^2 (e^2 \cos^2\gamma + o^2 \sin^2\gamma) + o^2 (y'' \cos\varphi - z'' \sin\varphi)^2 \\ & + (y'' \sin\varphi + z'' \cos\varphi)^2 (e^2 \sin^2\gamma + o^2 \cos^2\gamma) \\ & + 2x'' (y'' \sin\varphi + z'' \cos\varphi)(e^2 - o^2) \sin\gamma \cos\gamma = 1 , \end{aligned} \right.$$

ou

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x'^2(e^2\cos^2\gamma + o^2\sin^2\gamma) \\ + y'^2[o^2\cos^2\varphi + (e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma)\sin^2\varphi] \\ + z'^2[o^2\sin^2\varphi + (e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma)\cos^2\varphi] \\ + 2y'z'[(e^2-o^2)\sin^2\gamma\sin\varphi\cos\varphi \\ \qquad + 2x'(y'\sin\varphi + z'\cos\varphi)(e^2-o^2)\sin\gamma\cos\gamma] \end{array}\right\} = 1 .$$

Le rayon réfracté ordinaire fait avec la normale un angle ρ, déterminé par

$$\sin\rho = o\sin i ;$$

le plan sécant lui est normal et a pour équation

$$(5)\qquad x' = -z'\operatorname{tang}\rho .$$

Les deux équations (4) et (5) donneront l'équation de la courbe d'intersection

OZ_1 étant la trace du plan sécant $Y'OZ_1$, sur le plan d'incidence, pour avoir l'équation de la courbe rapportée aux deux axes OZ_1, OY', il suffit de poser

$$x' = z_1\sin\rho ;$$
$$y' = y_1 ,$$
$$z' = z_1\cos\rho ,$$

et (4) devient

$$\begin{aligned} z_1^2\{&(e^2\cos^2\gamma + o^2\sin^2\gamma)\sin^2\rho + [o^2\sin^2\varphi + (e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma)\cos^2\varphi]\cos^2\rho \\ &+ 2(e^2-o^2)\sin\gamma\cos\gamma\sin\rho\cos\rho\cos\varphi\} \\ (6)\quad &+ y_1^2[o^2\cos^2\varphi + (e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma)\sin^2\varphi] \\ &+ 2y_1z_1[\sin\gamma\cos\varphi\cos\rho + \cos\gamma\sin\rho](e^2-o^2)\sin\gamma\sin\varphi = 1 , \end{aligned}$$

ou

$$Mz_1^2 + Ny_1^2 + 2Py_1z_1 = 1 .$$

En appellant θ l'angle que forment avec OZ_1 et OY_1 les axes de la courbe, on a pour le déterminer

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2P}{M-N} .$$

Dans chaque cas particulier, on pourra calculer cette valeur de θ, et, au moyen de formules connues, ramener l'équation (5) à la forme ordinaire, d'où l'on déduira sans difficulté les longueurs des axes.

Dans le cas du rayon normal, $\rho = 0$ et les valeurs de M, N, P deviennent

$$M = o^2 \sin^2\varphi + Q\cos^2\varphi ,$$
$$N = o^2 \cos^2\varphi + Q\sin^2\varphi ,$$
$$P = (e^2 - o^2)\sin^2\gamma \sin\varphi\cos\varphi ,$$

en posant

$$Q = e^2 \sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma .$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$\operatorname{tang} 2\theta = \operatorname{tang} 2\varphi$$

et par suite

$$\theta = \varphi ,$$

si on pose dans (5)

$$y_1 = y\cos\varphi + z\sin\varphi ,$$
$$z_1 = z\cos\varphi + y\sin\varphi ,$$

y, z représentant les coordonnées courantes, on obtient, réductions faites

$$o^2 y^2 + (e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma)\, z^2 = 1 ,$$

dont les deux axes ont bien pour longueurs, comme nous l'avons trouvé plus haut

$$\frac{1}{o}$$

et

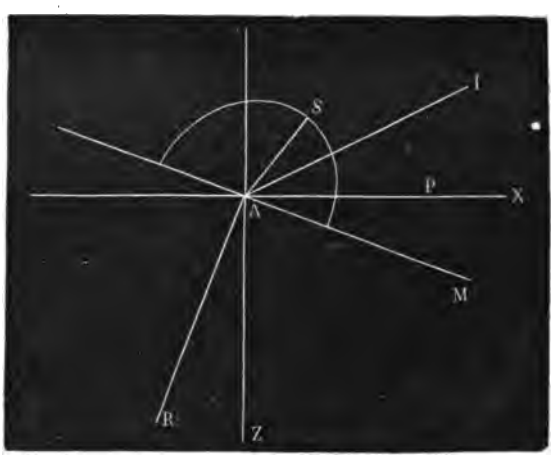
$$\frac{1}{\sqrt{e^2\sin^2\gamma + o^2\cos^2\gamma}} .$$

Lorsque l'incidence i est quelconque, l'équation (5), ramenée à ne renfermer que les carrés de x et de y, fera connaître les axes

de l'ellipse. Les calculs sont évidemment assez longs; mais il est aisé de voir que l'un de ces axes doit être égal à $\frac{1}{o}$: c'est celui qui résultera de l'intersection du plan $Y'OZ_1$ par le plan normal à OX mené par le point O ou la droite OY. Cet axe est celui dont il importe de connaître la direction, parce qu'il est parallèle aux vibrations ordinaires. On peut la calculer à l'aide d'une formule plus simple que celle qui donne $\tang 2\theta$, par les considérations suivantes.

Cette droite est l'intersection de deux plans perpendiculaires : l'un au rayon réfracté ordinaire, l'autre à l'axe du cristal, de telle sorte que si PAZ (fig. 2) représente le plan d'incidence, AP la trace de ce plan sur la face d'incidence, AZ la normale intérieure à cette face, AI, AR, les rayons incident et réfracté ordinaire, la droite AS, qui représente l'axe $\frac{1}{o}$ de l'ellipse d'intersection, fait, avec la droite AM perpendiculaire à AR, un angle ε, qu'il s'agit de calculer et qui fera connaître la position de la droite AS.

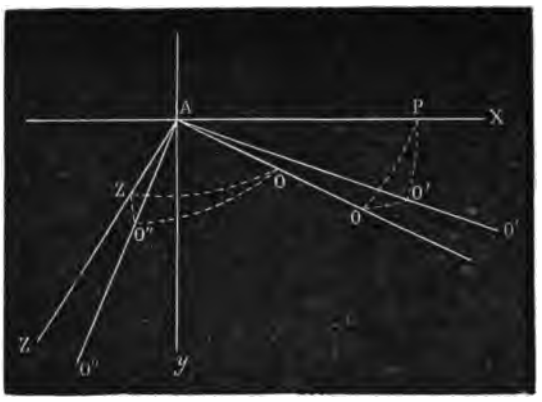
Fig. 2.



Pour le déterminer, prenons pour axes coordonnées (fig. 3)

AP ou AX, Ay, AZ : AX, Ay sont dans le plan de la face d'incidence, et AZ est, comme je l'ai dit plus haut, la normale intérieure à cette face.

FIG. 8.



L'axe AO du cristal fait avec AZ un angle γ, et sa projection AO' sur le plan des XY fait avec AX l'angle φ. Ces deux quantités suffisent pour déterminer la direction de l'axe, et ce sont celles que l'on peut mesurer le plus facilement dans les expériences.

Je recherche de suite l'expression de l'angle PAO, dont nous allons avoir besoin.

Le triangle sphérique POO' renferme

$$PO' = \varphi ,$$
$$OO' = 90 - \gamma ,$$
$$PO'O = 90^\circ ,$$

et donne

$$\cos OP = \cos\varphi \sin\gamma .$$

Je recherche de même l'expression de l'angle ZAO'', qui va nous être nécessaire.

Le triangle ZOO' renferme

$$ZO = \gamma',$$
$$OO' = 90^\circ - OP,$$
$$ZO'O = 90^\circ,$$

et donne

$$\cos ZO' = \cos\gamma \sec(90^\circ - OP) = \frac{\cos\gamma}{\sin OP} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi \sin^2\gamma}}.$$

Les équations des projections de l'axe AO sur les plans de XY et de ZY sont :

$$y = x \operatorname{tang}\varphi,$$
$$y = z \operatorname{tang} ZO' = z \operatorname{tang}\gamma \sin\varphi.$$

L'équation

$$y = Mx + Nz$$

du plan perpendiculaire à AO s'obtiendra sans difficulté, en posant

$$M = -\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi},$$
$$N = -\frac{1}{\operatorname{tang}\gamma \sin\varphi},$$

et devient

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi} x - \frac{1}{\operatorname{tang}\gamma \sin\varphi} z;$$

l'équation du plan perpendiculaire au rayon réfracté AR (fig. 2) est, en appelant ρ l'angle de réfraction

$$z = x \operatorname{tang}\rho.$$

Par suite, les équations de la droite AS, intersection des deux plans, seront

$$x = \frac{1}{\operatorname{tang}\rho} z,$$
$$y = -\frac{1}{\sin\varphi \operatorname{tang}\rho} \left(\cos\varphi + \frac{\operatorname{tang}\rho}{\operatorname{tang}\gamma}\right) z.$$

L'équation de la droite AM est d'ailleurs

$$x = -\frac{1}{\operatorname{tang}\rho}\,z\,.$$

On a, par suite, d'après des formules connues, pour le calcul de l'angle ε,

$$\cos\varepsilon = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang}^2\rho}+1}{\sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tang}^2\rho}+1}\sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tang}^2\rho}+\dfrac{1}{\sin^2\varphi\operatorname{tang}^2\rho}\left(\cos\varphi+\dfrac{\operatorname{tang}\rho}{\operatorname{tang}\gamma}\right)^2+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\operatorname{tang}^2\rho}{1+\operatorname{tang}^2\rho+\dfrac{1}{\sin^2\varphi}\left(\cos\varphi+\dfrac{\operatorname{tang}\rho}{\operatorname{tang}\gamma}\right)^2}}$$

Il est préférable de calculer ε par sa tangente, l'expression étant plus simple. On a, en effet, toutes réductions faites,

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\cos\rho}{\sin\varphi}\left(\cos\varphi+\frac{\operatorname{tang}\rho}{\operatorname{tang}\gamma}\right).$$

Cette dernière formule, dont le calcul est facile, peut servir à vérifier plusieurs points de la théorie de Fresnel sur la direction des vibrations dans les rayons réfractés.

On pourrait appliquer une marche analogue au rayon extraordinaire : il faudrait alors couper l'ellipsoïde inverse des vitesses par un plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde d'Huyghens, mené à la distance $\frac{1}{\sin i}$ du point d'incidence, et la direction des vibrations serait parallèle au plus petit des axes de l'ellipse d'intersection pour les cristaux négatifs, au plus grand, au contraire, pour les cristaux positifs. Les calculs seraient évidemment plus compliqués.

J'ai cherché à vérifier, par quelques expériences, une des conséquences de la théorie pour le cas du rayon normal. Les deux positions du Nicol polarisant qui amènent successivement l'extinction des rayons ordinaire et extraordinaire doivent être perpendiculaires l'une à l'autre.

Pour le vérifier, je me suis servi d'un prisme de spath offrant cinq angles dièdres, et, par suite, cinq faces, sur chacune desquelles on pouvait faire tomber un rayon normal. L'angle des deux azimuts pour lesquels on obtenait alternativement l'extinction du rayon O et du rayon E, s'est trouvé avoir les valeurs suivantes :

90° 36′
89° 24′
90° 15′
88° 33′
89° 51′

L'écart de l'expérience avec la théorie est, dans un cas, de 1° 27′ : c'est l'écart maximum. Dans tous les autres, il est inférieur à 1°. Les expériences ne peuvent pas avoir toujours une grande précision, parce que, dans certains cas, l'extinction ne se fait pas nettement, et l'on n'observe qu'un minimum qu'il est difficile de déterminer avec exactitude.

Avec un prisme de quartz, taillé comme celui de spath, j'ai obtenu un accord un peu plus satisfaisant entre l'observation et la théorie. Les valeurs ont été les suivantes :

90° 33′
89° 39′
90° 54′
89° 54′
89° 54′

Il m'a paru utile de signaler ce cas du rayon normal, parce qu'il arrive, dans certains cas, que l'azimut d'extinction de l'une des images se détermine avec netteté, et celui de l'autre peut alors être obtenu en prenant le complément du premier angle. C'est du reste par ce moyen qu'on fixe la position de la section principale correspondante à chaque face du cristal.

ERRATA.

	Au lieu de :	*Lisez :*
P. 283, l. 9.....	$AC^2 - \ldots\ldots$	$AC^2 =$
P. 287, l. 2.....	$O + APA \ldots\ldots$	$O + APB$
P. 287, l. 5.....	and then is...	and thence
P. 287, l. 9.....	If P were.....	If P′ were
P. 288, l. 7.....	$a \times b.10^2 \ldots\ldots$	$a + b.10^2$
P. 288, l. 6 en rem.	what is not...	what is notso
P. 289, l. 7 en rem.	(P), ...	, ... (P′)
P. 292, l. 10.....	$N^3 (N^2 + D)^{\frac{m-5}{2}}$	$N^5 (N^2 + D)^{\frac{m-5}{2}}$

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Liste des Membres de la Société pour l'année 1872-73 1

Extrait des procès-verbaux des séances de la Société (année 1872-73).

G. DARBOUX. — Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires *(suite et fin)*..... 1

III[e] Partie. — Étude de certaines propriétés des imaginaires en géométrie, et d'une classe générale de courbes algébriques, comprenant comme cas particulier la courbe de Cassini..... 1

27. Des points associés dans le plan..... 1
28. D'une classe générale de courbes..... 6
29. Du système orthogonal formé avec les courbes précédentes..... 12
30. Des courbes lieux des points d'où l'on voit plusieurs segments sous des angles dont la somme est nulle..... 14
31. Des rapports entre la théorie générale des cycliques et celle des fonctions elliptiques..... 15
32. De l'ellipse de Cassini..... 18
33. Des points associés à la surface de la sphère..... 23
34. Des courbes sphériques analogues aux courbes planes déjà considérées..... 28
35. Des courbes sphériques pour lesquelles les pôles de chaque série sont deux à deux diamétralement opposés. Propriétés correspondantes des cônes algébriques, ayant ces courbes pour base.. 31
36. Des courbes lieux des points desquels on voit plusieurs segments de grand cercle sous des angles dont la somme est nulle..... 35
37. Des systèmes orthogonaux formés à la surface de la sphère avec les courbes précédentes..... 38
38. Démonstrations nouvelles des théorèmes de Poncelet relatifs aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques, déduites des principes précédents..... 39
39. Transformation des propositions précédentes par la méthode des figures supplémentaires..... 45

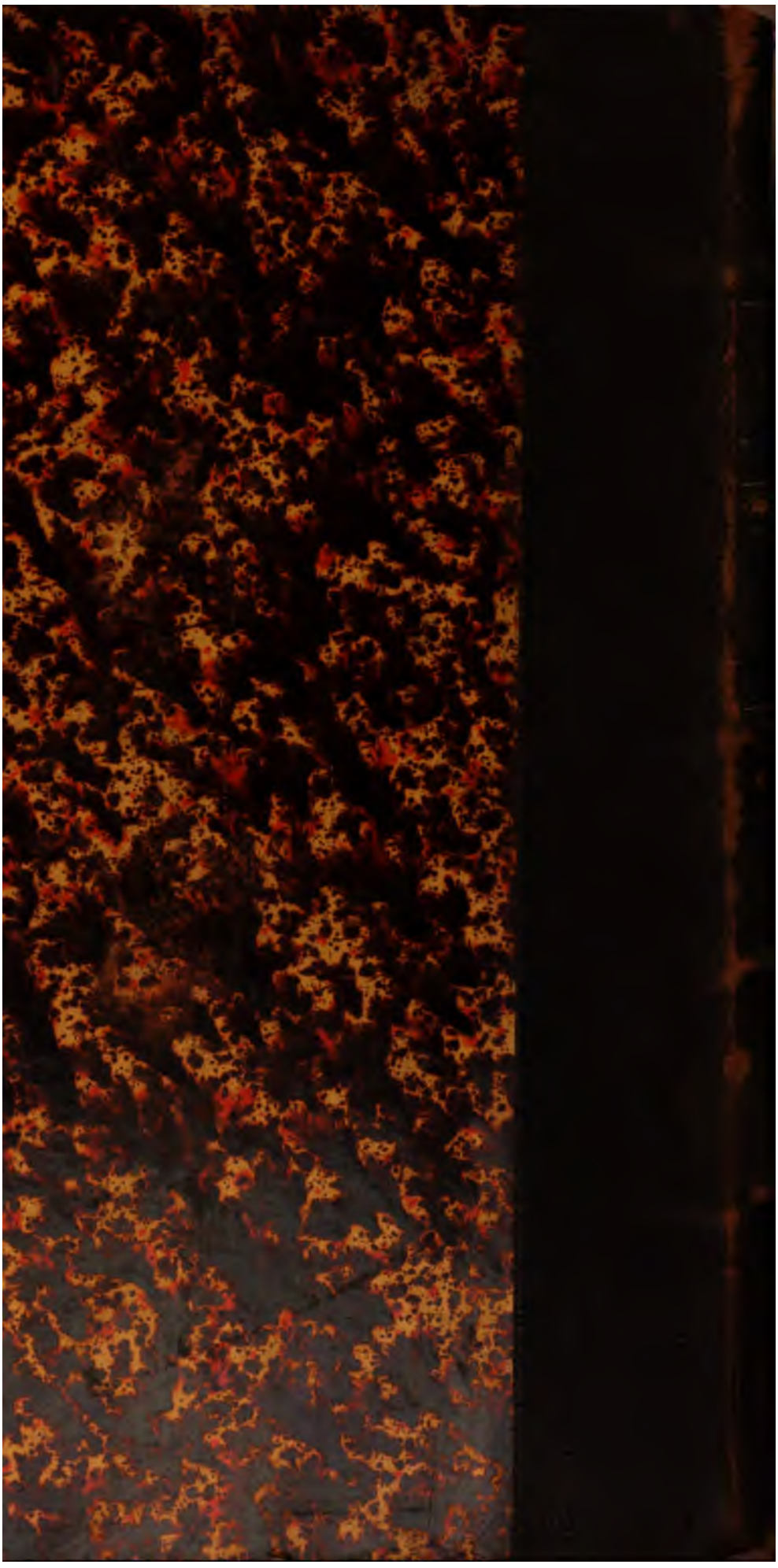
Pages.

IVe PARTIE. — Étude analytique des cyclides..... 47

40. Introduction..... 47
41. Propriétés générales des cyclides..... 49
42. Des sphères doublement tangentes aux cyclides..... 53
43. Des plans tangents doubles et des focales des cyclides..... 57
44. Généralités sur les surfaces anallagmatiques..... 60
45. D'un mode de transformation déduit de la théorie des anallagmatiques..... 64
46. De la forme générale des cyclides, du nombre de leurs focales et de leurs sections circulaires réelles..... 68
47. Du système des cyclides homofocales..... 71
48. Du système de cinq sphères orthogonales..... 75
49. Des cyclides homofocales..... 77
50. Du système de coordonnées curvilignes formé avec les cyclides homofocales et orthogonales..... 80
51. Applications aux cyclides homofocales..... 83
52. Application des formules relatives aux cyclides à la surface générale du 3e ordre, et à la surface du 4e ordre à conique double.. 86

Ve PARTIE. — Étude géométrique des cyclides..... 91

53. Des focales singulières et des sections circulaires..... 91
54. Des relations entre les cinq modes de génération des cyclides.... 92
55. Classification des cyclides..... 94
56. De la cyclide du 3e degré..... 95
57. Des podaires ou réciproques de quadriques..... 96
58. De la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points coniques.. 99
59. Des cyclides ayant pour déférentes les surfaces inscrites dans la sphère..... 102
60. Des sections planes et sphériques des cyclides..... 104
61. Du système orthogonal formé par les cyclides homofocales, et des propriétés d'une méthode de transformation déjà définie..... 113
62. Généralisation des notions de normales, de focales et de lignes de courbure..... 117

NOTES ET ADDITIONS..... 121

Note I. — De l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée..... 121
Note II. — Sur une démonstration analytique des théorèmes de Poncelet, et sur un nouveau système de coordonnées dans le plan. 123
Note III. — Sur la démonstration directe des théorèmes de géométrie sphérique exposés dans la TROISIÈME PARTIE..... 148
Note IV. — Sur quelques surfaces remarquables du second degré et sur les cyclides correspondantes..... 158
Note V. — Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la géométrie de M. Cayley..... 167
Note VI. — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et la théorie des pôles secondaires des cyclides..... 176